

Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique

2018-2019

Loi d'une variable aléatoire

- ▶ Déterminer la **loi** d'une variable aléatoire X , cela revient à déterminer :
 - ▶ l'ensemble V des valeurs que peut prendre X (formellement, $V = X(\Omega)$)
 - ▶ pour chaque $v \in V$, la probabilité de l'événement $(X = v)$:

$$p(v) = \mathbb{P}(X = v)$$

Loi d'une variable aléatoire

- ▶ Déterminer la **loi** d'une variable aléatoire X , cela revient à déterminer :
 - ▶ l'ensemble V des valeurs que peut prendre X (formellement, $V = X(\Omega)$)
 - ▶ pour chaque $v \in V$, la probabilité de l'événement $(X = v)$:

$$p(v) = \mathbb{P}(X = v)$$

- ▶ Dans la pratique, on va souvent considérer des variables à valeurs entières ($V \subset \mathbb{Z}$), voire entières positives ($V \subset \mathbb{N}$).

Loi d'une variable aléatoire

- ▶ Déterminer la **loi** d'une variable aléatoire X , cela revient à déterminer :
 - ▶ l'ensemble V des valeurs que peut prendre X (formellement, $V = X(\Omega)$)
 - ▶ pour chaque $v \in V$, la probabilité de l'événement $(X = v)$:

$$p(v) = \mathbb{P}(X = v)$$

- ▶ Dans la pratique, on va souvent considérer des variables à valeurs entières ($V \subset \mathbb{Z}$), voire entières positives ($V \subset \mathbb{N}$).
- ▶ Parmi l'infinie variété de lois possibles, il y en a certaines qui reviennent très souvent, parce qu'elles sont utiles pour modéliser beaucoup de situations ; on va en décrire quelques unes, et étudier leurs relations.

Lois de Bernoulli

- ▶ La variable aléatoire la plus simple possible à part les variables constantes : on a un événement A , et on pose $X = \mathbf{1}_A$ (indicatrice de A).

Lois de Bernoulli

- ▶ La variable aléatoire la plus simple possible à part les variables constantes : on a un événement A , et on pose $X = \mathbf{1}_A$ (indicatrice de A).
- ▶ Une telle variable a deux valeurs possibles : 1 (pour $t \in A$), et 0 (pour $t \notin A$).

Lois de Bernoulli

- ▶ La variable aléatoire la plus simple possible à part les variables constantes : on a un événement A , et on pose $X = \mathbf{1}_A$ (indicatrice de A).
- ▶ Une telle variable a deux valeurs possibles : 1 (pour $t \in A$), et 0 (pour $t \notin A$).
- ▶ La loi est tout aussi simple à décrire : si on pose $p = \mathbb{P}(A)$, on a $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Lois de Bernoulli

- ▶ La variable aléatoire la plus simple possible à part les variables constantes : on a un événement A , et on pose $X = \mathbf{1}_A$ (indicatrice de A).
- ▶ Une telle variable a deux valeurs possibles : 1 (pour $t \in A$), et 0 (pour $t \notin A$).
- ▶ La loi est tout aussi simple à décrire : si on pose $p = \mathbb{P}(A)$, on a $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
- ▶ Le **paramètre** p ($0 \leq p \leq 1$) détermine complètement une loi de Bernoulli.

Lois de Bernoulli

- ▶ La variable aléatoire la plus simple possible à part les variables constantes : on a un événement A , et on pose $X = \mathbf{1}_A$ (indicatrice de A).
- ▶ Une telle variable a deux valeurs possibles : 1 (pour $t \in A$), et 0 (pour $t \notin A$).
- ▶ La loi est tout aussi simple à décrire : si on pose $p = \mathbb{P}(A)$, on a $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
- ▶ Le **paramètre** p ($0 \leq p \leq 1$) détermine complètement une loi de Bernoulli.
- ▶ **Notation** : $X \sim \mathcal{B}_p$ pour “ X suit la loi de Bernoulli de paramètre p ” ; on dit aussi “ X est une Bernoulli de paramètre p ”.

Lois binomiales

- Une situation classique : on a un nombre fixe d'événements indépendants, chacun ayant la même probabilité de se produire ; et on s'intéresse au **nombre** de ceux qui se produisent.

