

# Probabilités, Statistiques, Combinatoire - cours 5

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique

<http://www.labri.fr/perso/duchon/Enseignements/Probas/>

2019-2020

# Partie II : Probabilités

## La notion de hasard...

- ▶ Qu'est-ce que le hasard ? Est-ce que ça existe, d'ailleurs, ou est-ce que ça ne serait pas un mot qu'on utilise pour camoufler notre ignorance, ou notre incapacité à "calculer assez précisément" ce qui va se passer ?

## La notion de hasard. . .

- ▶ Qu'est-ce que le hasard ? Est-ce que ça existe, d'ailleurs, ou est-ce que ça ne serait pas un mot qu'on utilise pour camoufler notre ignorance, ou notre incapacité à “calculer assez précisément” ce qui va se passer ?
- ▶ Ce sont des questions qui peuvent être intéressantes, mais qui *ne sont pas notre sujet* ; dans la pratique, *on fait comme si* la théorie des probabilités rendait bien compte de phénomènes imprévisibles (et ça ne marche pas si mal).

## La notion de hasard. . .

- ▶ Qu'est-ce que le hasard ? Est-ce que ça existe, d'ailleurs, ou est-ce que ça ne serait pas un mot qu'on utilise pour camoufler notre ignorance, ou notre incapacité à "calculer assez précisément" ce qui va se passer ?
- ▶ Ce sont des questions qui peuvent être intéressantes, mais qui *ne sont pas notre sujet* ; dans la pratique, *on fait comme si* la théorie des probabilités rendait bien compte de phénomènes imprévisibles (et ça ne marche pas si mal).
- ▶ En gros, les tentatives de définitions de la notion de hasard ont tendance à se mordre la queue.

## La notion de hasard. . .

- ▶ Qu'est-ce que le hasard ? Est-ce que ça existe, d'ailleurs, ou est-ce que ça ne serait pas un mot qu'on utilise pour camoufler notre ignorance, ou notre incapacité à "calculer assez précisément" ce qui va se passer ?
- ▶ Ce sont des questions qui peuvent être intéressantes, mais qui *ne sont pas notre sujet* ; dans la pratique, *on fait comme si* la théorie des probabilités rendait bien compte de phénomènes imprévisibles (et ça ne marche pas si mal).
- ▶ En gros, les tentatives de définitions de la notion de hasard ont tendance à se mordre la queue.
- ▶ ("La probabilité de l'événement  $A$  dans une expérience, je la définis comme la limite de la proportion des réalisations de l'expérience dans lesquelles  $A$  se produit, si on répète suffisamment longtemps l'expérience")

## La notion de hasard...

- ▶ Qu'est-ce que le hasard ? Est-ce que ça existe, d'ailleurs, ou est-ce que ça ne serait pas un mot qu'on utilise pour camoufler notre ignorance, ou notre incapacité à “calculer assez précisément” ce qui va se passer ?
- ▶ Ce sont des questions qui peuvent être intéressantes, mais qui *ne sont pas notre sujet* ; dans la pratique, *on fait comme si* la théorie des probabilités rendait bien compte de phénomènes imprévisibles (et ça ne marche pas si mal).
- ▶ En gros, les tentatives de définitions de la notion de hasard ont tendance à se mordre la queue.
- ▶ (“La probabilité de l'événement  $A$  dans une expérience, je la définis comme la limite de la proportion des réalisations de l'expérience dans lesquelles  $A$  se produit, si on répète suffisamment longtemps l'expérience”)
- ▶ On évite le problème en définissant un cadre axiomatique ; “on y croit” en se persuadant que les axiomes correspondent à la notion intuitive, ce qui permet de faire confiance aux résultats que donne le calcul.

