

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD4

Combinatoire : bijections sur chemins et arbres

<http://www.labri.fr/perso/duchon/Enseignements/Probas/>

Tous les arbres binaires considérés sont des arbres binaires complets, non vides ; les mots sont toujours des mots binaires, sur l'alphabet $\{a, b\}$.

Le codage d'un arbre par un mot de Dyck est celui de la feuille précédente ; vous pouvez utiliser, même si cela n'a pas été prouvé, le fait que c'est le même codage que l'on obtient en parcourant les nœuds de l'arbre en ordre **préfixe** (sauf le dernier nœud, qui est forcément une feuille car l'arbre est complet), et en notant un a pour les nœuds internes et un b pour les feuilles.

4.1 Définitions du cours et révisions

Les exercices de cette section ont pour but de faire pratiquer les définitions et leur application. Ils ne sont censés présenter aucune difficulté si les définitions sont connues.

Exercice 4.1

Vous avez vu en cours une bijection Φ , pour chaque entier $n \geq 0$, entre :

- l'ensemble des mots équilibrés de longueur $2n$, d'une part ;
- l'ensemble des couples (w, k) formés d'un mot de Dyck w de longueur $2n$, et d'un entier k compris entre 1 et $n + 1$, d'autre part (ou, de manière équivalente : l'ensemble des mots de la forme $w' = w.b$ où w est un mot de Dyck de longueur $2n$, avec une des $n + 1$ occurrences de b "distinguée").

Pour cet exercice, organisez-vous en binômes. Chacun choisit, sans le montrer à son partenaire, un mot équilibré (d'une longueur d'au moins 16), calcule le résultat de Φ sur le mot choisi, et donne ce résultat (seul) à son partenaire. Celui-ci doit alors appliquer Φ^{-1} et, si chacun a bien fait son travail, retrouver le mot initialement choisi par le partenaire.

- si chacun a bien réussi à trouver le mot de départ de son partenaire, il est plausible que les deux participants aient fait un calcul correct (combien y a-t-il de mots équilibrés de longueur 16 ? quelles sont les chances que chacun tombe juste "par hasard" ?)
- si l'un ou l'autre des résultats n'est pas le bon, c'est qu'un au moins s'est trompé : refaites les raisonnements ensemble jusqu'à être d'accord.

Exercice 4.2

Vous avez également vu en cours la **bijection de Rémy**, qui permet de passer bijectivement d'un couple formé d'un arbre binaire complet à n nœuds internes avec un nœud marqué (quelconque : interne ou feuille) et d'un choix parmi {Gauche, Droite}, à un arbre binaire complet à $n + 1$ nœuds internes avec une feuille marquée.

Procédez comme à l'exercice précédent : chacun choisit un arbre binaire à au moins 8 nœuds internes, un de ses nœuds et une direction, calcule l'arbre à feuille marquée résultat, et transmet uniquement ce résultat au partenaire ; le partenaire doit alors retrouver l'arbre marqué et la direction de départ.

4.2 Compléments du cours

Les exercices de cette section sont l'occasion de refaire une partie des calculs vus en cours à l'identique, ou d'en faire d'autres selon le même principe.

Exercice 4.3

Parmi les mots équilibrés de longueur $2n$, il y a les mots de Dyck. Qu'obtient-on si on applique la bijection Φ (dans le sens mots équilibrés vers mots de Dyck) à un mot de Dyck ?

Exercice 4.4

Parmi les arbres binaires de taille $n + 1$, avec une feuille marquée, que l'on peut obtenir en appliquant la bijection de Rémy, il y a les *peignes droits* ; un peigne de taille $n + 1$ ayant $n + 2$ feuilles, identifier les $n + 2$ façons d'obtenir le peigne droit de taille $n + 1$ via la bijection de Rémy (*i.e.* les $n + 2$ couples de départ, formés chacun d'un arbre de taille n avec un nœud marqué et d'une direction).