Lois binomiales

- ▶ Une situation classique : on a un nombre fixe d'événements indépendants, chacun ayant la même probabilité de se produire ; et on s'intéresse au **nombre** de ceux qui se produisent.
- ▶ **Exemple** : je lance 3 dés, et je marque 1 point par dé qui donne un résultat pair.

Lois binomiales

- ▶ Une situation classique : on a un nombre fixe d'événements indépendants, chacun ayant la même probabilité de se produire ; et on s'intéresse au **nombre** de ceux qui se produisent.
- ▶ **Exemple** : je lance 3 dés, et je marque 1 point par dé qui donne un résultat pair.
- ▶ **Exemple** : dans un jeu de 32 cartes, dont j'ai séparé les 8 cartes de chaque couleur, je tire aléatoirement une carte de chaque couleur, et je note le nombre d'As obtenus.

Lois binomiales

- ▶ Une situation classique : on a un nombre fixe d'événements indépendants, chacun ayant la même probabilité de se produire ; et on s'intéresse au **nombre** de ceux qui se produisent.
- ▶ **Exemple** : je lance 3 dés, et je marque 1 point par dé qui donne un résultat pair.
- ▶ **Exemple** : dans un jeu de 32 cartes, dont j'ai séparé les 8 cartes de chaque couleur, je tire aléatoirement une carte de chaque couleur, et je note le nombre d'As obtenus.
- ▶ **Exemple (approché)** : je vais Place de la Victoire un jeudi soir, et je questionne 10 personnes "au hasard" ; et je compte le nombre d'étudiants de l'université parmi elles.

Lois binomiales

- ▶ Une situation classique : on a un nombre fixe d'événements indépendants, chacun ayant la même probabilité de se produire ; et on s'intéresse au **nombre** de ceux qui se produisent.
- ▶ **Exemple** : je lance 3 dés, et je marque 1 point par dé qui donne un résultat pair.
- ▶ **Exemple** : dans un jeu de 32 cartes, dont j'ai séparé les 8 cartes de chaque couleur, je tire aléatoirement une carte de chaque couleur, et je note le nombre d'As obtenus.
- ▶ **Exemple (approché)** : je vais Place de la Victoire un jeudi soir, et je questionne 10 personnes "au hasard" ; et je compte le nombre d'étudiants de l'université parmi elles.
- ▶ *A priori*, il y a deux paramètres importants : le *nombre* d'événements, et la probabilité (commune) de chacun d'eux ; (n, p)

Lois binomiales

- ▶ Une situation classique : on a un nombre fixe d'événements indépendants, chacun ayant la même probabilité de se produire ; et on s'intéresse au **nombre** de ceux qui se produisent.
- ▶ **Exemple** : je lance 3 dés, et je marque 1 point par dé qui donne un résultat pair.
- ▶ **Exemple** : dans un jeu de 32 cartes, dont j'ai séparé les 8 cartes de chaque couleur, je tire aléatoirement une carte de chaque couleur, et je note le nombre d'As obtenus.
- ▶ **Exemple (approché)** : je vais Place de la Victoire un jeudi soir, et je questionne 10 personnes "au hasard" ; et je compte le nombre d'étudiants de l'université parmi elles.
- ▶ *A priori*, il y a deux paramètres importants : le *nombre* d'événements, et la probabilité (commune) de chacun d'eux ; (n, p)
- ▶ Formellement : si mes événements sont $E_1, \dots, E_n$, ma variable aléatoire est $X = \mathbf{1}_{E_1} + \mathbf{1}_{E_2} + \dots + \mathbf{1}_{E_n}$.

Détermination de la loi binomiale

- Les valeurs possibles : tous les entiers de 0 à n : $V = [[0, n]]$.

Détermination de la loi binomiale

- ▶ Les valeurs possibles : tous les entiers de 0 à n : $V = \{0, 1, \dots, n\}$.
- ▶ Il nous faut donc déterminer, pour chaque $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.

Détermination de la loi binomiale

- ▶ Les valeurs possibles : tous les entiers de 0 à n : $V = \llbracket 0, n \rrbracket$.
- ▶ Il nous faut donc déterminer, pour chaque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.
- ▶ On va décomposer l'événement en union disjointe d'événements dont on sait calculer la probabilité.

