

Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique

2018-2019

Notion de “variable aléatoire”

- ▶ *Intuitivement, la notion de variable aléatoire recouvre toute quantité (souvent numérique) que l'on peut déterminer en connaissant entièrement le résultat d'une expérience.*

Notion de “variable aléatoire”

- ▶ *Intuitivement*, la notion de variable aléatoire recouvre *toute quantité (souvent numérique) que l'on peut déterminer en connaissant entièrement le résultat d'une expérience.*
- ▶ **Exemple 1** : dans l'expérience consistant à lancer deux dés, on peut définir tout un tas de variables aléatoires :
 - ▶ S : somme des résultats des dés (entier entre 2 et 12)
 - ▶ D : différence entre le résultat du premier dé et celui du second (entier entre -5 et 5)
 - ▶ I : nombre de dés donnant un résultat impair (0, 1 ou 2)
 - ▶ M : maximum des résultats des deux dés (entier entre 1 et 6)
 - ▶ B : “ π si on obtient (1, 1), 0 sinon”
 - ▶ (et littéralement une infinité d'autres)

Notion de “variable aléatoire”

- ▶ *Intuitivement*, la notion de variable aléatoire recouvre *toute quantité (souvent numérique) que l'on peut déterminer en connaissant entièrement le résultat d'une expérience.*
- ▶ **Exemple 1** : dans l'expérience consistant à lancer deux dés, on peut définir tout un tas de variables aléatoires :
 - ▶ S : somme des résultats des dés (entier entre 2 et 12)
 - ▶ D : différence entre le résultat du premier dé et celui du second (entier entre -5 et 5)
 - ▶ I : nombre de dés donnant un résultat impair (0, 1 ou 2)
 - ▶ M : maximum des résultats des deux dés (entier entre 1 et 6)
 - ▶ B : “ π si on obtient (1, 1), 0 sinon”
 - ▶ (et littéralement une infinité d'autres)
- ▶ **Exemple 2** : dans l'expérience consistant à tirer au dé de manière répétée jusqu'à obtenir un 6, on peut définir aussi tout un tas de variables aléatoires :
 - ▶ N : nombre de tirages nécessaires pour obtenir un 6
 - ▶ S : somme des résultats obtenus avant de s'arrêter, sans compter le 6 final
 - ▶ N_3 : nombre de fois où on obtient 3 avant d'obtenir un 6

Variable aléatoire

- ▶ **Quelle condition** faut-il vérifier pour être sûr d'avoir une variable aléatoire ?

Variable aléatoire

- ▶ **Quelle condition** faut-il vérifier pour être sûr d'avoir une variable aléatoire ?
- ▶ À notre niveau, *pas grand chose* : on veut seulement que la valeur du “nombre aléatoire” soit entièrement déterminée par le résultat de l'expérience.

Variable aléatoire

- ▶ **Quelle condition** faut-il vérifier pour être sûr d'avoir une variable aléatoire ?
- ▶ À notre niveau, *pas grand chose* : on veut seulement que la valeur du “nombre aléatoire” soit entièrement déterminée par le résultat de l'expérience.
- ▶ C'est ce qui est capturé par la notion usuelle (mathématique) de **fonction** définie sur l'univers Ω .

Variable aléatoire

- ▶ **Quelle condition** faut-il vérifier pour être sûr d'avoir une variable aléatoire ?
- ▶ À notre niveau, *pas grand chose* : on veut seulement que la valeur du “nombre aléatoire” soit entièrement déterminée par le résultat de l'expérience.
- ▶ C'est ce qui est capturé par la notion usuelle (mathématique) de **fonction** définie sur l'univers Ω .
- ▶ **Définition** : si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace de probabilités, une *variable aléatoires* sur Ω , à valeurs dans un ensemble E , est n'importe quelle fonction $X : \Omega \rightarrow E$.

