

## Probabilités, Statistiques, Combinatoire : TD9

Variables aléatoires et lois usuelles

<http://www.labri.fr/perso/duchon/Enseignements/Probas/>

Les exercices de cette feuille ont pour objectif de faire manipuler un certain nombre de lois de probabilités usuelles pour des variables aléatoires.

On rappelle la définition de deux variables aléatoires *indépendantes* : deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si, quelques soient les valeurs  $x$  et  $y$ , les événements  $\{X = x\}$  et  $\{Y = y\}$  sont indépendants. Cette définition s'étend au cas de plus de deux variables aléatoires :  $k$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_k$  sont indépendantes si, quelles que soient les valeurs possibles  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , les événements  $\{X_1 = x_1\}, \{X_2 = x_2\}, \dots, \{X_k = x_k\}$  sont indépendants.

### 9.1 Retour sur le cours

#### Exercice 9.1

(Repris de la feuille TD8)

Une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  suit la *loi de Poisson de paramètre  $x$*  (où  $x > 0$  est un nombre réel quelconque, mais fixé) si on a, pour tout entier  $k \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-x} \frac{x^k}{k!}.$$

(Le facteur  $e^{-x}$  est là pour assurer que la somme des probabilités vaut 1 ; il est vrai en général, et on l'admettra ici, que pour tout nombre réel – même négatif – on a  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! = e^x$ .)

1. Déterminer, en fonction de  $x$ , quelle est la valeur la plus probable pour une variable de Poisson de paramètre  $x$ . **Indication** : calculer  $\mathbb{P}(X = k + 1)/\mathbb{P}(X = k)$ , et comparer à 1.
2. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires de Poisson – de paramètre  $x$  pour  $X$ , et de paramètre  $y$  pour  $Y$ . On suppose également que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. Déterminer la loi de  $Z$ , définie par  $Z = X + Y$ .

**Indication** : On pourra utiliser la *formule du binôme* : pour tout entier  $n > 0$  et tous réels  $a$  et  $b$ ,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(Que se passe-t-il si on divise de part et d'autre par  $n!$ ?)

#### Exercice 9.2

**Bernoulli**

Une *variable de Bernoulli* est une variable aléatoire qui prend comme seules valeurs 0 et 1. Le *paramètre* de la loi est simplement la probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 1.

1. Montrer que la variable indicatrice d'un événement  $A$ ,  $X = \mathbf{1}_A$ , est une variable de Bernoulli. Comment s'exprime son paramètre? Inversement, montrer que toute variable  $X$  de Bernoulli est l'indicatrice d'un certain événement (à décrire à partir de  $X$ ).

Supposons que  $X$  et  $Y$  sont deux variables de Bernoulli, de paramètres  $p$  et  $q$ . On définit  $Z$  et  $T$  de la manière suivante :  $Z = \min(X, Y)$  et  $T = \max(X, Y)$ . Dans un premier temps, on ne suppose pas que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

2. Quelles sont les valeurs possibles de  $Z$ , celles de  $T$ ? Pour chaque valeur possible  $a$ , écrire les événements  $\{Z = a\}$  et  $\{T = a\}$  en fonction d'événements portant sur  $X$  et sur  $Y$ . Peut-on en déduire la loi de  $Z$ , celle de  $T$ ?
3. Les variables aléatoires  $Z$  et  $T$  sont-elles indépendantes?
4. On suppose maintenant, en plus, que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. Que peut-on dire de plus sur les lois de  $Z$  et de  $T$ ?