Détermination de la loi binomiale

- ▶ Les valeurs possibles : tous les entiers de 0 à n : $V = [[0, n]]$.
- ▶ Il nous faut donc déterminer, pour chaque $k \in [[0, n]]$, la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.
- ▶ On va décomposer l'événement en union disjointe d'événements dont on sait calculer la probabilité.
- ▶ Fixons un ensemble $I \subset [[1, n]]$, de cardinal k ; on définit l'événement

$$F_I = (\cap_{i \in I} E_i) \cap (\cap_{j \notin I} \overline{E_j})$$

(“les E_i pour $i \in I$ se produisent, les autres non” ;
 $F_I \subset (X = k)$)

Détermination de la loi binomiale

- ▶ Les valeurs possibles : tous les entiers de 0 à n : $V = [[0, n]]$.
- ▶ Il nous faut donc déterminer, pour chaque $k \in [[0, n]]$, la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.
- ▶ On va décomposer l'événement en union disjointe d'événements dont on sait calculer la probabilité.
- ▶ Fixons un ensemble $I \subset [[1, n]]$, de cardinal k ; on définit l'événement

$$F_I = \left(\bigcap_{i \in I} E_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \notin I} \overline{E_j} \right)$$

(“les E_i pour $i \in I$ se produisent, les autres non” ;
 $F_I \subset (X = i)$)

- ▶ Chaque E_i a probabilité p , et les $\overline{E_j}$ ont probabilité $1 - p$; et tous sont indépendants

Détermination de la loi binomiale

- ▶ Les valeurs possibles : tous les entiers de 0 à n : $V = [[0, n]]$.
- ▶ Il nous faut donc déterminer, pour chaque $k \in [[0, n]]$, la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.
- ▶ On va décomposer l'événement en union disjointe d'événements dont on sait calculer la probabilité.
- ▶ Fixons un ensemble $I \subset [[1, n]]$, de cardinal k ; on définit l'événement

$$F_I = (\cap_{i \in I} E_i) \cap (\cap_{j \notin I} \overline{E_j})$$

(“les E_i pour $i \in I$ se produisent, les autres non” ;
 $F_I \subset (X = i)$)

- ▶ Chaque E_i a probabilité p , et les $\overline{E_j}$ ont probabilité $1 - p$; et tous sont indépendants
- ▶ Donc $\mathbb{P}(F_I) = p^k(1 - p)^{n-k}$.

Détermination de la loi binomiale

- ▶ Les valeurs possibles : tous les entiers de 0 à n : $V = [[0, n]]$.
- ▶ Il nous faut donc déterminer, pour chaque $k \in [[0, n]]$, la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.
- ▶ On va décomposer l'événement en union disjointe d'événements dont on sait calculer la probabilité.
- ▶ Fixons un ensemble $I \subset [[1, n]]$, de cardinal k ; on définit l'événement

$$F_I = (\cap_{i \in I} E_i) \cap (\cap_{j \notin I} \overline{E_j})$$

(“les E_i pour $i \in I$ se produisent, les autres non” ;
 $F_I \subset (X = i)$)

- ▶ Chaque E_i a probabilité p , et les $\overline{E_j}$ ont probabilité $1 - p$; et tous sont indépendants
- ▶ Donc $\mathbb{P}(F_I) = p^k (1 - p)^{n-k}$.
- ▶ **De plus**, $(X = k)$ est l'union des tous les ensembles F_I , pour toutes les parties de cardinal k de $[[1, n]]$.