Variable aléatoire

- ▶ **Quelle condition** faut-il vérifier pour être sûr d'avoir une variable aléatoire ?
- ▶ À notre niveau, *pas grand chose* : on veut seulement que la valeur du “nombre aléatoire” soit entièrement déterminée par le résultat de l'expérience.
- ▶ C'est ce qui est capturé par la notion usuelle (mathématique) de **fonction** définie sur l'univers Ω .
- ▶ **Définition** : si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace de probabilités, une *variable aléatoires* sur Ω , à valeurs dans un ensemble E , est n'importe quelle fonction $X : \Omega \rightarrow E$.
- ▶ (Dans un cours plus complet de probabilités, il faudrait que X soit une fonction “mesurable” ; dans notre cadre, où Ω est fini ou dénombrable, on peut considérer que toute fonction est mesurable)

Variable aléatoire

- ▶ **Quelle condition** faut-il vérifier pour être sûr d'avoir une variable aléatoire ?
- ▶ À notre niveau, *pas grand chose* : on veut seulement que la valeur du “nombre aléatoire” soit entièrement déterminée par le résultat de l'expérience.
- ▶ C'est ce qui est capturé par la notion usuelle (mathématique) de **fonction** définie sur l'univers Ω .
- ▶ **Définition** : si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace de probabilités, une *variable aléatoires* sur Ω , à valeurs dans un ensemble E , est n'importe quelle fonction $X : \Omega \rightarrow E$.
- ▶ (Dans un cours plus complet de probabilités, il faudrait que X soit une fonction “mesurable” ; dans notre cadre, où Ω est fini ou dénombrable, on peut considérer que toute fonction est mesurable)
- ▶ **Note** : la terminologie est trompeuse : une **variable aléatoire** n'est **pas** une variable, c'est plutôt une fonction ; et elle n'est pas vraiment aléatoire (ne dépend pas de la loi de probabilités)...

Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, on peut définir des variables aléatoires :

Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, on peut définir des variables aléatoires :
 - ▶ résultat du premier dé : $X_1(x, y) = x$;

Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, on peut définir des variables aléatoires :
 - ▶ résultat du premier dé : $X_1(x, y) = x$;
 - ▶ résultat du second dé : $X_2(x, y) = y$;

Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, on peut définir des variables aléatoires :
 - ▶ résultat du premier dé : $X_1(x, y) = x$;
 - ▶ résultat du second dé : $X_2(x, y) = y$;
 - ▶ somme des deux dés : $S(x, y) = x + y = X_1(x, y) + X_2(x, y)$

Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, on peut définir des variables aléatoires :
 - ▶ résultat du premier dé : $X_1(x, y) = x$;
 - ▶ résultat du second dé : $X_2(x, y) = y$;
 - ▶ somme des deux dés : $S(x, y) = x + y = X_1(x, y) + X_2(x, y)$
 - ▶ nombre de dés donnant un résultat pair :
 $P(x, y) = [[x \in \{2, 4, 6\}]] + [[y \in \{2, 4, 6\}]]$ (**Notation :**
 $[[cond]] = 1$ si *cond* est vraie, 0 sinon)

Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, on peut définir des variables aléatoires :
 - ▶ résultat du premier dé : $X_1(x, y) = x$;
 - ▶ résultat du second dé : $X_2(x, y) = y$;
 - ▶ somme des deux dés : $S(x, y) = x + y = X_1(x, y) + X_2(x, y)$
 - ▶ nombre de dés donnant un résultat pair :
 $P(x, y) = [[x \in \{2, 4, 6\}]] + [[y \in \{2, 4, 6\}]]$ (**Notation :**
[[cond]] = 1 si *cond* est vraie, 0 sinon)
- ▶ **Remarque fondamentale :** on peut **combiner** les variables aléatoires pour en construire de nouvelles. . .

Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, on peut définir des variables aléatoires :
 - ▶ résultat du premier dé : $X_1(x, y) = x$;
 - ▶ résultat du second dé : $X_2(x, y) = y$;
 - ▶ somme des deux dés : $S(x, y) = x + y = X_1(x, y) + X_2(x, y)$
 - ▶ nombre de dés donnant un résultat pair :
 $P(x, y) = [[x \in \{2, 4, 6\}]] + [[y \in \{2, 4, 6\}]]$ (**Notation :**
[[cond]] = 1 si *cond* est vraie, 0 sinon)
- ▶ **Remarque fondamentale :** on peut **combiner** les variables aléatoires pour en construire de nouvelles. . .
 - ▶ $S = X_1 + X_2$

Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, on peut définir des variables aléatoires :
 - ▶ résultat du premier dé : $X_1(x, y) = x$;
 - ▶ résultat du second dé : $X_2(x, y) = y$;
 - ▶ somme des deux dés : $S(x, y) = x + y = X_1(x, y) + X_2(x, y)$
 - ▶ nombre de dés donnant un résultat pair :
 $P(x, y) = [[x \in \{2, 4, 6\}]] + [[y \in \{2, 4, 6\}]]$ (**Notation :**
 $[[cond]] = 1$ si *cond* est vraie, 0 sinon)
- ▶ **Remarque fondamentale :** on peut **combiner** les variables aléatoires pour en construire de nouvelles. . .
 - ▶ $S = X_1 + X_2$
 - ▶ $D = X_1 - X_2$

Exemples

- ▶ Avec une expérience “lancer de deux dés” modélisée par un espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, on peut définir des variables aléatoires :
 - ▶ résultat du premier dé : $X_1(x, y) = x$;
 - ▶ résultat du second dé : $X_2(x, y) = y$;
 - ▶ somme des deux dés : $S(x, y) = x + y = X_1(x, y) + X_2(x, y)$
 - ▶ nombre de dés donnant un résultat pair :
 $P(x, y) = [[x \in \{2, 4, 6\}]] + [[y \in \{2, 4, 6\}]]$ (**Notation :**
 $[[cond]] = 1$ si *cond* est vraie, 0 sinon)
- ▶ **Remarque fondamentale :** on peut **combinaison** les variables aléatoires pour en construire de nouvelles...
 - ▶ $S = X_1 + X_2$
 - ▶ $D = X_1 - X_2$
 - ▶ $Y = f(X)$, si X est une variable à valeurs dans E et f est une fonction définie sur E , à valeurs dans F (Y est alors à valeurs dans F).

Variables aléatoires particulières

On suppose que Ω est défini.

- ▶ **1** : on peut définir la “fonction 1” comme étant la fonction constante qui vaut toujours 1 : pour tout $t \in \Omega$, $\mathbf{1}(t) = 1$.
(On peut considérer n'importe quelle constante comme une variable aléatoire d'un genre particulier)

Variables aléatoires particulières

On suppose que Ω est défini.

- ▶ **1** : on peut définir la “fonction 1” comme étant la fonction constante qui vaut toujours 1 : pour tout $t \in \Omega$, $\mathbf{1}(t) = 1$.
(On peut considérer n'importe quelle constante comme une variable aléatoire d'un genre particulier)
- ▶ **Fonction caractéristique d'un événement** : si $A \subset \Omega$ est un événement, on peut définir la variable aléatoire $\mathbf{1}_A$: pour tout $t \in \Omega$, $\mathbf{1}_A(t) = [[t \in A]]$ (vaut 1 sur A , 0 ailleurs)

Variables aléatoires particulières

On suppose que Ω est défini.

- ▶ **1** : on peut définir la “fonction 1” comme étant la fonction constante qui vaut toujours 1 : pour tout $t \in \Omega$, $\mathbf{1}(t) = 1$.
(On peut considérer n'importe quelle constante comme une variable aléatoire d'un genre particulier)
- ▶ **Fonction caractéristique d'un événement** : si $A \subset \Omega$ est un événement, on peut définir la variable aléatoire $\mathbf{1}_A$: pour tout $t \in \Omega$, $\mathbf{1}_A(t) = [[t \in A]]$ (vaut 1 sur A , 0 ailleurs)
- ▶ On peut alors exprimer $\mathbf{1}_{A \cap B}$ ou (plus difficile) $\mathbf{1}_{A \cup B}$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et de $\mathbf{1}_B$...

