

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD7

Probabilités conditionnelles, indépendance
<http://www.labri.fr/perso/duchon/Probas/>

Pour les exercices de cette feuille, il n'est presque jamais indispensable de décrire explicitement l'espace de probabilités ; tous les calculs nécessaires sont possibles en définissant les événements appropriés, en interprétant correctement les données du problème comme probabilités ou comme les bonnes probabilités conditionnelles, et en en tirant les conclusion.

7.1 Définition du cours et révisions

Exercice 7.1

On lance quatre fois une pièce équilibrée. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : on obtient pile aux trois premiers lancers.
- B : le dernier lancer donne face.
- C : on obtient pile au moins trois fois.

Calculer également $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_C(B)$.

Exercice 7.2

On considère deux urnes, l'une contenant 10 boules blanches et 30 boules noires, l'autre 20 boules de chaque couleur. On tire au hasard une boule dans une des urnes, l'urne étant elle-même choisie au hasard.

1. Avant de regarder la couleur de la boule, quelle est la probabilité de l'avoir tirée dans la première urne ?
2. Quelle est la probabilité que la boule soit blanche sachant qu'on l'a tirée dans la première urne ? Dans la deuxième ?
3. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit blanche ?
4. On a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la première urne ?
5. Refaire les calculs en supposant que la seconde urne contient non pas 20 boules de chaque couleur, mais 10 de chaque couleur ; et encore une fois en supposant qu'elle contient 30 boules blanches et 10 noires.

7.2 Application du cours

Exercice 7.3

On effectue un test de dépistage d'une maladie sur un patient. Le résultat du test est soit "Positif", soit "Négatif". Si le test était parfait, il donnerait toujours le résultat "Positif"

pour les patients porteurs de la maladie, et “Négatif” pour les patients non porteurs ; mais le test n’est pas parfait.

Les statistiques montrent que, lorsque le patient est porteur de la maladie, le test est positif dans 90% des cas. Lorsque le patient n’est pas porteur, le test est négatif dans 99% des cas.

On suppose que la maladie affecte 1 personne sur 100000. Quelle est la probabilité d’être effectivement malade lorsque le test est positif ?

Exercice 7.4

Lors d’un procès, l’accusation présente un test ADN positif pour confondre l’accusé. Ce test est très précis quand il est accusateur : la probabilité que le test soit positif quand l’individu est innocent n’est que de 0.1% (et elle est de 100% quand l’individu est coupable). La probabilité pour une personne donnée d’être innocente de ce crime est de 99.99%.

1. Estimez-vous plausible que l’accusé soit coupable ?
2. Résumer les données de l’énoncé en termes de probabilités (éventuellement conditionnelles) des événements T : « le suspect a un test positif » et I : « le suspect est innocent ».
3. Calculer $\mathbb{P}_T(I)$. Quelles sont vos conclusions ?

Exercice 7.5

On dispose de trois jetons de couleur : un a deux côtés blancs, un a deux côtés noirs, et un a un côté blanc et un côté noir. On tire un des trois jetons “au hasard” (uniformément), et on le pose d’un côté “aléatoire” (uniforme).

Essayez de résoudre cet exercice d’abord sans définir explicitement d’espace de probabilités.

1. Quelle est la probabilité que le jeton choisi ait ses deux faces de la même couleur ?
2. Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?
3. La face visible est blanche ; quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?
On modélise maintenant proprement la situation au moyen d’un univers $\{A, B, C\} \times \{1, 2\}$; le choix d’une lettre désigne le jeton, celui d’un entier la face (le jeton A a ses deux faces blanches ; le jeton B a sa face 1 blanche, et sa face 2 noire ; et le jeton C a ses deux faces noires).
4. Sur cet univers, quelle loi de probabilité est suggérée par l’énoncé ?
5. Répondre de nouveau aux trois premières questions, en décrivant explicitement les événements considérés et les probabilités (ou probabilités conditionnelles) calculées.

Exercice 7.6

Dans un certain jeu à deux joueurs, on commence le tour par tirer une carte (commune aux deux joueurs) d’un paquet (bien mélangé) contenant 5 cartes Or et 10 cartes Argent ; puis, chaque joueur lance un dé équilibré, et marque des points selon la règle suivante :

- si la carte tirée était une carte Or, le joueur marque 3 points si le résultat de son dé est pair, et 1 point si le résultat de son dé est impair ;
- si la carte tirée était une carte Argent, le joueur marque 2 points si le résultat de son dé est 6, et 1 point sinon.

Alice et Bob jouent un tour de ce jeu.