Exercice 4.5

Un mot de Dyck non vide commence forcément par la lettre a , et après un certain nombre de a , il y aura forcément un b (pourquoi?). Appelons *longueur de la première montée* d'un mot de Dyck w , le nombre de a consécutifs qui précèdent le premier b dans le mot w . Par exemple, la longueur de la première montée du mot *aaababbabbabaabb* est 3.

1. En calculant, pour divers exemples de mots de Dyck, à chaque fois l'arbre binaire codé par le mot, essayez de proposer une *interprétation* : comment peut-on "lire" sur un arbre, sans calculer son mot de codage, la longueur de la première montée de son mot de codage ? (si vous pouvez prouver votre interprétation, c'est mieux, mais ce n'est pas indispensable)
2. Inversement : la *taille* (nombre de nœuds internes) du sous-arbre gauche d'un arbre, peut être "lue" sur le mot qui code cet arbre. Expliquez (sans preuve, mais en essayant d'être convaincant) quel paramètre calculé directement sur le mot de Dyck correspond à la taille du sous-arbre gauche.
3. Un autre exemple de paramètre qu'on peut calculer sur un mot (ou un chemin) de Dyck est le *nombre de retours à 0* : le nombre de points du chemin (en comptant le point d'arrivée, mais pas celui de départ : donc ce nombre vaut au moins 1) qui se trouvent sur l'axe horizontal. Là encore, proposer une interprétation de ce paramètre sur l'arbre binaire correspondant.

4.3 Exercices et problèmes

Les exercices de cette section sont prévus pour demander plus de réflexion et d'effort.

Exercice 4.6

Chemins et coefficients binomiaux

Les rues d'une ville (rigoureusement planifiée) sont organisées selon un quadrillage : les rues vont d'ouest en est, les avenues du sud au nord, et la distance entre deux rues ou avenues consécutives est fixée à 100 mètres.

1. Si l'on veut aller du croisement de la x -ème rue avec la y -ème avenue (point de coordonnées (x, y)), au croisement de la x' -ème rue avec la y' -ème avenue (coordonnées

(x', y')), quelle est la distance minimale à parcourir ? (on ne peut pas “couper” à travers les bâtiments!) Cette distance est parfois appelée *distance de Manhattan*.

2. On se trouve au carrefour $(0, 0)$, et on souhaite aller au carrefour (a, b) (avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$). Combien de chemins différents sont possibles, si l'on s'en tient aux chemins de longueur minimale ? (On veut une formule exprimant la réponse en fonction de a et de b) **Indication** : combien de “blocs” va-t-on devoir parcourir d'ouest en est ? combien du sud au nord ? penser au codage des chemins par des mots sur un alphabet à 2 lettres.

3. Entre la 4ème et la 5ème rues se trouve une rivière ; les passages (Nord-Sud) entre les deux sont en fait des ponts, chacun numéroté par le numéro de l'avenue sur laquelle il se trouve.

Pour aller du carrefour $(0, 0)$ au carrefour $(10, 10)$, toujours par un chemin de longueur minimale, il va falloir traverser (une seule fois : pourquoi ?) la rivière. En décomposant les chemins (combien de chemins possibles avant le pont ? combien après le pont ?), déterminer le nombre de chemins qui empruntent le pont numéro 0 ; le nombre de chemins qui empruntent le pont numéro 1 ; etc.

4. Généraliser la question précédente au cas où la rivière se trouve entre les rues k et $k + 1$, et où l'on souhaite aller du carrefour $(0, 0)$ au carrefour (a, b) (on suppose $k \geq 0$, $a \geq 0$, $b > 0$: le point de départ se trouve au sud de la rivière, le point d'arrivée se trouve au nord).
5. Les réponses attendues aux questions précédentes montrent qu'il existe une identité exprimant le coefficient binomial $\binom{a+b}{a}$ comme une somme de produits de coefficients binomiaux plus petits ; écrire une telle identité.
6. (Plus difficile) Dans le même esprit, chercher une preuve sans calculs de l'identité suivante : pour $n > 0$,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

(Il est bon de se souvenir que l'on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.)