Loi d'une variable aléatoire

(Le retour des probabilités !)

- Une fois définis un univers de probabilités $(\Omega, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X sur Ω , que peut-on calculer comme probabilités ?

Loi d'une variable aléatoire

(Le retour des probabilités !)

- ▶ Une fois définis un univers de probabilités $(\Omega, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X sur Ω , que peut-on calculer comme probabilités ?
- ▶ Une notation comme $\mathbb{P}(X)$ **n'a aucun sens** : les seules choses dont la probabilité est définie, ce sont les événements (les parties de Ω) ; or X n'est pas une partie de Ω .

Loi d'une variable aléatoire

(Le retour des probabilités !)

- ▶ Une fois définis un univers de probabilités $(\Omega, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X sur Ω , que peut-on calculer comme probabilités ?
- ▶ Une notation comme $\mathbb{P}(X)$ **n'a aucun sens** : les seules choses dont la probabilité est définie, ce sont les événements (les parties de Ω) ; or X n'est pas une partie de Ω .
- ▶ **En revanche**, on peut utiliser X pour définir tout un tas d'événements, dont on pourra calculer la probabilité. . .

Loi d'une variable aléatoire

(Le retour des probabilités !)

- ▶ Une fois définis un univers de probabilités $(\Omega, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X sur Ω , que peut-on calculer comme probabilités ?
- ▶ Une notation comme $\mathbb{P}(X)$ **n'a aucun sens** : les seules choses dont la probabilité est définie, ce sont les événements (les parties de Ω) ; or X n'est pas une partie de Ω .
- ▶ **En revanche**, on peut utiliser X pour définir tout un tas d'événements, dont on pourra calculer la probabilité. . .
- ▶ Si a est une valeur possible de X , on peut définir l'événement

$$\{t \in \Omega : X(t) = a\}$$

Loi d'une variable aléatoire

(Le retour des probabilités !)

- ▶ Une fois définis un univers de probabilités $(\Omega, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X sur Ω , que peut-on calculer comme probabilités ?
- ▶ Une notation comme $\mathbb{P}(X)$ **n'a aucun sens** : les seules choses dont la probabilité est définie, ce sont les événements (les parties de Ω) ; or X n'est pas une partie de Ω .
- ▶ **En revanche**, on peut utiliser X pour définir tout un tas d'événements, dont on pourra calculer la probabilité. . .
- ▶ Si a est une valeur possible de X , on peut définir l'événement

$$\{t \in \Omega : X(t) = a\}$$

- ▶ Plus généralement, si A est une partie de E (l'ensemble des valeurs possibles de X), on peut définir

$$\{t \in \Omega : X(t) \in A\}$$

Loi d'une variable aléatoire

(Le retour des probabilités !)

- ▶ Une fois définis un univers de probabilités $(\Omega, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X sur Ω , que peut-on calculer comme probabilités ?
- ▶ Une notation comme $\mathbb{P}(X)$ **n'a aucun sens** : les seules choses dont la probabilité est définie, ce sont les événements (les parties de Ω) ; or X n'est pas une partie de Ω .
- ▶ **En revanche**, on peut utiliser X pour définir tout un tas d'événements, dont on pourra calculer la probabilité. . .
- ▶ Si a est une valeur possible de X , on peut définir l'événement

$$\{t \in \Omega : X(t) = a\} = X^{-1}(\{a\})$$

- ▶ Plus généralement, si A est une partie de E (l'ensemble des valeurs possibles de X), on peut définir

$$\{t \in \Omega : X(t) \in A\}$$

Loi d'une variable aléatoire

(Le retour des probabilités !)