1. Quelle est la probabilité que Alice (respectivement, Bob) marque un point, sachant que la carte tirée est une carte Or? sachant que c'est une carte Argent? Quelle est la probabilité qu'Alice et Bob marquent chacun un point, sachant que la carte tirée est une carte Or? sachant que c'est une carte Argent?
2. Quelle est la probabilité qu'Alice marque un point? Qu'Alice et Bob marquent tous les deux un point?
3. Quelle est la probabilité que la carte tirée soit une carte Or, sachant que Alice a marqué un point? Sachant qu'Alice et Bob ont tous les deux marqué un point?
4. On rappelle que si A , B et C sont trois événements (avec A de probabilité strictement positive), on dit que B et C sont **indépendants, conditionnellement à A** , si $\mathbb{P}_A(B \cap C) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}_A(C)$. Identifier, dans la situation décrite précédemment, des cas d'indépendance conditionnelle.

Exercice 7.7

On considère un sac contenant quatre pièces : l'une d'entre elle a deux faces pile, tandis que les trois autres sont normales (et équilibrées). On choisit une pièce au hasard dans le sac et on la lance 4 fois. Calculer la probabilité des événements suivants :

- A : on a obtenu pile aux trois premiers lancers.
- B : le dernier lancer a donné face.

Calculer $\mathbb{P}_A(B)$. **Indication** : il peut être judicieux de calculer d'abord des probabilités conditionnelles par rapport à un événement supplémentaire, qui décrirait la pièce tirée du sac, ainsi que par rapport à son complémentaire.

Exercice 7.8

On considère un tournoi à $n + 1$ joueurs : vous et n autres joueurs j_1, \dots, j_n . Dans ce tournoi chaque joueur affronte tous les autres deux fois et l'ordre des matchs est choisi au hasard, uniformément (pour un joueur donné, l'ordre des adversaires qu'il affronte pour ses $2n$ matchs est uniforme). Votre probabilité de gagner contre le joueur j_i est de $\frac{i}{n+1}$. Cependant si vous avez déjà perdu contre le joueur j_i votre probabilité de regagner contre lui diminue de $\frac{1}{n+1}$.

1. Quelle est la probabilité que vous gagniez votre premier match?
Indication : calculer d'abord des probabilités conditionnelles par rapport à chacun des événements J_i : "le joueur choisi au hasard est le joueur j_i ". Vous aurez aussi besoin de connaître une formule pour $S_n = \sum_{k=0}^n k$.
2. Pour un adversaire j_i donné, quelle est la probabilité que vos deux premiers matchs soient contre ce même joueur j_i ? La probabilité que vos deux premiers matchs soient contre le même joueur?
3. En supposant que vous ayez perdu votre premier match, quelle est la probabilité de gagner votre second match? de gagner le second match qui vous opposera à ce même joueur? (**Indication** : Calculer d'abord des probabilités conditionnelles sachant l'événement P_k "le premier adversaire est le joueur j_k ", et utiliser la formule des probabilités totales.)

Exercice 7.9

Dans le glossaire français d'une célèbre émission télévisée, il y a 21209 mots de 10 lettres. Le tableau suivant donne leur répartition en fonction de leur première lettre :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1685	1015	2362	1836	1639	728	671	548	945	120	58	498	1354
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
321	403	2012	98	1552	1588	1040	97	516	31	21	18	53

On tire au hasard une lettre (uniformément), puis un mot du glossaire commençant par cette lettre (uniformément, conditionnellement à la lettre choisie).

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot YPONOMEUTE? Comparer avec la probabilité d'obtenir ce même mot si on avait tiré uniformément sur le glossaire entier. Même question avec CALLYPIGES (les deux mots sont dans le glossaire).
2. Les événements A : “Le mot choisi commence par une voyelle” et B : “La première lettre du mot est (strictement) avant H dans l'alphabet” sont-ils indépendants? Justifier.
Lors de l'émission, le candidat doit deviner le mot précédemment choisi. Les statistiques montrent qu'il a 80% de chances de le trouver s'il commence par une consonne, mais seulement 30% s'il commence par une voyelle.
3. Sachant que le candidat a trouvé le mot, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un mot commençant par une voyelle.

Exercice 7.10

Anatole et Philémon jouent à un jeu de hasard : ils tirent à tour de rôle à pile ou face, avec une même pièce équilibrée. Ils jouent jusqu'à ce qu'un joueur tire Pile ; ce joueur gagne la partie (on admet que la probabilité que personne ne gagne la partie, est nulle). C'est Anatole qui joue en premier.

1. On définit les événements suivants :
 - A : “Anatole gagne la partie”
 - B : “Philémon gagne la partie”
 - C : “Anatole ne gagne pas la partie dès son premier lancer”
 Déterminer $\mathbb{P}(C)$.
2. Expliquer pourquoi on a $\mathbb{P}_C(B) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_C(A) = \mathbb{P}(B)$.
3. (Si vous n'avez pas fait la question précédente, vous pouvez admettre les identités demandées pour cette question) En déduire $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 7.11

Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout n , on note E_n l'événement “le jour n , le professeur a oublié ses clés” et $p_n = \mathbb{P}(E_n)$. On suppose que $p_1 = 0.5$, que s'il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité 0.1, et que s'il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité 0.4.