### Exercice 9.3

#### Binomiale

Une définition possible de la *loi binomiale de paramètres*  $(n, p)$  (où  $n$  est un entier naturel, et  $0 < p < 1$ ), est la suivante : cette loi est la loi de la variable aléatoire  $S$  qu'on obtient en *sommant*  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ , *indépendantes*, chacune étant une variable de Bernoulli de même paramètre  $p$  :

$$S = \sum_{k=0}^n X_k.$$

**À part la dernière question, cet exercice reprend une partie du cours ; essayez de le résoudre sans regarder autre choses que vos notes.**

1. Soient  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  variables de Bernoulli indépendantes, de paramètre  $p$ , et  $S$  leur somme. Déterminer  $\mathbb{P}(S = 0)$  et  $\mathbb{P}(S = n)$ .
2. Soit  $I$  une partie de  $[[1, n]]$ ; on note  $J = [[1, n]] - I$  son complémentaire dans  $[[1, n]]$ . On note  $i = \#I$ .
  - (a) Comment s'exprime le cardinal de  $J$ ?
  - (b) On définit l'événement  $E_I$  : "pour chaque  $k \in I$ ,  $X_k = 1$ ; et pour chaque  $k \in J$ ,  $X_k = 0$ ". Écrire explicitement  $E_I$  comme une intersection de  $n$  événements indépendants, et déterminer sa probabilité.
3. Soit  $i$  un entier compris entre 0 et  $n$ . En vous inspirant de la question précédente, écrire l'événement  $\{S = i\}$  comme l'union de plusieurs événements deux à deux disjoints, et de même probabilité. En déduire une formule pour  $\mathbb{P}(S = i)$ .
4. Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes, l'une suivant la loi binomiale de paramètres  $(n, p)$ , l'autre suivant la loi binomiale de paramètres  $(m, p)$ , est encore une variable binomiale dont on déterminera les paramètres. **Note** : cette question peut être résolue sans calculs compliqués ; si vous préférez les calculs, qui demandent de manipuler des coefficients binomiaux, vous aurez besoin de la formule

pour la loi d'une somme de variables indépendantes, obtenue dans l'exercice **8.5**. Vous aurez également besoin de prouver la formule suivante sur les coefficients binomiaux : pour  $0 \leq k \leq n + m$ ,

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{\ell=0}^k \binom{n}{\ell} \binom{m}{k-\ell},$$

où l'on convient que  $\binom{a}{b} = 0$  si  $b < 0$  ou  $b > a$ . N'essayez pas de prouver directement cette formule ; utilisez l'interprétation combinatoire !

### Exercice 9.4 Géométrie

La loi *géométrique de paramètre  $p$*  (où  $0 < p < 1$ ) est la loi d'une variable aléatoire obtenue de la manière suivante : on part d'une séquence infinie  $(X_k)_{k>0}$  de variables de Bernoulli *indépendantes*, toutes de même paramètre  $p$ , et on définit  $G$  comme *l'indice de la première des  $X_i$  qui prend la valeur 1* :

$$G = \min(\{k \geq 1 : X_k = 1\}).$$

**Note :** Cet exercice peut être considéré comme la "suite" de l'exercice **8.3**.

1. Écrire les événements  $(G = 1)$ ,  $(G = 2)$ , et  $(G = 3)$  en termes des variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3$  (et d'événements définis par ces variables aléatoires). En déduire leurs probabilités.
2. Pour un entier  $n > 1$  quelconque, écrire l'événement  $(G > n)$  en fonction des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ . En déduire sa probabilité.
3. Quelle relation y a-t-il entre les événements  $(G > n - 1)$ ,  $(G > n)$ , et  $(G = n)$ ? En déduire une formule, valable pour tout  $n > 0$ , pour  $\mathbb{P}(G = n)$ .
4. (**plus difficile**) On considère deux variables aléatoires indépendantes  $G_1$  et  $G_2$  ;  $G_1$  est géométrique de paramètre  $p$ , et  $G_2$  est géométrique de paramètre  $q$ . On définit  $G = \min(G_1, G_2)$ . Montrer que  $G$  est géométrique, pour un paramètre à déterminer. **Note :** il y a au moins deux façons de résoudre cette question ; l'une implique des calculs avec des formules, l'autre consiste à partir de deux familles indépendantes  $(X_k)_{k>0}$  et  $(Y_k)_{k>0}$  de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli, et à mener des raisonnements relativement élémentaires – mais essentiellement pas de formules.

