

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD6

Probabilités, indépendance, espaces produits
<http://www.labri.fr/perso/duchon/Probas/>

6.1 Définitions du cours et révisions

Exercice 6.1

On lance quatre fois une pièce équilibrée ; on modélise cette expérience par l'ensemble $\{P, F\} \times \{P, F\} \times \{P, F\} \times \{P, F\}$, muni de la loi uniforme.

Pour chacun des événements suivants, décrire tous ses éléments et calculer sa probabilité :

- A : on obtient pile aux trois premiers lancers.
- B : le dernier lancer donne face.
- C : on obtient pile au moins trois fois.

Calculer également $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(B \cap C)$.

Exercice 6.2

On lance deux dés équilibrés, un blanc et un rouge. On modélise cette expérience par l'ensemble $[[1, 6]] \times [[1, 6]]$, muni de la loi de probabilités uniforme, qu'on notera \mathbb{P} ; l'événement élémentaire (a, b) représente le résultat où le dé blanc donne a , et le dé rouge, b .

On considère les événements suivants :

- A : le dé blanc donne 1.
- B : "double", les deux dés donnent le même résultat
- C : le dé rouge donne un résultat pair.
- D : la somme des résultats des deux dés est 6.
- E : la somme des résultats des deux dés est 7.

1. Écrire chaque événement en donnant tous ses éléments. Calculer sa probabilité.
2. Pour chaque choix possible de deux des quatre événements précédents, écrire leur intersection en donnant tous ses éléments. Calculer la probabilité de chaque intersection.
3. Parmi les événements, lesquels sont indépendants deux à deux ?
4. Sur le même espace de probabilités, décrire trois événements X , Y et Z , dont aucun ne doit avoir probabilité 1 ou 0, et qui soient *globalement* indépendants. Est-ce que la même chose est possible avec 4 événements ?

6.2 Applications du cours

Exercice 6.3

Dans un espace de probabilité (Ω, \mathbb{P}) , on considère trois événements A , B , C . Pour chaque événement E , on note \bar{E} l'événement complémentaire, *i.e.* $\bar{E} = \Omega \setminus E$.

1. On suppose que A et B sont indépendants. Que peut-on en déduire sur la probabilité de $A \cap \overline{B}$? De $\overline{A} \cap \overline{B}$?
2. On dira qu'un événement E "favorise" un événement F , si on a $\mathbb{P}(E \cap F) > \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)$, et qu'un événement E "défavorise" un événement F , si on a $\mathbb{P}(E \cap F) < \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)$.
On suppose que A favorise C . Qu'en est-il alors de \overline{A} et C ? De \overline{A} et \overline{C} ?

Exercice 6.4

Sur une population de 100 individus, 15 sont gauchers, les autres sont droitiers. Parmi les 15 gauchers, 6 sont bruns, les autres étant roux ; parmi les droitiers, 51 sont roux, les autres étant bruns. On souhaite modéliser l'expérience consistant à sélectionner un individu au hasard et à ne s'intéresser qu'à sa couleur de cheveux et à sa main de prédilection.

Une façon de faire consiste à prendre comme univers un ensemble Ω_1 à 100 éléments (par exemple, $[[1, 100]]$), en attribuant un numéro à chaque individu (en ayant convenu de "qui" sont les roux, les bruns, les gauchers), et à munir cet ensemble de la loi uniforme.

Une autre façon de faire consiste à ne prendre comme univers qu'un ensemble Ω_2 à 4 éléments, $\{g, d\} \times \{b, r\}$; par exemple, le couple (g, r) représente l'ensemble des choix d'un individu gaucher et roux.

1. Sur Ω_2 , quels choix de poids pour les différents éléments correspondent à l'expérience décrite par Ω_1 avec loi uniforme ?
2. Dans les deux choix de modélisation, quelle est la probabilité de l'événement A "la personne interrogée est un droitier brun" ? de l'événement "la personne interrogée est gauchère ou rousse" ? Les événements G "la personne interrogée est gauchère" et R "la personne interrogée est rousse" sont-ils indépendants ?
3. Que représente l'événement \overline{G} ? Quelle est sa probabilité ?
4. On suppose que l'on a défini la loi de probabilité sur l'univers en attribuant un poids $p(x)$ à chaque élément $x \in \Omega$ (le même pour chaque élément, dans Ω_1 ; ceux calculés précédemment, dans Ω_2).

Pour un événement E quelconque (mais de probabilité non nulle), on définit une nouvelle loi de probabilité sur le même univers, que l'on note \mathbb{P}_E , en définissant pour chaque élément un nouveau poids $p'(x) : p'(x) = p(x)$ si $x \in E$, et $p'(x) = 0$ si $x \notin E$.

Attention : la somme des poids n'est possiblement plus 1.

