

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD5

Manipulation d'ensembles ; vocabulaire des probabilités
<http://www.labri.fr/perso/duchon/Enseignements/Probas>

5.1 Définitions du cours et révisions

Exercice 5.1

On suppose qu'un univers de probabilités Ω est choisi, ainsi qu'une fonction de probabilités \mathbb{P} sur Ω ; et que A et B sont deux parties, *a priori* quelconques, de Ω .

1. Donner et prouver une formule exprimant $\mathbb{P}(B \setminus A)$ en fonction de $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$. Comment se simplifie cette formule si on suppose $A \subset B$? Et si $B = \Omega$?
2. Donner, et prouver, une formule exprimant $\mathbb{P}(A \cup B)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
3. Comparer vos formules à celles permettant d'exprimer les *cardinaux* des mêmes ensembles (quand les ensembles sont supposés finis).

Les formules obtenues dans cet exercice, sont des formules essentielles, qu'il est important de connaître et de savoir appliquer.

Exercice 5.2

On suppose qu'on dispose d'un univers de probabilités Ω , sur lequel sont définis des événements A , B et C . Exprimer, au moyen d'unions, d'intersections, et d'exclusions (\setminus), les événements suivants ; puis, si possible, exprimer ces mêmes événements comme *unions disjointes* (unions d'ensembles qui sont garantis être deux à deux disjoints). On pourra aussi utiliser la notation \bar{A} pour le complémentaire de A , *i.e.* $\Omega \setminus A$.

1. D : A et B se produisent.
2. E : A se produit, mais pas B .
3. F : A et B se produisent, mais pas C .
4. G : Au moins deux événements parmi A , B et C se produisent.
5. H : Exactement un des trois événements A , B , C se produit.

Pour chacun de ces événements, exprimer sa probabilité en fonction des probabilités des trois événements A , B et C , et de leurs intersections (deux à deux ou trois à trois, si besoin).

5.2 Applications du cours

Exercice 5.3

Comme précédemment, on suppose donné un univers, et définie une famille infinie $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'événements. Exprimer, au moyen d'unions, intersections (possiblement infinies), et exclusions, les événements suivants :

1. B : au moins un des événements A_i se produit.
2. C : tous les événements A_i se produisent.
3. D_n : au moins un des événements A_i , pour $i \geq n$, se produit.
4. E_n : tous les événements A_i , pour $i \geq n$, se produisent.
5. F : une infinité d'événements A_i se produisent (**Indication** : Reformuler la condition qui définit F , en utilisant la propriété suivante : “il existe une infinité d'entiers n tels que la propriété $P(n)$ soit vraie”, c'est équivalent à : “pour tout entier n , il existe au moins un entier m tel que $m \geq n$ et que $P(m)$ soit vraie”.

Exercice 5.4

Dans cet exercice, on demande de définir pour diverses expériences, des univers de probabilités appropriés. À chaque fois, cela veut dire décrire à la fois l'univers Ω , et la fonction de probabilités correspondante. La réponse n'est pas unique.

1. On tire avec une pièce non-biaisée, une fois, à pile ou face. Décrire un univers de probabilités (Ω_1, \mathbb{P}) approprié pour ce problème.
2. On tire la même pièce deux fois à pile ou face. Décrire un univers de probabilités Ω_2 approprié.
3. Que vaut l'ensemble $\text{Parties}(\Omega_1)$? Combien $\text{Parties}(\Omega_2)$ a-t-il d'éléments?
4. Dans Ω_2 , comment décrire de façon ensembliste l'événement E_1 : “on a tiré Pile la première fois”? Quelle est la probabilité de cet événement? (Rappelez-vous qu'un événement est défini comme un élément de $\text{Parties}(\Omega_2)$)
5. Toujours dans Ω_2 , comment décrire de façon ensembliste l'événement E_2 “on a tiré Pile au moins une fois”? Quelle est la probabilité de cet événement?
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire la même pièce à pile ou face n fois. Décrire un univers Ω_n approprié (comme un produit cartésien d'ensembles); décrire également la fonction de probabilités.
7. Dans Ω_n , écrire de façon ensembliste l'événement F : “pile n'a pas été obtenu lors des 2 premiers lancers”.
8. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Toujours dans Ω_n , décrire l'événement G_i : “le résultat du i -ième lancer est pile”.
9. Écrire à l'aide des événements G_i , l'événement F .
10. Écrire à l'aide des événements G_i , l'événement H : “la pièce est tombée au moins une fois sur pile”.
11. Écrire à l'aide des ensembles G_i , l'événement J : “la pièce est tombée au moins deux fois sur pile”.