Détermination de la loi binomiale

- ▶ Les valeurs possibles : tous les entiers de 0 à n : $V = [[0, n]]$.
- ▶ Il nous faut donc déterminer, pour chaque $k \in [[0, n]]$, la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.
- ▶ On va décomposer l'événement en union disjointe d'événements dont on sait calculer la probabilité.
- ▶ Fixons un ensemble $I \subset [[1, n]]$, de cardinal k ; on définit l'événement

$$F_I = \left(\bigcap_{i \in I} E_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \notin I} \overline{E}_j \right)$$

(“les E_i pour $i \in I$ se produisent, les autres non” ;
 $F_I \subset (X = k)$)

- ▶ Chaque E_i a probabilité p , et les $\overline{E}_j$ ont probabilité $1 - p$; et tous sont indépendants
- ▶ Donc $\mathbb{P}(F_I) = p^k (1 - p)^{n-k}$.
- ▶ **De plus**, $(X = k)$ est l'union des tous les ensembles F_I , pour toutes les parties de cardinal k de $[[1, n]]$.
- ▶ **Donc**, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Détermination de la loi binomiale

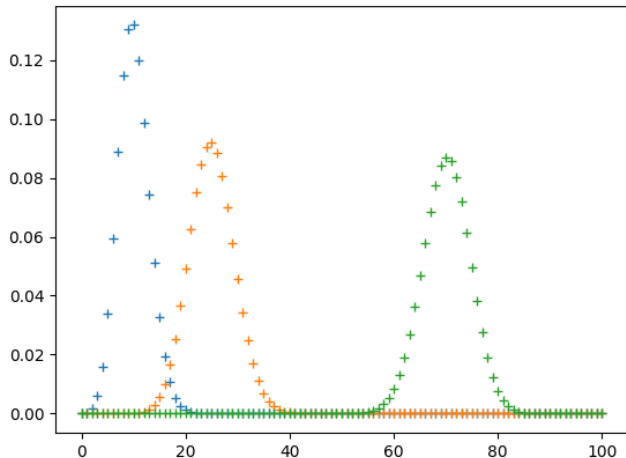
- ▶ Les valeurs possibles : tous les entiers de 0 à n : $V = [[0, n]]$.
- ▶ Il nous faut donc déterminer, pour chaque $k \in [[0, n]]$, la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.
- ▶ On va décomposer l'événement en union disjointe d'événements dont on sait calculer la probabilité.
- ▶ Fixons un ensemble $I \subset [[1, n]]$, de cardinal k ; on définit l'événement

$$F_I = \left(\bigcap_{i \in I} E_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \notin I} \overline{E}_j \right)$$

(“les E_i pour $i \in I$ se produisent, les autres non” ;
 $F_I \subset (X = k)$)

- ▶ Chaque E_i a probabilité p , et les $\overline{E}_j$ ont probabilité $1 - p$; et tous sont indépendants
- ▶ Donc $\mathbb{P}(F_I) = p^k (1 - p)^{n-k}$.
- ▶ **De plus**, $(X = k)$ est l'union des tous les ensembles F_I , pour toutes les parties de cardinal k de $[[1, n]]$.
- ▶ **Donc**, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.
- ▶ **Notation** : $X \sim \text{Bin}_{n,p}$

Courbes de probabilités binomiales



Lois géométriques

- Une autre situation classique : on a une *suite* (infinie) de Bernoulli indépendantes $B_1, B_2, \dots$, de même paramètre ; et on s'intéresse au **numéro** de la première non nulle.

Lois géométriques

- ▶ Une autre situation classique : on a une *suite* (infinie) de Bernoulli indépendantes $B_1, B_2, \dots$, de même paramètre ; et on s'intéresse au **numéro** de la première non nulle.
- ▶ Formellement,

$$X = \min \{n > 0 : B_n = 1\}$$

Lois géométriques

- ▶ Une autre situation classique : on a une *suite* (infinie) de Bernoulli indépendantes $B_1, B_2, \dots$, de même paramètre ; et on s'intéresse au **numéro** de la première non nulle.
- ▶ Formellement,

$$X = \min \{n > 0 : B_n = 1\}$$

- ▶ **Exemple** : je joue à pile ou face jusqu'à tirer Pile pour la première fois ; je regarde le nombre de fois que je lance ma pièce

Lois géométriques

- ▶ Une autre situation classique : on a une *suite* (infinie) de Bernoulli indépendantes $B_1, B_2, \dots$, de même paramètre ; et on s'intéresse au **numéro** de la première non nulle.
- ▶ Formellement,

$$X = \min \{n > 0 : B_n = 1\}$$

- ▶ **Exemple** : je joue à pile ou face jusqu'à tirer Pile pour la première fois ; je regarde le nombre de fois que je lance ma pièce
- ▶ **Exemple** : Chaque jour, M. Sangène se gare en double file pour acheter son pain ; chaque jour, il a une chance sur 50 de prendre une contravention. Quelle est la loi du nombre de fois qu'il se gare avant d'enfin prendre une prune ?