- ▶ Une fois définis un univers de probabilités $(\Omega, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire X sur Ω , que peut-on calculer comme probabilités ?
- ▶ Une notation comme $\mathbb{P}(X)$ **n'a aucun sens** : les seules choses dont la probabilité est définie, ce sont les événements (les parties de Ω) ; or X n'est pas une partie de Ω .
- ▶ **En revanche**, on peut utiliser X pour définir tout un tas d'événements, dont on pourra calculer la probabilité. . .
- ▶ Si a est une valeur possible de X , on peut définir l'événement

$$\{t \in \Omega : X(t) = a\} = X^{-1}(\{a\})$$

- ▶ Plus généralement, si A est une partie de E (l'ensemble des valeurs possibles de X), on peut définir

$$\{t \in \Omega : X(t) \in A\} = X^{-1}(A)$$

Loi d'une variable aléatoire

Définition/Théorème (loi d'une variable aléatoire)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, et X une variable aléatoire sur Ω , à valeur dans un ensemble E . La **loi** de X est par définition la loi de probabilités sur E , notée parfois $\mathbb{P}_X$, définie par : pour toute partie $A \subset E$,

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\{t \in \Omega : X(t) \in A\}).$$

(**c'est** une loi de probabilités sur E)

Digérons cette définition...

- L'ensemble $\{t \in \Omega : X(t) \in A\}$ est une partie de Ω : c'est bien un événement sur Ω

Digérons cette définition. . .

- ▶ L'ensemble $\{t \in \Omega : X(t) \in A\}$ est une partie de Ω : c'est bien un événement sur Ω
- ▶ On le note souvent $X^{-1}(A)$ **Attention** : c'est une notation, il n'existe pas de fonction X^{-1} .

Digérons cette définition. . .

- ▶ L'ensemble $\{t \in \Omega : X(t) \in A\}$ est une partie de Ω : c'est bien un événement sur Ω
- ▶ On le note souvent $X^{-1}(A)$ **Attention** : c'est une notation, il n'existe pas de fonction X^{-1} .
- ▶ On le note également $(X \in A)$ (on fait disparaître la variable t de l'écriture ; **l'espace de probabilités n'est pas important, on est plus intéressé par les lois des variables aléatoires qu'on y définit**. Notamment, c'est ce qui se cache derrière la notation $\mathbb{P}(X \in A)$).

Digérons cette définition. . .

- ▶ L'ensemble $\{t \in \Omega : X(t) \in A\}$ est une partie de Ω : c'est bien un événement sur Ω
- ▶ On le note souvent $X^{-1}(A)$ **Attention** : c'est une notation, il n'existe pas de fonction X^{-1} .
- ▶ On le note également $(X \in A)$ (on fait disparaître la variable t de l'écriture ; **l'espace de probabilités n'est pas important, on est plus intéressé par les lois des variables aléatoires qu'on y définit**. Notamment, c'est ce qui se cache derrière la notation $\mathbb{P}(X \in A)$).
- ▶ Quand $A = \{a\}$ (A est un singleton), on accepte pour le même événement, la notation $(X = a)$; encore une fois, cette notation est juste une façon commode de noter un événement sur Ω .

Digérons cette définition. . .

- ▶ L'ensemble $\{t \in \Omega : X(t) \in A\}$ est une partie de Ω : c'est bien un événement sur Ω
- ▶ On le note souvent $X^{-1}(A)$ **Attention** : c'est une notation, il n'existe pas de fonction X^{-1} .
- ▶ On le note également $(X \in A)$ (on fait disparaître la variable t de l'écriture ; **l'espace de probabilités n'est pas important, on est plus intéressé par les lois des variables aléatoires qu'on y définit**. Notamment, c'est ce qui se cache derrière la notation $\mathbb{P}(X \in A)$).
- ▶ Quand $A = \{a\}$ (A est un singleton), on accepte pour le même événement, la notation $(X = a)$; encore une fois, cette notation est juste une façon commode de noter un événement sur Ω .
- ▶ **Remarque** : la variable aléatoire X ne dépend pas de la loi de probabilités $\mathbb{P}$ qu'on met sur Ω ; sa loi $\mathbb{P}_X$, elle, en dépend !