## 9.2 Applications et compléments

### Exercice 9.5 L'étudiant improbable

Un étudiant indécis suit deux UE, dans lesquelles il a chaque semaine à passer un test. Chaque semaine, il triche à chacun des deux tests. Dans la première UE, il a chaque fois 20% de chances d'être pris ; dans la seconde, il a chaque fois 25% de chances d'être pris (l'enseignant est plus vigilant). On suppose que les différents tests se déroulent de manière indépendante.

1. On suppose que le semestre se déroule sans limite de temps, et on note  $T_i$  ( $i = 1, 2$ ) le numéro du test où l'étudiant se fait prendre pour la première fois dans l'UE  $i$ . Déterminer la loi de  $T_i$ .

- Déterminer la loi de la variable  $T$  représentant le numéro de la première semaine où l'étudiant se fait prendre pour la première fois, toutes UE confondues.
- En réalité, le semestre ne dure que 10 semaines. Quelle est la probabilité que l'étudiant ne se fasse jamais prendre ?

## Exercice 9.6

### Insectes et Poisson

Pour cet exercice, on admet la formule suivante, valable pour tout nombre réel  $t$  :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

Un insecte pond un grand nombre d'œufs. Le nombre d'œufs pondus est une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi de Poisson de paramètre  $x > 0$ . Chaque œuf a une probabilité  $p$  d'éclore, indépendamment des autres. Soit  $Z$  le nombre d'œufs qui éclosent.

- Pour  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ , déterminer  $\mathbb{P}(Z = k | X = n)$ , en distinguant selon qu'on ait  $k > n$  ou  $k \leq n$ .
- Utiliser la formule des probabilités totales pour en déduire une formule, sous forme de somme infinie, pour la probabilité de l'événement  $\{Z = k\}$ .
- En utilisant la formule donnée en préambule, déterminer la loi de  $Z$ .
- On note  $Z'$  le nombre d'œufs non éclos. Déterminer, sans calculs, la loi de  $Z'$ .
- Déterminer  $\mathbb{P}(Z = k \text{ et } Z' = k')$ , en fonction de  $k$  et  $k'$ . Qu'en déduit-on sur  $Z$  et  $Z'$  ?

## Exercice 9.7

### Binomiale négative

La **loi binomiale négative**, ou **loi de Pólya**, est définie de la manière suivante. Elle dépend de deux paramètres  $n$  (entier positif) et  $p$  (réel entre 0 et 1).

Partant d'une suite (infinie) de "tentatives" indépendantes, chacune ayant probabilité  $p$  de "réussir", la variable aléatoire  $N$  (binomiale négative de paramètres  $n$  et  $p$ ) désigne le nombre d'échecs subis avant le  $n$ -ème succès.

- Si  $N$  est une variable binomiale négative de paramètres  $(1, p)$ , alors  $N + 1$  suit une loi déjà connue ; laquelle ?
- Montrer, sans calculs, que si  $G_1$  et  $G_2$  sont deux variables aléatoires indépendantes, suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre  $p$ , alors  $G_1 + G_2 - 2$  suit la loi binomiale négative de paramètres  $(2, p)$ .
- Soit  $k \geq 0$  un entier positif. Combien existe-t-il de séquences de 0 et de 1, de longueur  $k + n$ , qui se terminent par un 1 et qui, au total, comportent exactement  $n$  occurrences de 1 et  $k$  occurrences de 0 ? En déduire une formule pour  $\mathbb{P}(N = k)$ , si  $N$  suit la loi binomiale négative de paramètres  $(n, p)$ .
- Alice et Bob jouent à un jeu de hasard : à chaque tour, Alice lance un dé (équilibré). Si le résultat est 1 ou 2, Alice "gagne" le coup et Bob lui donne 2 euros ; si le résultat est 3 ou plus, Alice "perd" le coup et donne 1 euro à Bob. La partie s'arrête dès qu'Alice a perdu 3 coups.

Quelle est la probabilité qu'à la fin du jeu, les gains des deux joueurs s'équilibrent (c'est-à-dire qu'au total, Alice ait donné autant à Bob que Bob à Alice) ?