

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD10

Espérances, variances

<http://www.labri.fr/perso/duchon/Enseignements/Probas/>

10.1 Applications du cours et compléments

Exercice 10.1

On considère deux variables aléatoires X et Y , dont la loi jointe (loi du couple (X, Y)) est définie par le tableau suivant :

$Y \setminus X$	1	2	3
1	0.2	0.1	0.2
2	0.3	0.15	0.05

1. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer l'espérance de X et celle de Y .
3. Calculer l'espérance de $X + Y$, et de $X - Y$.
4. Calculer la loi de $X + Y$, et sa variance.

Exercice 10.2

Un jeu possible de casino est le suivant : le joueur paie 1 euro pour jouer une partie, et lance trois dés (équilibrés, à 6 faces) ; son gain G est alors déterminé en fonction du nombre N de 6 obtenus sur les trois dés :

- si $N = 0$, il ne gagne rien ($G = 0$) ;
- si $N = 1$ ou $N = 2$, il gagne 2 euros ($G = 2$) ;
- si $N = 3$, il gagne 20 euros ($G = 20$).

1. Déterminer la loi de N , ainsi que celle de G .
2. Déterminer l'espérance de G .
3. Par quelle valeur faudrait-il remplacer le gain lorsque $N = 3$, pour que le jeu devienne "équitable" (au sens où l'espérance de gain serait égale à la mise, soit 1) ?

Exercice 10.3

Espérances des lois usuelles

Les formules pour l'espérance des lois usuelles ont été vues en cours ; l'objectif de cet exercice est de voir comment les formules peuvent être obtenues. On s'autorisera à manipuler les sommes infinies de manière formelle : on peut sortir un terme de la somme, "sortir" un facteur commun, et faire un changement de variable sur l'indice de sommation.

1. **Bernoulli** : calculer, en fonction du paramètre p , l'espérance d'une variable de Bernoulli de paramètre p .

2. **Binomiale** : déduire de la question précédente, une expression simple pour l'espérance d'une variable binomiale de paramètres (n, p) .
3. **Géométrique** : On considère une variable aléatoire géométrique G , de paramètre p ($0 < p < 1$). On note E l'espérance de cette variable aléatoire.
- (a) Écrire, sous la forme d'une somme infinie (qu'il n'est pas encore question de calculer), la formule de l'espérance E pour G .
- (b) En sortant le premier terme de la somme, montrer qu'on a, formellement,

$$E = p + (1 - p) \sum_{k=2}^{\infty} k(1 - p)^{k-2} p.$$

- (c) En faisant un changement de variables (poser $k' = k - 1$) dans la somme infinie, montrer que l'on a

$$E = p + (1 - p)(1 + E)$$

Indication : on a $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1} p = 1$ (pourquoi ?)

- (d) En résolvant l'équation obtenue à la question précédente, déterminer E en fonction de p .
4. **Poisson** : On considère une variable aléatoire P de Poisson de paramètre x ($x > 0$). On note F l'espérance de P .
- (a) Écrire la formule de définition de l'espérance pour P .
- (b) Pourquoi a-t-on $F = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-x) \frac{x^k}{k!}$?
- (c) En manipulant formellement la somme infinie, et en faisant un changement de variable (poser $k' = k - 1$), montrer qu'on a

$$F = x \exp(-x) \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{x^{k'}}{k'!}$$

- (d) Dans la formule précédente, que vaut la somme infinie ? En déduire l'expression de F en fonction de x .

10.2 Exercices plus avancés (modélisation, applications)

Exercice 10.4

Le magasin (Cet exercice prend son sens seulement si vous avez traité les exercices **8.7** (feuille 8) et **9.6** (feuille 9) ; si ce n'est pas le cas, il faut au moins en connaître les conclusions.)

Un magasin ouvre de 10h à 13h, puis de nouveau de 14h à 18h. On modélise le nombre de clients qui entrent au cours d'une heure le matin (entre 10h et 11h ; entre 11h et 12h ; entre 12h et 13h) par une variable de Poisson de paramètre 10, et, pour une heure de l'après-midi, par une variable de Poisson de paramètre 20 ; on considère que ces différentes variables aléatoires sont indépendantes.

