

Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique

<http://www.labri.fr/perso/duchon/Enseignements/Probab/>

2019-2020

Notion de “classe combinatoire”

En combinatoire, on va souvent chercher à “compter les objets d’un certain type”. Le plus souvent, l’ensemble de tous les objets en question est infini, donc la réponse est en apparence simple : “il y en a une infinité”. Mais on a généralement une notion de **taille** des objets, et la vraie question est plutôt : “combien y a-t-il d’objets de taille n , exprimé comme une fonction de n ?”

Notion de “classe combinatoire”

En combinatoire, on va souvent chercher à “compter les objets d’un certain type”. Le plus souvent, l’ensemble de tous les objets en question est infini, donc la réponse est en apparence simple : “il y en a une infinité”. Mais on a généralement une notion de **taille** des objets, et la vraie question est plutôt : “combien y a-t-il d’objets de taille n , exprimé comme une fonction de n ?”

Définition : Classe combinatoire

Une **classe combinatoire** est la donnée d’un ensemble C , et d’une fonction $t : C \rightarrow \mathbb{N}$, telle que *pour tout n , l’ensemble C_n des éléments de C qui ont n pour image par t est fini.*

$$C_n = \{x \in C : t(x) = n\}.$$

La **suite de comptage de la classe C** est alors simplement la suite $(c_n)_{n \geq 0}$ définie par : pour tout n , $c_n = \#C_n$.

Notion de “classe combinatoire”

En combinatoire, on va souvent chercher à “compter les objets d’un certain type”. Le plus souvent, l’ensemble de tous les objets en question est infini, donc la réponse est en apparence simple : “il y en a une infinité”. Mais on a généralement une notion de **taille** des objets, et la vraie question est plutôt : “combien y a-t-il d’objets de taille n , exprimé comme une fonction de n ?”

Définition : Classe combinatoire

Une **classe combinatoire** est la donnée d’un ensemble C , et d’une fonction $t : C \rightarrow \mathbb{N}$, telle que *pour tout n , l’ensemble C_n des éléments de C qui ont n pour image par t est fini.*

$$C_n = \{x \in C : t(x) = n\}.$$

La **suite de comptage de la classe** C est alors simplement la suite $(c_n)_{n \geq 0}$ définie par : pour tout n , $c_n = \#C_n$.

La fonction t est appelée **fonction de taille** pour la classe ; si on change t , on change généralement de suite de comptage (et même, on peut ne plus avoir une classe combinatoire).

Exemple classique : permutations

Définition : permutation

Une *permutation* sur un ensemble A est une bijection de E vers lui-même.

On note S_n l'ensemble des permutations sur l'ensemble $[[1, n]]$, et $S = \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ (on prend donc comme "taille" d'une permutation, le nombre d'éléments de l'ensemble).

La suite de comptage des permutations est bien connue :

Théorème

Pour tout entier $n \geq 1$, le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n , est $n! = n.(n - 1) \dots 2.1$ ("factorielle n ").

Preuve : On donne deux preuves, une preuve directe par codage, et une preuve par récurrence sur n .

Comptage des permutations

Preuve par récurrence : on a $n! = n \cdot (n - 1)!$; on montre que pour tout $n > 1$, il y a n fois plus de permutations sur $[[1, n]]$ que sur $[[1, n - 1]]$ (et que le nombre de permutations de $\{1\}$ est bien $1 = 1!$). Or, la seule suite $(c_n)_{n \geq 0}$ qui satisfait $c_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $c_n = n \cdot c_{n-1}$ est la suite $c_n = n!$.

Comptage des permutations

Preuve par récurrence : on a $n! = n \cdot (n - 1)!$; on montre que pour tout $n > 1$, il y a n fois plus de permutations sur $[[1, n]]$ que sur $[[1, n - 1]]$ (et que le nombre de permutations de $\{1\}$ est bien $1 = 1!$). Or, la seule suite $(c_n)_{n \geq 0}$ qui satisfait $c_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $c_n = n \cdot c_{n-1}$ est la suite $c_n = n!$.