1. Quelle relation de récurrence satisfait la suite p_n ?
2. En considérant la suite $q_n = p_n - \frac{4}{13}$, calculer la probabilité que le jour n , le professeur oublie ses clés.

Exercice 7.12

Dans une horloge, n engrenages sont utilisés pour faire tourner la grande aiguille. Le fabricant de cette horloge s'est rendu compte qu'il y avait un défaut dans certains de ces engrenages

qui les fait se casser dès la première utilisation de l'horloge. Et si jamais l'un (au moins) de ces engrenages est cassé, la grande aiguille ne peut plus tourner. Considérons les événements D_i : “l'engrenage i a un défaut” et G : “la grande aiguille arrive à tourner”. Chacun des engrenages a une probabilité p d'avoir le défaut.

1. Quelle relation (égalité) y a-t-il entre l'événement G et les événements D_i ?
2. En supposant que les D_i sont globalement indépendants, quelle est la probabilité que la grande aiguille arrive à tourner ?
3. Le constructeur s'est rendu compte que lorsqu'un des engrenages avait le défaut, ils l'avaient tous. Que peut-on en déduire sur les événements D_i ? et sur $\mathbb{P}(G)$?

Exercice 7.13

Un fabricant construit des alarmes incendies comprenant cinq composants : deux détecteurs de fumée situés à deux extrémités d'un couloir traversant un bâtiment, deux avertisseurs également placés aux extrémités, et une centrale d'alerte. En fonctionnement normal (si tous les composants fonctionnent correctement), les détecteurs envoient le signal à la centrale qui active les deux avertisseurs : un seul détecteur suffit alors à déclencher les deux avertisseurs. Mais en cas de défaillance de la centrale, on prévoit aussi qu'un détecteur active directement l'avertisseur le plus proche. Ainsi, la fumée étant mobile, on a au pire un retard dans le déclenchement du signal d'alerte, du moment qu'au moins un avertisseur et le détecteur correspondant fonctionnent. Le système est considéré comme défaillant si aucun avertisseur ne s'active en présence de fumée. Chacun des composants de l'alarme a une probabilité p de ne pas fonctionner, et on suppose que les composants ont des pannes indépendantes globalement.

1. En définissant des événements précis pour la défaillance individuelle de chacun des cinq composants, écrire l'événement D “l'alarme se déclenche” au moyen d'unions et d'intersections de ces événements ou de leurs complémentaires.
2. Quelle est la probabilité que l'alarme fonctionne ?

Exercice 7.14

Pour diminuer le risque de défaillance, une fusée est équipée de n plateformes de guidage inertiel, la plateforme principale et $n - 1$ plateformes de secours. L'ordinateur de bord de la fusée utilise par défaut la plateforme principale. Mais s'il détecte une défaillance de cette plateforme il bascule automatiquement sur la première plateforme de secours. De manière générale, s'il utilise la i -ème plateforme et détecte une défaillance alors il basculera automatiquement vers la $(i + 1)$ -ème plateforme. La fusée peut réussir à décoller tant qu'au moins une des plateformes de guidage inertiel est fonctionnelle. Considérons les événements P_i : “la plateforme de guidage inertiel i est défaillante” et S : “la fusée réussit à décoller”. Chacune des plateformes de guidage inertiel a une probabilité p d'être défaillante.

1. En supposant que les P_i sont globalement indépendants, quelle est la probabilité que la fusée réussisse à décoller ?
2. En pratique les plateformes de guidage inertiel sont toutes fabriquées à l'identique. En particulier, on découvre qu'elles sont toutes sujettes à un même bug potentiel. Si le bug se manifeste dans une des plateformes, il se manifestera dans chacune, et les empêchera toutes de fonctionner. (Les plateformes sont par ailleurs toujours toutes susceptibles de tomber en panne sans que le bug informatique entre en ligne de compte ; cette source de défaillance vient en plus.)

On note B_i l'évènement "le bug se manifeste dans la plateforme i ". Que peut-on dire sur les différents événements B_i ?

3. Notons B l'évènement "le bug se manifeste". Quelle est la probabilité que la fusée réussisse à décoller sachant B ?
4. On suppose que la probabilité pour chaque plateforme de tomber en panne sachant que le bug ne se manifeste pas est, comme à la première question, p . En supposant que les P_i sont globalement indépendants **conditionnellement à \bar{B}** , quelle est la probabilité que la fusée réussisse à décoller sachant que la plateforme inertielle de guidage principale n'a pas le bug ?
5. Notons $q = \mathbb{P}(B)$. Quelle est au final la probabilité que la fusée réussisse à décoller ? (cette probabilité s'exprime en fonction des paramètres p , q et n)