On définit les variables aléatoires suivantes : C_M désigne le nombre de clients qui entrent dans la boutique le matin ; C_A , celui des clients qui entrent l'après-midi ; C_T , le nombre total de clients de la journée ; et V_M , V_A , V_T désignent respectivement le nombre de clients qui achètent réellement quelque chose le matin, l'après-midi, ou au cours de la journée.

1. Quelle est la probabilité qu'aucun client n'entre entre 10h et 11h ? Quelle est la probabilité qu'il entre plus de 12 personnes pendant cette même heure ? (la valeur numérique n'est pas essentielle, la question est de trouver une formule qui permettrait de la calculer)
2. Quelle est l'espérance du nombre de clients qui entrent dans la boutique le matin ? l'après-midi ? au cours d'une journée ?
3. En utilisant les résultats obtenus dans les feuilles précédentes sur la loi de Poisson, déterminer la **loi** du nombre de clients C_M qui entrent dans la boutique le matin, celle du nombre C_A de clients de l'après-midi, ainsi que la loi du nombre total C_T de clients de la journée.
4. On estime que chaque client du matin a probabilité 0.3 d'acheter quelque chose ; pour les clients de l'après-midi, la probabilité est de 0.5. On considère que l'acte d'achat, pour chaque client, est indépendant de ceux des autres clients, ainsi que de leur nombre. Quelle est l'espérance du nombre de clients qui achètent quelque chose au cours de la journée ? quelle est la **loi** du nombre de clients qui achètent quelque chose ?
5. On note N le nombre total de clients qui entrent dans la boutique au cours de la journée, mais qui n'achètent rien. Quelle est la loi de N ? Son espérance ? Quelle relation y a-t-il entre N et V_T ?

Exercice 10.5

Le jeu "Tapis vert" était un jeu télévisé de la Française des Jeux : le joueur choisissait, sur une grille, une carte de chaque couleur (Pique, Coeur, Carreau, Trèfle) d'un jeu de 32 cartes ; puis, lors d'un tirage aléatoire télévisé quotidien, une carte de chaque couleur était tirée, et le gain de chaque joueur était déterminé de la manière suivante : un joueur ayant trouvé 2 des 4 cartes gagnait 2 fois sa mise ; un joueur ayant trouvé 3 des 4 cartes, gagnait 30 fois sa mise ; et un joueur ayant trouvé les 4 cartes, gagnait 1000 fois sa mise.

1. Quelle est la loi du nombre de cartes devinées par un joueur donné ? Cette loi dépend-elle de son choix de combinaison ?
2. Déterminer, pour une mise de 1 franc (on parle des années 1980-90!), l'espérance de gain du joueur. Le jeu, tel qu'il est défini, est-il plutôt favorable au joueur, ou à l'organisateur du jeu ?
3. Quelle est la probabilité qu'un tirage donné donne une combinaison donnée ? Qu'une combinaison donnée sorte au moins une fois en N tirages ?
4. Il se trouve qu'après environ deux ans d'existence du jeu, une combinaison "carré d'As" est sortie, coûtant une fortune à la Française des Jeux. Commenter cette situation : où se trouve l'erreur de conception dans ce jeu (du point de vue de l'organisateur) ?

Exercice 10.6

La compagnie aérienne

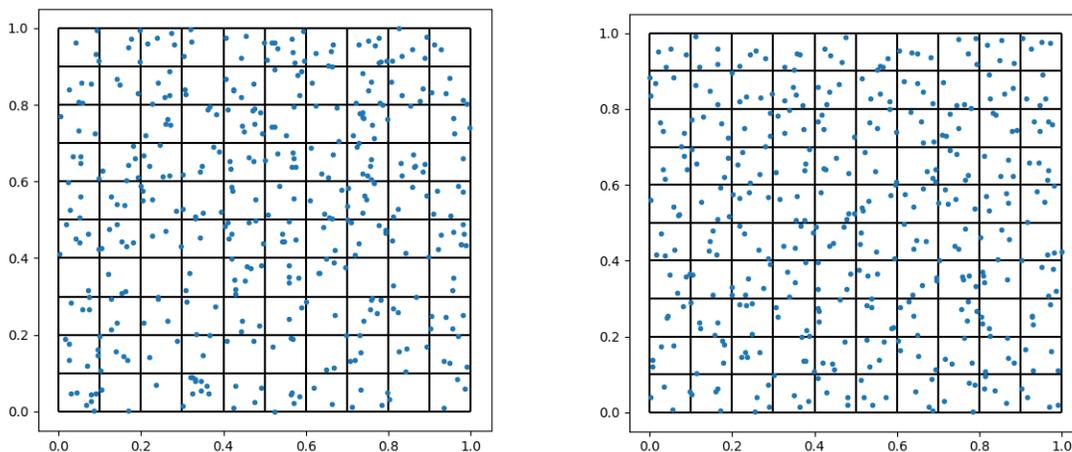
Une compagnie aérienne vend des réservations pour un avion qui dispose de 100 places. Le prix normal d'une place est de 100 euros (on s'intéresse à un modèle simplifié, où le prix de la place est fixe).

