

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD2

Combinatoire : pavages

Exercice 2.1

Compositions d'entiers

On convient d'appeler *composition de l'entier* $n \geq 0$, toute suite (de longueur quelconque) d'entiers strictement positifs telle que la somme de tous les éléments de la suite soit égale à n . Ainsi, $(5, 7, 2, 1, 2)$ est une composition de l'entier 17, et $(2, 2, 1, 7, 5)$ en est une autre.

1. On considère l'ensemble C de toutes les compositions, avec comme fonction taille, la somme des éléments (l'entier dont la séquence est une composition). Expliquer pourquoi il s'agit bien d'une classe combinatoire.
2. Écrire toutes les compositions de 1, de 2, de 3, et de 4. Quels sont les premiers termes de la suite de comptage?
3. Proposer une formule décrivant le nombre de compositions de n comme une fonction de n .
4. Nous allons chercher une preuve bijective de l'affirmation suivante : *pour tout entier $n \geq 2$, il y a exactement deux fois plus de compositions de n que de compositions de $n - 1$.*
 - a On note C_n l'ensemble des compositions de l'entier n , D_n l'ensemble des compositions de l'entier n dont le premier élément vaut 1, et E_n l'ensemble des compositions de l'entier n dont le premier élément est strictement supérieur à 1.
Écrire des relations (au moyen d'opérations ensemblistes) entre C_n , D_n et E_n . En déduire une relation entre leurs cardinaux respectifs c_n , d_n et e_n .
 - b Pour un entier $n \geq 2$, montrer que l'on a $d_n = c_{n-1}$. **Indication** : décrire une transformation systématique permettant de passer d'un élément de D_n à un élément de C_{n-1} , et montrer que votre transformation est une *bijection*.
 - c Faire de même pour prouver $e_n = c_{n-1}$.
 - d En déduire que l'on a, pour tout $n \geq 2$, $c_n = 2c_{n-1}$. En déduire une formule exprimant c_n comme une fonction de n (dont on espère que c'est la même que la formule proposée plus tôt).
5. **Question bonus** : chercher une preuve combinatoire directe de la formule : partant d'une famille d'objets dont vous savez déjà qu'elle a la bonne suite de comptage, décrire une bijection entre les objets de taille n de cette famille et les compositions de l'entier n .

Exercice 2.2

Pavages par dominos d'une bande

On considère dans cet exercice des "formes", qui sont des parties (finies) d'une grille potentiellement infinie, et on se pose la question générale suivante : pour une forme donnée, de combien de façons différentes peut-on la remplir entièrement par des "dominos", *i.e.* des

rectangles de 2 cases, placés soit verticalement, soit horizontalement, sans que deux rectangles se chevauchent. Un tel remplissage est appelé un *pavage*.

En toute généralité (pour des “formes” quelconques), le problème est difficile ; on va se cantonner au cas où la “forme” est un rectangle de largeur n et de hauteur h , pour de petites valeurs de h .

On notera, pour une forme C , $p(C)$ son nombre de pavages. Le rectangle de hauteur h et de largeur n sera noté $h \times n$.

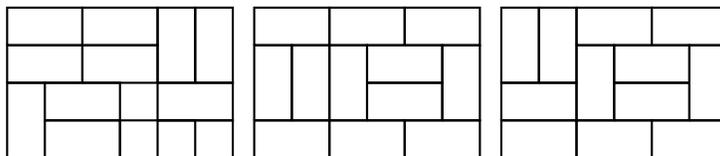


FIGURE 2.1 – Trois pavages de 4×6

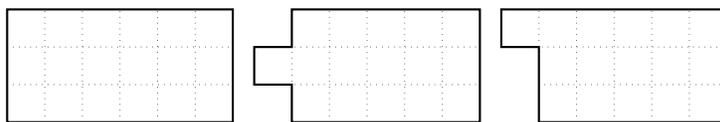


FIGURE 2.2 – $B_{6,\emptyset}$, $B_{6,\{1,3\}}$, et $B_{6,\{2,3\}}$

1. **Cas $h = 1$:** donner une formule pour le nombre de pavages du rectangle $1 \times n$, de hauteur 1 et de largeur n (on peut distinguer deux cas, selon la parité de n)
2. **Cas $h = 2$:** dessiner tous les pavages d’un rectangle 2×3 (il y en a 3), et d’un rectangle 2×4 .
3. On note p_n^2 , le nombre de pavages d’un rectangle $2 \times n$. En considérant la façon dont les deux carrés de la première colonne sont recouverts, donner une **relation de récurrence** pour la suite $(p_n^2)_{n \geq 0}$. Votre relation devrait permettre de calculer p_n^2 en fonction des termes précédents $p_0^2, p_1^2, \dots, p_{n-1}^2$, au moins pour des valeurs “assez grandes” de n . Calculer p_n^2 pour n jusqu’à 11.
4. Utiliser un argument combinatoire pour répondre à la question suivante sans dessiner l’intégralité des cas : parmi les p_{11}^2 pavages du rectangle 2×11 , quelle est la proportion de ceux dont les deux carrés de la 6-ème colonne (colonne centrale) sont recouverts par un domino vertical ?
5. Généraliser : pour $1 \leq k \leq n$, quelle proportion des p_n^2 pavages du rectangle $2 \times n$ ont leur k -ème colonne couverte par un domino vertical ?
6. **Plus compliqué :** cas $h = 3$. On note p_n^3 , le nombre de pavages par dominos d’un rectangle $3 \times n$.
Expliquer pourquoi on a forcément $p_n^3 = 0$ si n est impair, et pourquoi $p_n^3 > 0$ si n est pair (et positif).
7. Vous savez déjà combien vaut p_2^3 ; déterminer p_4^3 et dessiner tous les pavages correspondants.
8. Montrer que l’on a $p_{2n}^3 \geq 2^n$.

9. Afin de trouver un moyen de calculer p_n^3 pour de grandes valeurs de n , sans dessiner un à un tous les pavages (on sait que leur nombre croît rapidement), on considère des formes proches des rectangles $3 \times n$: pour $I \subset [[1, 3]]$, on note $B_{n,I}$ la forme obtenue en retirant du rectangle $3 \times n$, les cellules de la première colonne dont les lignes (numérotées de haut en bas, par exemple) sont les éléments de I .
Dessiner $B_{4,\emptyset}$, $B_{4,\{1\}}$, $B_{4,\{1,2\}}$, $B_{4,\{1,3\}}$. À quoi ressemble $B_{n,\{1,2,3\}}$?
10. Expliquer pourquoi, si $n + \#I$ est impair, alors $p(B_{n,I}) = 0$.
11. Expliquer pourquoi on a, pour tout n , $p(B_{n,\{1,3\}}) = p(B_{n,\{2\}}) = 0$.
12. Montrer que, pour $n \geq 2$, on a $p_n^3 = p_{n-2}^3 + 2p(B_{n-1,\{1\}})$ **Indication** : raisonner sur le domino qui couvre la deuxième case de la première colonne : quelle autre case couvre-t-il ? une fois fixé ce premier domino, existe-t-il d'autres dominos obligatoires ?
13. De même, montrer qu'on a, pour $n \geq 2$, $p(B_{n,\{1\}}) = p_{n-1}^3 + p(B_{n-1,\{2,3\}})$.
14. Déterminer p_n^3 jusqu'à $n = 15$.