Preuve par codage : on choisit un entier n quelconque ; on identifie un ensemble A_n pour lequel il est facile de montrer que son cardinal est $n!$, et on trouve un codage des permutations de $[[1, n]]$ par les éléments de cet ensemble (*i.e.*, une bijection de A_n vers S_n). (Cf. Ex. feuille TD1)

Comptage des permutations

Preuve par récurrence : on a $n! = n \cdot (n - 1)!$; on montre que pour tout $n > 1$, il y a n fois plus de permutations sur $[[1, n]]$ que sur $[[1, n - 1]]$ (et que le nombre de permutations de $\{1\}$ est bien $1 = 1!$). Or, la seule suite $(c_n)_{n \geq 0}$ qui satisfait $c_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $c_n = n \cdot c_{n-1}$ est la suite $c_n = n!$.

Preuve par codage : on choisit un entier n quelconque ; on identifie un ensemble A_n pour lequel il est facile de montrer que son cardinal est $n!$, et on trouve un codage des permutations de $[[1, n]]$ par les éléments de cet ensemble (*i.e.*, une bijection de A_n vers S_n). (Cf. Ex. feuille TD1)

Au passage : $n!$ est aussi le nombre de façons d'ordonner n valeurs (séquences de longueur n d'entiers entre 1 et n , tous différents).

Une formule pour les coefficients binomiaux

On a défini $\binom{n}{k}$ comme étant le nombre de parties à k éléments de l'ensemble $[[1, n]]$; peut-on trouver une formule ?

Théorème : formule des coefficients binomiaux

Pour tous entiers n et k , avec $0 \leq k \leq n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est donné par la formule

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Preuve : On donne une preuve combinatoire de la formule en se ramenant à la formule équivalente $n! = \binom{n}{k}k!(n-k)!$, et en interprétant le membre de gauche et celui de droite comme les cardinaux d'ensembles qu'on met en bijection.

- ▶ $m!$, c'est le nombre de façons d'ordonner m valeurs
- ▶ $\binom{n}{k}$, c'est le nombre de façons de choisir un ensemble de k valeurs parmi $[[1, n]]$

Coefficients binomiaux (2)

Une fois qu'on connaît la formule, on peut retrouver des propriétés de symétrie des coefficients binomiaux :

- ▶ en remplaçant k par $n - k$, on ne change pas le résultat :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Coefficients binomiaux (2)

Une fois qu'on connaît la formule, on peut retrouver des propriétés de symétrie des coefficients binomiaux :

- ▶ en remplaçant k par $n - k$, on ne change pas le résultat :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ben oui : il y a autant de parties A de $[[1, n]]$ ayant k éléments, que de parties B en ayant $n - k$: pour chaque partie A , il suffit de poser $B = [[1, n]] - A$, c'est une bijection

Coefficients binomiaux (2)

Une fois qu'on connaît la formule, on peut retrouver des propriétés de symétrie des coefficients binomiaux :

- ▶ en remplaçant k par $n - k$, on ne change pas le résultat :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ben oui : il y a autant de parties A de $[[1, n]]$ ayant k éléments, que de parties B en ayant $n - k$: pour chaque partie A , il suffit de poser $B = [[1, n]] - A$, c'est une bijection

- ▶ **Triangle de Pascal** : pour $0 \leq k \leq n - 1$, on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Coefficients binomiaux (2)

Une fois qu'on connaît la formule, on peut retrouver des propriétés de symétrie des coefficients binomiaux :

- ▶ en remplaçant k par $n - k$, on ne change pas le résultat :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ben oui : il y a autant de parties A de $[[1, n]]$ ayant k éléments, que de parties B en ayant $n - k$: pour chaque partie A , il suffit de poser $B = [[1, n]] - A$, c'est une bijection

- ▶ **Triangle de Pascal** : pour $0 \leq k \leq n - 1$, on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Ben oui : parmi les parties de $[[1, n]]$ de taille k , il y a celles qui ne contiennent pas n (et de celles-ci, il y en a autant que des parties de taille k de $[[1, n - 1]]$), et aussi celles qui contiennent n (et de celles-là, il y en a autant que des parties de taille $k - 1$ de $[[1, n - 1]]$).

Encore un exemple : arbres binaires complets

L'ensemble \mathcal{B} des arbres binaires complets non vides, peut être décrit **inductivement** de la manière suivante :

- ▶ un arbre t peut être composé d'un unique nœud racine ; ou
- ▶ un arbre t peut être composé d'un nœud racine r , et d'un couple de deux arbres (t_1, t_2) ; t_1 est alors le sous-arbre gauche, et t_2 le sous-arbre droit.

