

Exercice 1

1/ Le nombre de choix possibles est le nombre d'ensembles de 4 éléments parmi 100,

soit

$$\binom{100}{4} = \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3921225$$

2/ Dans chaque groupe on a 25 choix,
le nombre de choix est donc $25^4 = 390625$

3/ On fait un choix uniforme parmi $\binom{100}{4}$ possibilités, parmi lesquelles 25^4 choix correspondent à un délégué par groupe.
la probabilité est donc

$$\frac{25^4}{\binom{100}{4}} \approx 0,0996 \quad (\text{proche de } 10\%)$$

Exercice 2

$$1/ C_1 = \{(1)\}$$

$$C_2 = \{(1,1), (2)\}$$

$$C_4 = \{(1,1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,3), \\ (2,1,1), (2,2), (3,1), (4)\}$$

$$2/ \text{ On a } c_1=1, c_2=2, c_3=4, c_4=8.$$

On peut penser à la formule : $c_n = 2^{n-1}$

3/a) En première position dans une composition de n , on peut trouver chaque entier de 1 à n .

b) Pour $k=n$, il n'y a que (n) comme compo.

Pour $k < n$, on peut avoir après k , n'importe quelle composition de $(n-k)$ (ainsi la somme fera bien n).

c) On a donc, pour $n \geq 2$:

$$C_n = 1 + C_1 + C_2 + \dots + C_{n-1}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} C_k \quad (*)$$

d) On va prouver que, pour chaque entier $n \geq 1$, on a $C_n = 2^{n-1}$.

Posons P_n l'hypothèse:

"Pour tout entier k , $1 \leq k \leq n$, $C_k = 2^{k-1}$."

- P_1 est vraie: on a bien $C_1 = 1 = 2^0$.

- Soit $n \geq 1$, on montre $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

Pour cela on suppose P_n vraie, et on montre P_{n+1} .

Appliquons la récurrence (*) montrée à la question c):

$$C_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n C_k$$

D'après P_n , chaque C_k dans cette somme vaut 2^{k-1} :

$$C_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1}.$$

On fait un changement de variable:

$$C_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$

La somme est celle d'une suite géométrique de raison 2 et de 1^{er} terme 1:

$$C_{n+1} = 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 1 + 2^n - 1 = 2^n$$

On a bien prouvé P_{n+1} .

Donc, par récurrence, on a $C_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

4/ le plus simple est une fonction
récursive:

```
def compositions(n):
```

```
    if  $n \leq 1$ :
```

```
        return [(1,)]
```

```
    else:
```

```
        L = [(n,)]
```

```
        for k in range(1, n):
```

```
            M = compositions(k)
```

```
            for s in M:
```

```
                L.append((n-k,) + s)
```

```
        return L
```

Exercice 3

1/ Pour choisir le mot YPONOMEUTE
il faut choisir comme première lettre Y,
puis choisir ce mot parmi les 18 qui
commencent par Y: cela se produit
avec probabilité

$$\frac{1}{26} \times \frac{1}{18} = \frac{1}{468} \quad (\text{environ } 2\%)$$

Pour CALLIPYGES (il y a une faute
d'orthographe dans le sujet, c'est

$$\frac{1}{26} \times \frac{1}{2362} = \frac{1}{61412} \quad (0,0016\%)$$

(dans les deux cas: à comparer à $\frac{1}{21209}$
du choix uniforme dans le glossaire)

2/ (on considère Y comme une voyelle)

Il y a 6 voyelles sur 26 lettres,
donc la proba. de choisir une première

lettre qui soit une voyelle est de $\frac{6}{26} = \frac{3}{13}$.
($P(A) = 3/13$)

Il y a 7 lettres avant H, donc la probabilité de choisir une lettre avant H est

$$P(B) = \frac{7}{26}.$$

$A \cap B$ c'est l'événement "le mot choisi commence par A ou E", il a probabilité

$$P(A \cap B) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$$

$\frac{1}{13} \neq \frac{3}{13} \times \frac{7}{26}$ donc A et B ne sont pas indépendants.

3/ Soit D l'événement
"le candidat devine le mot":

l'énoncé nous donne

$$P_A(D) = 0.3 \text{ et } P_{\bar{A}}(D) = 0.8$$

et on a calculé $P(A) = 3/13$ donc $P(\bar{A}) = 10/13$

Par la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P_A(D) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(D) \\ &= \frac{3}{13} \times \frac{3}{10} + \frac{10}{13} \times \frac{8}{10} = \frac{89}{130} \end{aligned}$$

D'après la formule de Bayes:

$$\begin{aligned} P_D(A) &= P_A(D) \times \frac{P(A)}{P(D)} = \frac{3}{10} \times \frac{3/13}{89/130} \\ &= \frac{9}{89} \quad (\text{près de } 10\%) \end{aligned}$$

Exercice 4

1/ L'événement C "Anatole ne gagne pas du 1^{er} coup" correspond au cas où le premier lancer donne Face :
on a donc $P(C) = 1/2$.

2/ Si C se produit, c'est à Philémon de jouer ensuite : les rôles sont alors échangés (Philémon en "premier", Anatole en "second").

On a donc, par symétrie des règles, $P_C(B) = P(A)$ et $P_C(A) = P(B)$

($P(A)$, c'est la proba. qu'à ce jeu, ce soit le premier joueur qui gagne)

3/ Appliquons la formule des probabilités totales à A par rapport à C et $\bar{C}$:

$$P(A) = P(C)P_C(A) + P(\bar{C})P_{\bar{C}}(A)$$

$\bar{C}$ c'est "Anatole gagne du 1^{er} comp" :

$$\bar{C} \subset A \text{ donc } P_{\bar{C}}(A) = 1$$

$$\text{et } P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1/2.$$

En remplaçant $P_C(A)$ par $P(B)$,
soit $1 - P(A)$:

$$P(A) = \frac{1}{2}(1 - P(A)) + \frac{1}{2}.$$

Cette équation d'inconnue $P(A)$
se résout ainsi :

$$\frac{3}{2} P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{donc } \boxed{P(A) = 2/3}$$

(et $P(B) = 1/3$)