Digérons cette définition. . .

- ▶ L'ensemble $\{t \in \Omega : X(t) \in A\}$ est une partie de Ω : c'est bien un événement sur Ω
- ▶ On le note souvent $X^{-1}(A)$ **Attention** : c'est une notation, il n'existe pas de fonction X^{-1} .
- ▶ On le note également $(X \in A)$ (on fait disparaître la variable t de l'écriture ; **l'espace de probabilités n'est pas important, on est plus intéressé par les lois des variables aléatoires qu'on y définit**). Notamment, c'est ce qui se cache derrière la notation $\mathbb{P}(X \in A)$.
- ▶ Quand $A = \{a\}$ (A est un singleton), on accepte pour le même événement, la notation $(X = a)$; encore une fois, cette notation est juste une façon commode de noter un événement sur Ω .
- ▶ **Remarque** : la variable aléatoire X ne dépend pas de la loi de probabilités $\mathbb{P}$ qu'on met sur Ω ; sa loi $\mathbb{P}_X$, elle, en dépend !
- ▶ On préfère généralement la notation $\mathbb{P}(X \in A)$ qui ne risque pas d'être confondue avec une probabilité conditionnelle.

Un exemple de calcul de loi

Prenons une expérience consistant à lancer deux dés équilibrés : on peut modéliser ça par l'espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, avec la probabilité uniforme. Calculons la loi de la variable aléatoire “maximum des deux dés”.

- ▶ On définit, pour $(x, y) \in \Omega$, $M(x, y) = \max(x, y)$, à valeur dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Un exemple de calcul de loi

Prenons une expérience consistant à lancer deux dés équilibrés : on peut modéliser ça par l'espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, avec la probabilité uniforme. Calculons la loi de la variable aléatoire “maximum des deux dés”.

- ▶ On définit, pour $(x, y) \in \Omega$, $M(x, y) = \max(x, y)$, à valeur dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- ▶ Pour décrire la loi de M , il suffit de décrire la probabilité $\mathbb{P}_M$ pour les singletons de E , i.e., $\mathbb{P}(M = i)$ pour chaque $i \in E$:

Un exemple de calcul de loi

Prenons une expérience consistant à lancer deux dés équilibrés : on peut modéliser ça par l'espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, avec la probabilité uniforme. Calculons la loi de la variable aléatoire “maximum des deux dés”.

- ▶ On définit, pour $(x, y) \in \Omega$, $M(x, y) = \max(x, y)$, à valeur dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- ▶ Pour décrire la loi de M , il suffit de décrire la probabilité $\mathbb{P}_M$ pour les singletons de E , i.e., $\mathbb{P}(M = i)$ pour chaque $i \in E$:
- ▶ pour $i = 1$, c'est facile, $(M = 1) = \{(1, 1)\}$ et $\mathbb{P}(M = 1) = 1/36$;

Un exemple de calcul de loi

Prenons une expérience consistant à lancer deux dés équilibrés : on peut modéliser ça par l'espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, avec la probabilité uniforme. Calculons la loi de la variable aléatoire “maximum des deux dés”.

- ▶ On définit, pour $(x, y) \in \Omega$, $M(x, y) = \max(x, y)$, à valeur dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- ▶ Pour décrire la loi de M , il suffit de décrire la probabilité $\mathbb{P}_M$ pour les singletons de E , i.e., $\mathbb{P}(M = i)$ pour chaque $i \in E$:
- ▶ pour $i = 1$, c'est facile, $(M = 1) = \{(1, 1)\}$ et $\mathbb{P}(M = 1) = 1/36$;
- ▶ pour $i = 2$: $(M = 2) = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ et $\mathbb{P}(M = 2) = 3/36$;

Un exemple de calcul de loi

Prenons une expérience consistant à lancer deux dés équilibrés : on peut modéliser ça par l'espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, avec la probabilité uniforme. Calculons la loi de la variable aléatoire “maximum des deux dés”.