Lois géométriques

- ▶ Une autre situation classique : on a une *suite* (infinie) de Bernoulli indépendantes $B_1, B_2, \dots$, de même paramètre ; et on s'intéresse au **numéro** de la première non nulle.
- ▶ Formellement,

$$X = \min \{n > 0 : B_n = 1\}$$

- ▶ **Exemple** : je joue à pile ou face jusqu'à tirer Pile pour la première fois ; je regarde le nombre de fois que je lance ma pièce
- ▶ **Exemple** : Chaque jour, M. Sangène se gare en double file pour acheter son pain ; chaque jour, il a une chance sur 50 de prendre une contravention. Quelle est la loi du nombre de fois qu'il se gare avant d'enfin prendre une prune ?
- ▶ **Exemple** : Dans un jeu de dés, on lance deux dés et, si on fait un double, on rejoue immédiatement. Quelle est la loi du nombre de coups consécutifs joués ?

Lois géométriques

- ▶ Une autre situation classique : on a une *suite* (infinie) de Bernoulli indépendantes $B_1, B_2, \dots$, de même paramètre ; et on s'intéresse au **numéro** de la première non nulle.
- ▶ Formellement,

$$X = \min \{n > 0 : B_n = 1\}$$

- ▶ **Exemple** : je joue à pile ou face jusqu'à tirer Pile pour la première fois ; je regarde le nombre de fois que je lance ma pièce
- ▶ **Exemple** : Chaque jour, M. Sangène se gare en double file pour acheter son pain ; chaque jour, il a une chance sur 50 de prendre une contravention. Quelle est la loi du nombre de fois qu'il se gare avant d'enfin prendre une prune ?
- ▶ **Exemple** : Dans un jeu de dés, on lance deux dés et, si on fait un double, on rejoue immédiatement. Quelle est la loi du nombre de coups consécutifs joués ?
- ▶ Il y a un seul paramètre : la probabilité p , à chaque coup, de s'arrêter (le paramètre commun des Bernoulli).

Détermination de la loi géométrique

- ▶ Ensemble des valeurs possibles : tous les entiers strictement positifs

Détermination de la loi géométrique

- ▶ Ensemble des valeurs possibles : tous les entiers strictement positifs
- ▶ (plus, possiblement, $+\infty$? Au cas où toutes les B_i seraient nulles ?)

Détermination de la loi géométrique

- ▶ Ensemble des valeurs possibles : tous les entiers strictement positifs
- ▶ (plus, possiblement, $+\infty$? Au cas où toutes les B_i seraient nulles ?)
- ▶ On se donne donc un entier $k > 0$, et on va déterminer la probabilité de l'événement $(X = k)$.

Détermination de la loi géométrique

- ▶ Ensemble des valeurs possibles : tous les entiers strictement positifs
- ▶ (plus, possiblement, $+\infty$? Au cas où toutes les B_i seraient nulles ?)
- ▶ On se donne donc un entier $k > 0$, et on va déterminer la probabilité de l'événement $(X = k)$.
- ▶ On peut écrire l'événement $(X = k)$ en terme des B_i :
 - ▶ Pour que $X = k$, il faut que chacun des B_i , pour $i < k$, soit nulle.
 - ▶ Il faut aussi qu'on ait $B_k = 1$.
 - ▶ Et ça suffit.
 - ▶ Comme les B_i sont indépendantes, la probabilité se calcule facilement

