

Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD8

Variables aléatoires

<http://www.labri.fr/perso/duchon/Enseignements/Probas/>

Dans les exercices de cette feuille, il est fréquemment demandé de *déterminer la loi* d'une variable aléatoire X donnée. Rappelons ce que cela signifie :

- identifier l'ensemble des valeurs possibles de X ;
- pour chaque valeur possible a , déterminer la probabilité de l'événement $\{X = a\}$ (que ce soit par une formule, valable à la fois pour toutes les valeurs de a , ou au cas par cas, ou même par une combinaison des deux)

8.1 Applications directes du cours

Exercice 8.1

On lance deux dés classiques, équilibrés. On suppose que les deux dés sont distinguables.

1. On définit la variable aléatoire X_1 représentant le résultat du premier dé. Déterminer la loi de X_1 .
2. On définit la variable aléatoire X_2 représentant le résultat du second dé. Déterminer la loi de X_2 .
3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles égales ?
4. On définit la variable aléatoire $X_3 = X_1 + X_2$. Quelle est l'interprétation, en langage naturel, de X_3 ? Déterminer la loi de X_3 .
5. On remplace le premier dé par un dé à 4 faces (tétraèdre régulier), et le second par un dé à 8 faces (octaèdre régulier). On définit de nouveau X'_1, X'_2, X'_3 de la même manière : X'_1 est le résultat du premier dé, X'_2 le résultat du second dé, et $X'_3 = X'_1 + X'_2$. Déterminer les lois de X'_1, X'_2, X'_3 .

Exercice 8.2

On joue à pile ou face avec trois pièces équilibrées, et on note F_i , pour $i = 1, 2, 3$, l'événement "la i -ème pièce tombe sur Face" ; on définit alors les trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 , par $X_i = \mathbf{1}_{F_i}$.

1. Décrire X_1 en langage naturel (en fonction du résultat de la première pièce).
2. Déterminer la loi de chaque X_i .
3. On définit $S_1 = X_1 + X_3$, et $S_2 = X_2 + X_3$. Déterminer la loi de S_1 et de S_2 .
4. On définit $S = S_1 + X_1$, et $S' = S_2 + X_1$. Déterminer la loi de S et celle de S' .
5. En général, peut-on dire que la connaissance de la loi de deux variables aléatoires X et Y permet-elle de déterminer la loi de $X + Y$?

8.2 Applications et compléments au cours

Exercice 8.3

On suppose qu'on dispose d'une pièce de monnaie déséquilibrée : chaque fois qu'on la lance, elle a probabilité p de tomber côté Pile, et $1 - p$ de tomber côté Face. Les lancers successifs sont supposés indépendants.

On considère l'expérience (fictive!) consistant à lancer une infinité de fois la pièce, de manière séquentielle (il y a un premier lancer, un deuxième lancer, etc ; pour chaque entier $n > 0$, il y a un n -ème lancer).

On définit la variable aléatoire X comme le nombre total de lancers effectués jusqu'à la première fois que l'on obtient Pile (par exemple, si le premier lancer donne Face et le second donne Pile, X vaudra 2). Si on n'obtient jamais Pile, X prend la valeur 0.

1. Pour chaque entier n , on note F_n l'événement "le n -ème lancer donne Face". On suppose donc que ces événements sont globalement indépendants, chacun étant de probabilité $1 - p$.

Comment s'interprète l'événement $F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3}$?

2. Pour un entier $n > 0$ quelconque, écrire l'événement $\{X = n\}$ au moyen des événements F_i et de leurs complémentaires. En déduire sa probabilité.
3. Faire de même pour l'événement $\{X > n\}$.
4. Même si cela semble *a priori* très peu probable, on doit considérer la possibilité que la suite de tirages ne donne jamais de Pile, c'est-à-dire que X prenne la valeur 0. Écrire l'événement $\{X = 0\}$ au moyen des événements F_i .
5. L'hypothèse d'indépendance de la famille (infinie) d'événements $(F_i)_{i \geq 1}$ ne donne pas immédiatement de formule pour $\mathbb{P}(X = 0)$; pourquoi ?
6. Montrer qu'on a, pour tout $n > 0$, $\{X = 0\} \subset \cap_{i=1}^n F_i$. Que peut-on en déduire sur $\mathbb{P}(X = 0)$?
7. Décrire complètement la loi de X .

Exercice 8.4

On considère une variable aléatoire X , uniforme sur $[[1, 6]]$; c'est-à-dire que les valeurs possibles de X sont les entiers de 1 à 6, et que, pour chaque tel entier k , on a $\mathbb{P}(X = k) = 1/6$.