Loi de probabilités uniforme : si Ω est un ensemble **fini**, on appelle “loi de probabilités uniforme sur Ω ” la fonction de probabilité qui, à chaque partie A de Ω , accorde la probabilité $\#A/\#\Omega$. Cela correspond au choix aléatoire d'un élément de Ω , de telle sorte que chaque élément ait la même “chance” d'être choisi. L'exercice 5.6 propose, entre autres choses, de montrer que c'est bien défini. Dans l'exercice suivant, vous allez seulement appliquer la notion sur des exemples.

Exercice 5.5

1. Rappeler la formule donnant, en fonction de n , le nombre de mots de longueur n sur l'alphabet $\{a, b\}$; et la formule donnant, en fonction de n , le nombre de mots *équilibrés*, de longueur $2n$ sur le même alphabet.
2. On modélise ainsi l'expérience consistant à choisir aléatoirement un mot de longueur $2n$ sur l'alphabet $\{a, b\}$, de telle sorte que chaque mot ait la même probabilité d'être choisi : l'univers est $\Omega = \{a, b\}^{2n}$, et la fonction de probabilités est la loi uniforme sur Ω .
Dans cet univers, comment peut-on décrire l'événement "le mot choisi commence par ab " ? Quel est son cardinal ? Quelle est sa probabilité ? (le dernier résultat, au moins, ne devrait pas vous surprendre)
3. Dans cet univers, comment peut-on décrire l'événement "le mot choisi est équilibré" ? Quelle est sa probabilité ?
4. Toujours dans le même univers, quelle est, en fonction de k et n , la probabilité de l'événement "le mot choisi contient exactement k fois la lettre a " ? De l'événement "le mot choisi contient au moins 2 fois la lettre a " ? (essayez d'exprimer le résultat de la manière la plus simple possible)
5. On modélise maintenant l'expérience consistant à choisir aléatoirement un mot équilibré de longueur $2n$, de telle sorte que chaque mot ait la même probabilité d'être choisi. On prend comme univers Ω , l'ensemble de tous les mots équilibrés de longueur $2n$, avec comme fonction de probabilités, la loi uniforme.
Quelle est alors la probabilité de l'événement "le mot choisi est un mot de Dyck" ?

5.3 Exercices plus avancés

Exercice 5.6

Dans cet exercice, Ω est un ensemble *fini*. On notera n son cardinal.

1. Soit $f : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : pour toute partie A de Ω , $f(A) = \#A/n$.
Montrer que f est une fonction de probabilités (au lieu de la condition de sigma-additivité, on pourra se contenter de vérifier l'additivité). Cette probabilité porte le nom de **loi de probabilité uniforme sur Ω** .
2. Soit \mathbb{P} une fonction de probabilité quelconque sur Ω . Pour tout élément x de Ω , on définit son "poids" $p(x)$ de la manière suivante : $p(x) = \mathbb{P}(\{x\})$.
Montrer qu'on peut retrouver, pour toute partie A de Ω , sa probabilité à partir de la donnée des poids $(p(x))_{x \in \Omega}$.
3. Inversement, soit q une fonction définie sur Ω , à valeurs positives ou nulles (pour tout $x \in \Omega$, $q(x) \geq 0$). **Attention**, on ne suppose pas que l'on a $\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$. Montrer qu'il existe une et une seule fonction de probabilités \mathbb{P} sur Ω telle que $\mathbb{P}(\{x\})$ soit proportionnel à $q(x)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que, pour tout $x \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{x\}) = C.q(x)$. Comment s'exprime C ?
4. Quel choix simple de poids, redonne la probabilité uniforme ?

Il est fréquent de définir une fonction de probabilité de cette manière : en définissant seulement la probabilité des singletons, ou même en ne définissant que des poids pour les éléments, sans que la somme des poids soit égale à 1. La même construction peut même être utilisée pour définir une fonction de probabilité sur un ensemble dénombrable, à condition que la série des poids soit convergente.