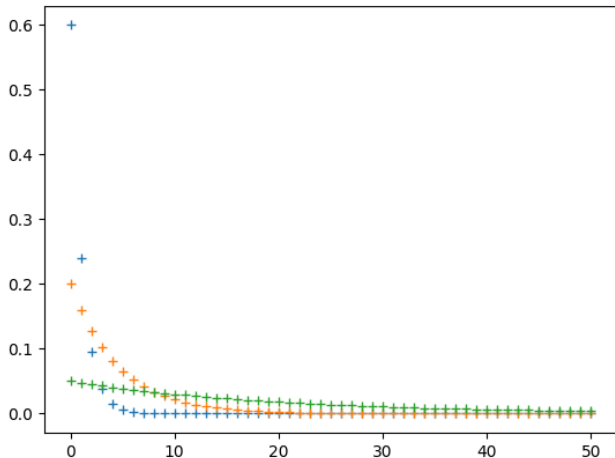
Détermination de la loi géométrique

- ▶ Ensemble des valeurs possibles : tous les entiers strictement positifs
- ▶ (plus, possiblement, $+\infty$? Au cas où toutes les B_i seraient nulles ?)
- ▶ On se donne donc un entier $k > 0$, et on va déterminer la probabilité de l'événement $(X = k)$.
- ▶ On peut écrire l'événement $(X = k)$ en terme des B_i :
 - ▶ Pour que $X = k$, il faut que chacun des B_i , pour $i < k$, soit nulle.
 - ▶ Il faut aussi qu'on ait $B_k = 1$.
 - ▶ Et ça suffit.
 - ▶ Comme les B_i sont indépendantes, la probabilité se calcule facilement
- ▶ Donc, $\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$ (pour tout entier $k > 0$)

Détermination de la loi géométrique

- ▶ Ensemble des valeurs possibles : tous les entiers strictement positifs
- ▶ (plus, possiblement, $+\infty$? Au cas où toutes les B_i seraient nulles ?)
- ▶ On se donne donc un entier $k > 0$, et on va déterminer la probabilité de l'événement $(X = k)$.
- ▶ On peut écrire l'événement $(X = k)$ en terme des B_i :
 - ▶ Pour que $X = k$, il faut que chacun des B_i , pour $i < k$, soit nulle.
 - ▶ Il faut aussi qu'on ait $B_k = 1$.
 - ▶ Et ça suffit.
 - ▶ Comme les B_i sont indépendantes, la probabilité se calcule facilement
- ▶ Donc, $\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$ (pour tout entier $k > 0$)
- ▶ On calcule $\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - p)^{k-1}p = 1$; donc $\mathbb{P}(X = \infty) = 0$ et on peut considérer X comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Courbes de probabilités géométriques



Lois de Poisson

- ▶ Pas d'interprétation élémentaire.

Lois de Poisson

- ▶ Pas d'interprétation élémentaire.
- ▶ On va définir la loi par ses probabilités :
 - ▶ Les valeurs possibles sont tous les entiers positifs ou nuls ($\mathbb{N}$).
 - ▶ Et on a $\mathbb{P}(X = k) = e^{-x} \frac{x^k}{k!}$, pour $x > 0$ fixé (le “paramètre”).
 - ▶ (Il se trouve que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$, donc pour la loi de Poisson la somme fait bien 1)

Lois de Poisson

- ▶ Pas d'interprétation élémentaire.
- ▶ On va définir la loi par ses probabilités :
 - ▶ Les valeurs possibles sont tous les entiers positifs ou nuls ($\mathbb{N}$).
 - ▶ Et on a $\mathbb{P}(X = k) = e^{-x} \frac{x^k}{k!}$, pour $x > 0$ fixé (le “paramètre”).
 - ▶ (Il se trouve que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$, donc pour la loi de Poisson la somme fait bien 1)
- ▶ La raison pour laquelle cette loi est importante, c'est qu'elle apparaît naturellement comme approximation : si on a un “grand nombre” de variables de Bernoulli indépendantes, toutes de “petit” paramètre, leur somme est “presque” une Poisson de paramètre, la somme des paramètres.

Lois de Poisson

- ▶ Pas d'interprétation élémentaire.
- ▶ On va définir la loi par ses probabilités :
 - ▶ Les valeurs possibles sont tous les entiers positifs ou nuls ($\mathbb{N}$).
 - ▶ Et on a $\mathbb{P}(X = k) = e^{-x} \frac{x^k}{k!}$, pour $x > 0$ fixé (le “paramètre”).
 - ▶ (Il se trouve que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$, donc pour la loi de Poisson la somme fait bien 1)
- ▶ La raison pour laquelle cette loi est importante, c'est qu'elle apparaît naturellement comme approximation : si on a un “grand nombre” de variables de Bernoulli indépendantes, toutes de “petit” paramètre, leur somme est “presque” une Poisson de paramètre, la somme des paramètres.
- ▶ Par exemple, pour n grand, une binomiale de paramètres $(n, c/n)$ est presque une Poisson de paramètre c .