- ▶ On définit, pour $(x, y) \in \Omega$, $M(x, y) = \max(x, y)$, à valeur dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- ▶ Pour décrire la loi de M , il suffit de décrire la probabilité $\mathbb{P}_M$ pour les singletons de E , i.e., $\mathbb{P}(M = i)$ pour chaque $i \in E$:
- ▶ pour $i = 1$, c'est facile, $(M = 1) = \{(1, 1)\}$ et $\mathbb{P}(M = 1) = 1/36$;
- ▶ pour $i = 2$: $(M = 2) = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ et $\mathbb{P}(M = 2) = 3/36$;
- ▶ pour $i = 3$: $(M = 3) = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ et $\mathbb{P}(M = 3) = 5/36$;

Un exemple de calcul de loi

Prenons une expérience consistant à lancer deux dés équilibrés : on peut modéliser ça par l'espace $\Omega = [[1, 6]]^2$, avec la probabilité uniforme. Calculons la loi de la variable aléatoire “maximum des deux dés”.

- ▶ On définit, pour $(x, y) \in \Omega$, $M(x, y) = \max(x, y)$, à valeur dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- ▶ Pour décrire la loi de M , il suffit de décrire la probabilité $\mathbb{P}_M$ pour les singletons de E , i.e., $\mathbb{P}(M = i)$ pour chaque $i \in E$:
- ▶ pour $i = 1$, c'est facile, $(M = 1) = \{(1, 1)\}$ et $\mathbb{P}(M = 1) = 1/36$;
- ▶ pour $i = 2$: $(M = 2) = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ et $\mathbb{P}(M = 2) = 3/36$;
- ▶ pour $i = 3$: $(M = 3) = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ et $\mathbb{P}(M = 3) = 5/36$;
- ▶ $\mathbb{P}(M = 4) = 7/36$, $\mathbb{P}(M = 5) = 9/36$ et $\mathbb{P}(M = 6) = 11/36$; on peut vérifier que la somme fait bien 1.

Loi jointe de deux variables

- ▶ Si X et Y sont des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut considérer le couple (X, Y) comme une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$; c'est la fonction définie par : pour tout $t \in \Omega$,

$$(X, Y)(t) = (X(t), Y(t))$$

Loi jointe de deux variables

- ▶ Si X et Y sont des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut considérer le couple (X, Y) comme une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$; c'est la fonction définie par : pour tout $t \in \Omega$,

$$(X, Y)(t) = (X(t), Y(t))$$

- ▶ Ce qu'on appelle la *loi jointe* de X et Y , c'est la loi du couple (X, Y)

Loi jointe de deux variables

- ▶ Si X et Y sont des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut considérer le couple (X, Y) comme une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$; c'est la fonction définie par : pour tout $t \in \Omega$,

$$(X, Y)(t) = (X(t), Y(t))$$

- ▶ Ce qu'on appelle la *loi jointe* de X et Y , c'est la loi du couple (X, Y)
- ▶ Là où la loi de X est définie par la donnée des $\mathbb{P}(X = a)$ pour les différentes valeurs de a , la loi de (X, Y) va être définie par la donnée des $\mathbb{P}(X = a, Y = b)$ pour les différentes valeurs du **couple** (a, b)

Loi jointe de deux variables

- ▶ Si X et Y sont des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut considérer le couple (X, Y) comme une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$; c'est la fonction définie par : pour tout $t \in \Omega$,

$$(X, Y)(t) = (X(t), Y(t))$$

- ▶ Ce qu'on appelle la *loi jointe* de X et Y , c'est la loi du couple (X, Y)
- ▶ Là où la loi de X est définie par la donnée des $\mathbb{P}(X = a)$ pour les différentes valeurs de a , la loi de (X, Y) va être définie par la donnée des $\mathbb{P}(X = a, Y = b)$ pour les différentes valeurs du **couple** (a, b)
- ▶ **Indépendance** (de deux v.a.) : X et Y sont dites indépendantes, si on a, pour tout a et pour tout b ,

$$\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = b)$$