1. On définit une nouvelle variable aléatoire $Y = 7 - X$. Déterminer la loi de Y .
2. On définit également $Z = X^2 + X$. Déterminer la loi de Z .
3. On définit enfin $T = (X - 2)^2$. Déterminer la loi de T .

Exercice 8.5

On considère un espace de probabilités $(\Omega, \mathbb{P})$ (qu'il n'est pas question ici d'expliciter), sur lequel on suppose qu'on a défini deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit alors $Z = X + Y$ comme variable aléatoire à valeurs également dans $\mathbb{N}$.

1. Écrire les événements $\{Z = 0\}$, $\{Z = 1\}$, $\{Z = 2\}$ en fonction des événements $\{X = 0\}$, $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$, $\{Y = 0\}$, $\{Y = 1\}$ et $\{Y = 2\}$.
2. Plus généralement, écrire une expression pour l'événement $\{Z = k\}$, valable pour n'importe quel entier $k \geq 0$, en fonction d'événements de la forme $\{X = a\}$ et/ou $\{Y = b\}$.

3. On suppose connues les lois de X et de Y : notons, pour chaque entier k , $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbb{P}(Y = k)$. On suppose également que X et Y sont **indépendantes** (notion non encore définie en cours : cela signifie que, pour tous entiers k et ℓ , les événements $\{X = k\}$ et $\{Y = \ell\}$ sont indépendants).
Montrer que ces informations permettent de déterminer la loi de Z ; donner une formule générale pour $\mathbb{P}(Z = k)$.
4. Si l'on ne suppose pas que X et Y sont indépendantes, mais qu'on suppose connue, pour tout k et tout ℓ , la quantité $p_{k,\ell} = \mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = \ell)$, donner une formule pour $\mathbb{P}(Z = k)$.

Exercice 8.6

Dans un réseau informatique, on doit transmettre un message long de N bits par un canal qui peut provoquer des erreurs. On fait l'hypothèse, très simplificatrice, que chaque bit a la même probabilité p d'être transmis de manière incorrecte, **indépendamment** de chacun des autres.

1. Quelle est, en fonction de p et de N , la probabilité que l'ensemble du message soit transmis sans erreur ?
2. Quelle est la probabilité que le message soit transmis avec exactement une erreur ?
Exactement deux erreurs ?
3. On modélise cette expérience par l'univers $\Omega = \{0, 1\}^N$ des suites de longueur N de 0 et de 1. Un 0 en position k indique que le k -ème bit est transmis sans erreur ; un 1 en position k indique que le k -ème bit est transmis avec erreur.
Quelle est la loi de probabilité correspondant à la situation, pour cet univers ? (c'est-à-dire, pour *chaque* séquence de longueur N formée des symboles 0 et 1, il faut dire quelle est sa probabilité)
4. Pour un entier $n > 0$ et un entier $0 \leq k \leq n$ donnés, combien existe-t-il de suites de longueur n sur l'alphabet $\{0, 1\}$, qui comptent exactement k occurrences de 1 ?
5. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'erreurs de transmission. Déterminer la loi de X . **Il est possible que vous connaissiez un nom, voire une formule, pour cette loi ; on souhaite ici prouver cette formule.**
6. On utilise, pour la transmission, un "code correcteur d'erreurs", qui permet de reconstituer le message d'origine du moment que le nombre d'erreurs de transmission est au plus de 2. Déterminer la probabilité de pouvoir reconstituer le message, pour les valeurs suivantes : $p = 0.001$, $N = 1024$.

8.3 Exercices plus avancés

Exercice 8.7

Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit la *loi de Poisson de paramètre x* (où $x > 0$ est un nombre réel quelconque, mais fixé) si on a, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-x} \frac{x^k}{k!}.$$

(Le facteur e^{-x} est là pour assurer que la somme des probabilités vaut 1 ; il est vrai en général, et on l'admettra ici, que pour tout nombre réel – même négatif – on a $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! = e^x$.)

1. Déterminer, en fonction de x , quelle est la valeur la plus probable pour une variable de Poisson de paramètre x . **Indication :** calculer $\mathbb{P}(X = k + 1)/\mathbb{P}(X = k)$, et comparer à 1.
2. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires de Poisson – de paramètre x pour X , et de paramètre y pour Y . On suppose également que X et Y sont indépendantes (voir exercices précédents pour la définition).

Déterminer la loi de Z , définie par $Z = X + Y$.

Indication : On pourra utiliser la *formule du binôme* : pour tout entier $n > 0$ et tous réels a et b ,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(Que se passe-t-il si on divise de part et d'autre par $n!$?)