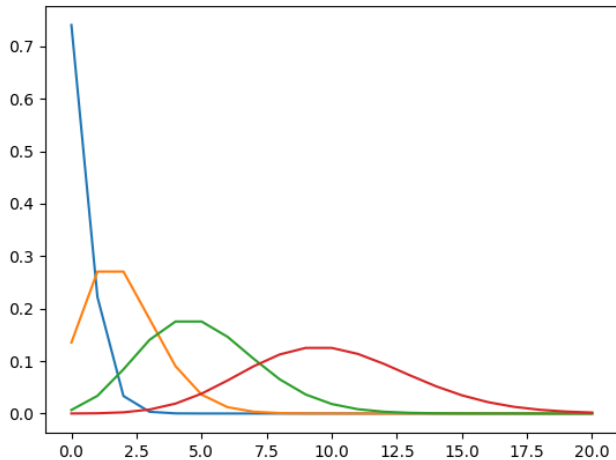
Lois de Poisson

- ▶ Pas d'interprétation élémentaire.
- ▶ On va définir la loi par ses probabilités :
 - ▶ Les valeurs possibles sont tous les entiers positifs ou nuls ($\mathbb{N}$).
 - ▶ Et on a $\mathbb{P}(X = k) = e^{-x} \frac{x^k}{k!}$, pour $x > 0$ fixé (le “paramètre”).
 - ▶ (Il se trouve que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$, donc pour la loi de Poisson la somme fait bien 1)
- ▶ La raison pour laquelle cette loi est importante, c'est qu'elle apparaît naturellement comme approximation : si on a un “grand nombre” de variables de Bernoulli indépendantes, toutes de “petit” paramètre, leur somme est “presque” une Poisson de paramètre, la somme des paramètres.
- ▶ Par exemple, pour n grand, une binomiale de paramètres $(n, c/n)$ est presque une Poisson de paramètre c .
- ▶ Le nombre de clients qui entrent en une minute dans une boutique, le nombre d'accidents d'avion dans une année, le nombre de meurtres au cours d'une unité de temps, peuvent souvent être modélisés par des lois de Poisson

Lois de Poisson

- ▶ Pas d'interprétation élémentaire.
- ▶ On va définir la loi par ses probabilités :
 - ▶ Les valeurs possibles sont tous les entiers positifs ou nuls ($\mathbb{N}$).
 - ▶ Et on a $\mathbb{P}(X = k) = e^{-x} \frac{x^k}{k!}$, pour $x > 0$ fixé (le “paramètre”).
 - ▶ (Il se trouve que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$, donc pour la loi de Poisson la somme fait bien 1)
- ▶ La raison pour laquelle cette loi est importante, c'est qu'elle apparaît naturellement comme approximation : si on a un “grand nombre” de variables de Bernoulli indépendantes, toutes de “petit” paramètre, leur somme est “presque” une Poisson de paramètre, la somme des paramètres.
- ▶ Par exemple, pour n grand, une binomiale de paramètres $(n, c/n)$ est presque une Poisson de paramètre c .
- ▶ Le nombre de clients qui entrent en une minute dans une boutique, le nombre d'accidents d'avion dans une année, le nombre de meurtres au cours d'une unité de temps, peuvent souvent être modélisés par des lois de Poisson
- ▶ **Propriété** : la somme d'une Poisson de paramètre x , et d'une

Courbes de probabilités de Poisson



Notion d'espérance

- L'**espérance** d'une variable aléatoire (à valeurs réelles), quand elle est définie, c'est grosso modo une *moyenne pondérée* (par les probabilités)

Notion d'espérance

- ▶ L'**espérance** d'une variable aléatoire (à valeurs réelles), quand elle est définie, c'est grosso modo une *moyenne pondérée* (par les probabilités)
- ▶ **Définition** : l'espérance d'une variable aléatoire X , prenant les valeurs $v_1, v_2, \dots$ avec probabilités respectives $p_1, p_2, \dots$, c'est par définition