(Ces arbres binaires complets sont les “squelettes” des arbres binaires complets vus en algorithmique : les nœuds de nos arbres ne portent pas d'étiquettes)

On pourrait prendre comme notion de taille diverses quantités :

- ▶ le nombre total de nœuds (forcément, strictement positif)
- ▶ le nombre de nœuds internes (peut être nul)
- ▶ le nombre de feuilles
- ▶ la hauteur

Notion usuelle de taille : le nombre de nœuds internes.

Vers le comptage des arbres binaires complets

Prenons un entier $n \geq 0$ quelconque.

- ▶ Si $n = 0$, il y a un seul arbre sans nœuds internes : $c_0 = 1$.

Vers le comptage des arbres binaires complets

Prenons un entier $n \geq 0$ quelconque.

- ▶ Si $n = 0$, il y a un seul arbre sans nœuds internes : $c_0 = 1$.
- ▶ Si $n > 0$, l'arbre a un sous-arbre gauche t_g ; soit k sa taille (son nombre de nœuds internes).

Vers le comptage des arbres binaires complets

Prenons un entier $n \geq 0$ quelconque.

- ▶ Si $n = 0$, il y a un seul arbre sans nœuds internes : $c_0 = 1$.
- ▶ Si $n > 0$, l'arbre a un sous-arbre gauche t_g ; soit k sa taille (son nombre de nœuds internes).
 - ▶ Quelles sont les valeurs possibles de k ?

Vers le comptage des arbres binaires complets

Prenons un entier $n \geq 0$ quelconque.

- ▶ Si $n = 0$, il y a un seul arbre sans nœuds internes : $c_0 = 1$.
- ▶ Si $n > 0$, l'arbre a un sous-arbre gauche t_g ; soit k sa taille (son nombre de nœuds internes).
 - ▶ Quelles sont les valeurs possibles de k ? les entiers de 0 à $n - 1$

Vers le comptage des arbres binaires complets

Prenons un entier $n \geq 0$ quelconque.

- ▶ Si $n = 0$, il y a un seul arbre sans nœuds internes : $c_0 = 1$.
- ▶ Si $n > 0$, l'arbre a un sous-arbre gauche t_g ; soit k sa taille (son nombre de nœuds internes).
 - ▶ Quelles sont les valeurs possibles de k ? **les entiers de 0 à $n - 1$**
 - ▶ Si on fixe k , quelle est alors la taille du sous-arbre droit t_d ?

Vers le comptage des arbres binaires complets

Prenons un entier $n \geq 0$ quelconque.

- ▶ Si $n = 0$, il y a un seul arbre sans nœuds internes : $c_0 = 1$.
- ▶ Si $n > 0$, l'arbre a un sous-arbre gauche t_g ; soit k sa taille (son nombre de nœuds internes).
 - ▶ Quelles sont les valeurs possibles de k ? les entiers de 0 à $n - 1$
 - ▶ Si on fixe k , quelle est alors la taille du sous-arbre droit t_d ?
 $n - 1 - k$

Vers le comptage des arbres binaires complets

Prenons un entier $n \geq 0$ quelconque.

- ▶ Si $n = 0$, il y a un seul arbre sans nœuds internes : $c_0 = 1$.
- ▶ Si $n > 0$, l'arbre a un sous-arbre gauche t_g ; soit k sa taille (son nombre de nœuds internes).
 - ▶ Quelles sont les valeurs possibles de k ? les entiers de 0 à $n - 1$
 - ▶ Si on fixe k , quelle est alors la taille du sous-arbre droit t_d ?
 $n - 1 - k$
 - ▶ Si on fixe k , combien de choix possibles pour l'arbre t_g ? Pour l'arbre t_d ? Pour le couple (t_g, t_d) ?

Vers le comptage des arbres binaires complets

Prenons un entier $n \geq 0$ quelconque.

- ▶ Si $n = 0$, il y a un seul arbre sans nœuds internes : $c_0 = 1$.
- ▶ Si $n > 0$, l'arbre a un sous-arbre gauche t_g ; soit k sa taille (son nombre de nœuds internes).
 - ▶ Quelles sont les valeurs possibles de k ? les entiers de 0 à $n - 1$
 - ▶ Si on fixe k , quelle est alors la taille du sous-arbre droit t_d ?
 $n - 1 - k$
 - ▶ Si on fixe k , combien de choix possibles pour l'arbre t_g ? Pour l'arbre t_d ? Pour le couple (t_g, t_d) ? respectivement, c_k ,
 c_{n-1-k} , $c_k \cdot c_{n-1-k}$

Vers le comptage des arbres binaires complets

Prenons un entier $n \geq 0$ quelconque.