La compagnie a constaté qu'en moyenne, environ 5% des passagers ne se présentent pas à l'embarquement – ces passagers ne sont pas remboursés.

1. Proposer une loi de probabilités pour le nombre de places vides dans l'avion, en supposant que la compagnie vend effectivement 100 places. Quelle est l'espérance de ce nombre de places vides ?
2. La compagnie pratique la **surréservation** : elle vend un nombre $N > 100$ de places, sans prévenir ses clients. Si le nombre de passagers qui se présentent est de 100 ou moins, "tout va bien" ; si le nombre de passagers qui se présentent est supérieur à 100, un nombre de passagers correspondant au surplus se voit offrir un dédommagement, sous la forme d'un remboursement de 200 euros (soit le double du prix payé initialement).
En fonction de N qui est à considérer comme un paramètre (fixe, choisi par la compagnie), quelle est la loi du nombre A de passagers qui ne se présentent pas ? En fonction de A , quel le nombre de passagers à rembourser ?
3. Calculer numériquement (au besoin, en faisant des approximations justifiables) l'espérance du nombre de passagers à rembourser, pour $N = 104$, $N = 105$, $N = 106$. Quelle valeur de N semble, en moyenne, la plus rentable pour la compagnie ? Pour cette valeur, quelle est la probabilité qu'au moins un client qui se présente n'ait pas de place dans l'avion ?

Exercice 10.7

Points aléatoires



Les images ci-dessus montrent deux ensembles de 400 points pris aléatoirement dans le carré unité (l'ensemble des points du plan dont les deux coordonnées sont comprises entre 0 et 1). L'un des deux ensembles a été généré "honnêtement", en tirant 400 points indépendamment les uns des autres, chacun uniformément dans le carré ; l'autre a été généré de manière "malhonnête", selon un procédé secret (mais qui change la loi : le procédé est malhonnête). On a rajouté au dessin une grille qui divise le carré en 100 carrés plus petits, de même aire $1/100$.

Un "point aléatoire uniforme dans le carré" est un objet qui ne rentre pas *stricto sensu* dans le cadre du cours, car l'ensemble des possibilités n'est pas dénombrable ; cela correspond à un tirage dans lequel la probabilité que le point se trouve dans une certaine zone (incluse dans le carré) d'aire a , est égale à a – pour chaque petite zone envisageable.

1. Dans le modèle “honnête”, quelle est la loi du nombre de points qui tombent dans un petit carré donné? Quelle est son espérance?
2. Toujours dans le modèle “honnête”, quelle est la probabilité qu’un petit carré ne reçoive aucun point? Quelle est l’espérance du nombre de petits carrés “vides” de la sorte, parmi les 100 petits carrés qui subdivisent le carré unité?
3. Toujours dans le modèle “honnête”, quelle est la probabilité qu’un petit carré reçoive exactement un point? Quelle est l’espérance du nombre de petits carrés qui reçoivent exactement un point?
4. Essayez de deviner quelle figure montre l’ensemble “honnête” de points, et laquelle montre l’ensemble “trafiqué”.
5. (**question plus avancée**) Si l’on remplace le “modèle honnête” par un autre, où on commence par tirer le nombre de points aléatoirement selon la loi de Poisson de paramètre 400, avant de tirer indépendamment ce nombre de points uniformes, quelle est la **loi** du nombre de petits carrés vides? la loi du nombre de petits carrés recevant exactement un point? Quelle est la probabilité qu’on n’observe aucun carré vide? aucun carré recevant exactement un point? (ce n’est pas ce modèle qui a été utilisé pour obtenir le dessin “trafiqué”; les deux ensembles ont bien 400 points chacun)