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i v_i \cdot p_i = \sum_{v \in V} v \cdot \mathbb{P}(X = v)$$

(**sous réserve** que la somme ait un sens)

Notion d'espérance

- ▶ L'**espérance** d'une variable aléatoire (à valeurs réelles), quand elle est définie, c'est grosso modo une *moyenne pondérée* (par les probabilités)
- ▶ **Définition** : l'espérance d'une variable aléatoire X , prenant les valeurs $v_1, v_2, \dots$ avec probabilités respectives $p_1, p_2, \dots$, c'est par définition

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i v_i \cdot p_i = \sum_{v \in V} v \cdot \mathbb{P}(X = v)$$

(sous réserve que la somme ait un sens)

- ▶ **Définition équivalente (théorème)** :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{t \in \Omega} X(t) \mathbb{P}(\{t\})$$

(preuve de l'équivalence : au tableau)

Quelques propriétés de l'espérance

- ▶ Si X est une variable aléatoire *positive* ($\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$), alors $\mathbf{E}(X) \geq 0$

Quelques propriétés de l'espérance

- ▶ Si X est une variable aléatoire *positive* ($\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$), alors $\mathbf{E}(X) \geq 0$
- ▶ **Linéarité** : $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$ (**sans condition** sur X et Y , autre que l'existence des espérances) ;

Quelques propriétés de l'espérance

- ▶ Si X est une variable aléatoire *positive* ($\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$), alors $\mathbf{E}(X) \geq 0$
- ▶ **Linéarité** : $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$ (**sans condition** sur X et Y , autre que l'existence des espérances) ;
- ▶ **Linéarité (bis)** : $\mathbf{E}(aX) = a\mathbf{E}(X)$ (pour a constante)

Quelques propriétés de l'espérance

- ▶ Si X est une variable aléatoire *positive* ($\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$), alors $\mathbf{E}(X) \geq 0$
- ▶ **Linéarité** : $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$ (**sans condition** sur X et Y , autre que l'existence des espérances) ;
- ▶ **Linéarité (bis)** : $\mathbf{E}(aX) = a\mathbf{E}(X)$ (pour a constante)
- ▶ **Attention** : en règle générale, il n'y a pas de raison pour que $\mathbf{E}(f(X))$ soit égale à $f(\mathbf{E}(X))$ si f n'est pas une fonction affine.

Quelques propriétés de l'espérance

- ▶ Si X est une variable aléatoire *positive* ($\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$), alors $\mathbf{E}(X) \geq 0$
- ▶ **Linéarité** : $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$ (**sans condition** sur X et Y , autre que l'existence des espérances) ;
- ▶ **Linéarité (bis)** : $\mathbf{E}(aX) = a\mathbf{E}(X)$ (pour a constante)
- ▶ **Attention** : en règle générale, il n'y a pas de raison pour que $\mathbf{E}(f(X))$ soit égale à $f(\mathbf{E}(X))$ si f n'est pas une fonction affine.
- ▶ En particulier, $\mathbf{E}(X^2) > (\mathbf{E}(X))^2$, sauf si X est une variable aléatoire constante.

Quelques propriétés de l'espérance

- ▶ Si X est une variable aléatoire *positive* ($\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$), alors $\mathbf{E}(X) \geq 0$
- ▶ **Linéarité** : $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$ (**sans condition** sur X et Y , autre que l'existence des espérances) ;
- ▶ **Linéarité (bis)** : $\mathbf{E}(aX) = a\mathbf{E}(X)$ (pour a constante)
- ▶ **Attention** : en règle générale, il n'y a pas de raison pour que $\mathbf{E}(f(X))$ soit égale à $f(\mathbf{E}(X))$ si f n'est pas une fonction affine.
- ▶ En particulier, $\mathbf{E}(X^2) > (\mathbf{E}(X))^2$, sauf si X est une variable aléatoire constante.
- ▶ Si X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes**, alors

$$\mathbf{E}(X.Y) = \mathbf{E}(X).\mathbf{E}(Y).$$