- ▶ Si $n = 0$, il y a un seul arbre sans nœuds internes : $c_0 = 1$.
- ▶ Si $n > 0$, l'arbre a un sous-arbre gauche t_g ; soit k sa taille (son nombre de nœuds internes).
 - ▶ Quelles sont les valeurs possibles de k ? les entiers de 0 à $n - 1$
 - ▶ Si on fixe k , quelle est alors la taille du sous-arbre droit t_d ?
 $n - 1 - k$
 - ▶ Si on fixe k , combien de choix possibles pour l'arbre t_g ? Pour l'arbre t_d ? Pour le couple (t_g, t_d) ? respectivement, c_k ,
 c_{n-1-k} , $c_k \cdot c_{n-1-k}$
 - ▶ On en déduit une formule pour c_n , en fonction de tout ce qui le précède dans la séquence, $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \dots$

Vers le comptage des arbres binaires complets

Prenons un entier $n \geq 0$ quelconque.

- ▶ Si $n = 0$, il y a un seul arbre sans nœuds internes : $c_0 = 1$.
- ▶ Si $n > 0$, l'arbre a un sous-arbre gauche t_g ; soit k sa taille (son nombre de nœuds internes).
 - ▶ Quelles sont les valeurs possibles de k ? les entiers de 0 à $n - 1$
 - ▶ Si on fixe k , quelle est alors la taille du sous-arbre droit t_d ?
 $n - 1 - k$
 - ▶ Si on fixe k , combien de choix possibles pour l'arbre t_g ? Pour l'arbre t_d ? Pour le couple (t_g, t_d) ? respectivement, c_k ,
 c_{n-1-k} , $c_k \cdot c_{n-1-k}$
 - ▶ On en déduit une formule pour c_n , en fonction de tout ce qui le précède dans la séquence, $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \dots$
 - ▶ La séquence est définie par : $c_0 = 1$, et pour $n \geq 1$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$$

Vers le comptage des arbres binaires complets

Prenons un entier $n \geq 0$ quelconque.

- ▶ Si $n = 0$, il y a un seul arbre sans nœuds internes : $c_0 = 1$.
- ▶ Si $n > 0$, l'arbre a un sous-arbre gauche t_g ; soit k sa taille (son nombre de nœuds internes).
 - ▶ Quelles sont les valeurs possibles de k ? les entiers de 0 à $n - 1$
 - ▶ Si on fixe k , quelle est alors la taille du sous-arbre droit t_d ?
 $n - 1 - k$
 - ▶ Si on fixe k , combien de choix possibles pour l'arbre t_g ? Pour l'arbre t_d ? Pour le couple (t_g, t_d) ? respectivement, c_k ,
 c_{n-1-k} , $c_k \cdot c_{n-1-k}$
 - ▶ On en déduit une formule pour c_n , en fonction de tout ce qui le précède dans la séquence, $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \dots$
 - ▶ La séquence est définie par : $c_0 = 1$, et pour $n \geq 1$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$$

- ▶ Ça ne donne pas une formule, mais ça permet de calculer efficacement les premiers termes (**suite de Catalan**) :
1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430 ...

Vers le comptage des arbres binaires complets

Prenons un entier $n \geq 0$ quelconque.

- ▶ Si $n = 0$, il y a un seul arbre sans nœuds internes : $c_0 = 1$.
- ▶ Si $n > 0$, l'arbre a un sous-arbre gauche t_g ; soit k sa taille (son nombre de nœuds internes).
 - ▶ Quelles sont les valeurs possibles de k ? les entiers de 0 à $n - 1$
 - ▶ Si on fixe k , quelle est alors la taille du sous-arbre droit t_d ?
 $n - 1 - k$
 - ▶ Si on fixe k , combien de choix possibles pour l'arbre t_g ? Pour l'arbre t_d ? Pour le couple (t_g, t_d) ? respectivement, c_k ,
 c_{n-1-k} , $c_k \cdot c_{n-1-k}$
 - ▶ On en déduit une formule pour c_n , en fonction de tout ce qui le précède dans la séquence, $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \dots$
 - ▶ La séquence est définie par : $c_0 = 1$, et pour $n \geq 1$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-1-k}$$

- ▶ Ça ne donne pas une formule, mais ça permet de calculer efficacement les premiers termes (**suite de Catalan**) :
1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430 ...