Calculer la somme des nouveaux poids, $\sum_{x \in \Omega} p'(x)$ (découper en deux sous-sommes : la somme pour $x \in E$ et la somme pour $x \notin E$). Pour un événement quelconque F , comment s'exprime $\mathbb{P}_E(F)$ (en fonction de $\mathbb{P}(X)$ pour des événements X à choisir).

5. Calculer $\mathbb{P}_G(G)$, $\mathbb{P}_G(\overline{G})$, $\mathbb{P}_G(R)$. Que constatez-vous ?

La fonction de probabilités \mathbb{P}_E définie dans l'exercice précédent correspond à la notion de probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}_E(F)$ est la probabilité de F "sachant E ", parfois aussi notée $\mathbb{P}(F|E)$.

Exercice 6.5

On dispose de trois jetons, indistinguables au touchers :

- Le jeton A a une face 1 qui est blanche, et une face 2 qui est noire ;
- le jeton B a ses deux faces blanches ;
- le jeton C a ses deux faces noires.

On tire un des trois jetons au hasard (uniforme), et on le pose sur la table, d'un côté au hasard (uniforme).

Essayez de répondre aux questions ci-dessous, d'abord **sans** définir un espace de probabilités, **puis** en commençant par définir un espace de probabilités.

1. Quelle est la probabilité que la face visible soit blanche? noire?
2. Quelle est la probabilité que la face cachée soit d'une couleur différente de la face visible ?
3. Quelle est la probabilité que la face cachée soit noire **si l'on suppose que** la face visible est noire ?

6.3 Exercices plus avancés

Exercice 6.6

Arbres binaires aléatoires

On se fixe un entier $n > 0$, potentiellement quelconque. On considère trois façons différentes d'obtenir un arbre binaire complet à n nœuds internes, "aléatoire" :

- **Méthode 1** : on choisit un arbre binaire complet de taille n , selon la loi uniforme.
- **Méthode 2** : on choisit un mot équilibré de longueur $2n$, selon la loi uniforme ; on lui applique la bijection vue en cours vers les mots de Dyck (et on oublie le marquage) ; puis, au mot de Dyck obtenu, on applique le décodage vu en cours pour obtenir un arbre binaire complet.
- **Méthode 3** : on insère, dans un ordre aléatoire uniforme, les entiers de 1 à n , dans un arbre binaire de recherche initialement vide ; l'arbre binaire complet est alors obtenu en "effaçant" les clés, et en transformant l'arbre binaire en arbre complet (en ajoutant des feuilles là où l'arbre de départ a des arbres vides).

(On ne se préoccupe pas ici d'une méthode algorithmique : la question n'est pas de **comment** on pourrait faire pour obtenir un mot équilibré uniforme, ou un arbre binaire complet uniforme)

1. Pour $n = 3$, déterminer la probabilité d'obtenir chaque arbre possible en utilisant la méthode 1, et en utilisant la méthode 3. Les deux méthodes sont-elles équivalentes ?
2. En général, quelle est, en fonction de n et de l'arbre t , la probabilité d'obtenir l'arbre t avec la méthode 2 ? (Commencer par se poser la question : quelle est la probabilité d'obtenir chaque mot de Dyck comme résultat intermédiaire)
3. Choisissez un arbre binaire de taille 5 ou 6 (pas un peigne, c'est trop simple), et déterminez tous les ordres d'insertion qui donnent cet arbre par la méthode 3. Déduisez-en la probabilité de votre arbre par la méthode 3.

Vérifiez que la probabilité que vous avez calculée est compatible avec la formule (qu'il n'est pas demandé de prouver) :

$$\mathbb{P}_3(\{t\}) = \prod_{s \in t} \frac{1}{n_t(s)},$$

où la notation $\prod_{s \in t}$ indique que l'on effectue un produit sur tous les nœuds internes de l'arbre, et où $n_t(s)$ désigne le nombre de nœuds internes dans le sous-arbre de t dont la racine est s (en comptant s lui-même, bien entendu).

4. **(plus difficile, mais plus algorithmique)** On envisage une quatrième méthode, en utilisant la bijection de Rémy : on part de l'unique arbre à 1 nœud interne, et on applique l'algorithme suivant : $n - 1$ fois successivement (et indépendamment), on choisit un des nœuds de l'arbre binaire complet courant, et une direction, uniformément ; on applique la bijection de Rémy pour obtenir un arbre à un nœud interne de plus, avec une feuille marquée ; et on oublie quelle feuille est marquée, pour la prochaine étape. (Ainsi, la première étape permet de passer à un arbre à 2 nœuds internes ; la deuxième étape, à un arbre à 3 nœuds internes, etc. ; après la $n - 1$ -ème étape on a donc un arbre à n nœuds internes).

Expliquer pourquoi cette méthode est équivalente à la méthode 1 : on obtient un arbre uniforme.