## Le vocabulaire des probabilités (important)

- ▶ **Modèle, univers** : la description d'une "expérience" dont le résultat est *a priori* incertain ("une expérience" peut en fait décrire une *suite* d'expériences)



## Le vocabulaire des probabilités (important)

- ▶ **Modèle, univers** : la description d'une "expérience" dont le résultat est *a priori* incertain ("une expérience" peut en fait décrire une *suite* d'expériences)
- ▶ **Événement** : la description, dans une expérience, de "quelque chose" qui peut se produire, ou ne pas se produire ; souvent, un événement sera défini par une *condition* sur le résultat de l'expérience

## Le vocabulaire des probabilités (important)

- ▶ **Modèle, univers** : la description d'une "expérience" dont le résultat est *a priori* incertain ("une expérience" peut en fait décrire une *suite* d'expériences)
- ▶ **Événement** : la description, dans une expérience, de "quelque chose" qui peut se produire, ou ne pas se produire ; souvent, un événement sera défini par une *condition* sur le résultat de l'expérience
- ▶ **Probabilité d'un événement** : un nombre, toujours compris entre 0 (0%, impossible) et 1 (100%, certain), et qui est censé décrire le degré de plausibilité de l'événement. Par exemple, si un événement a une probabilité de  $1/2$ , cela correspond à la situation où il est équivalent de parier sur le fait que l'événement se produira, ou sur le fait qu'il ne se produira pas.

## Le vocabulaire des probabilités (important)

- ▶ **Modèle, univers** : la description d'une "expérience" dont le résultat est *a priori* incertain ("une expérience" peut en fait décrire une *suite* d'expériences)
- ▶ **Événement** : la description, dans une expérience, de "quelque chose" qui peut se produire, ou ne pas se produire ; souvent, un événement sera défini par une *condition* sur le résultat de l'expérience
- ▶ **Probabilité d'un événement** : un nombre, toujours compris entre 0 (0%, impossible) et 1 (100%, certain), et qui est censé décrire le degré de plausibilité de l'événement. Par exemple, si un événement a une probabilité de  $1/2$ , cela correspond à la situation où il est équivalent de parier sur le fait que l'événement se produira, ou sur le fait qu'il ne se produira pas.
- ▶ On peut **combiner des événements** pour en décrire de nouveaux : "A et B" ; "A ou B, mais pas C" ; "au moins un des  $A_i$ , pour  $i$  entier positif" . . .

## Les règles (plus ou moins) intuitives

On est amené à énoncer des règles de cohérence que devraient satisfaire, collectivement, les probabilités de tous les événements résultant d'une même expérience :

- ▶ **certitude** : si un événement est considéré comme **certain**, sa probabilité devrait valoir 1 ;

## Les règles (plus ou moins) intuitives

On est amené à énoncer des règles de cohérence que devraient satisfaire, collectivement, les probabilités de tous les événements résultant d'une même expérience :

- ▶ **certitude** : si un événement est considéré comme **certain**, sa probabilité devrait valoir 1 ;
- ▶ **impossibilité** : si un événement **ne peut pas se produire**, sa probabilité devrait valoir 0 ;

# Les règles (plus ou moins) intuitives

On est amené à énoncer des règles de cohérence que devraient satisfaire, collectivement, les probabilités de tous les événements résultant d'une même expérience :

- ▶ **certitude** : si un événement est considéré comme **certain**, sa probabilité devrait valoir 1 ;
- ▶ **impossibilité** : si un événement **ne peut pas se produire**, sa probabilité devrait valoir 0 ;
- ▶ **monotonie** : si deux événements  $A$  et  $B$  sont tels que  **$A$  ne peut pas se produire sans que  $B$  se produise** ( $A$  entraîne automatiquement  $B$ ), alors la probabilité de  $B$  devrait être au moins égale à celle de  $A$  ;

## Les règles (plus ou moins) intuitives

On est amené à énoncer des règles de cohérence que devraient satisfaire, collectivement, les probabilités de tous les événements résultant d'une même expérience :

- ▶ **certitude** : si un événement est considéré comme **certain**, sa probabilité devrait valoir 1 ;
- ▶ **impossibilité** : si un événement **ne peut pas se produire**, sa probabilité devrait valoir 0 ;
- ▶ **monotonie** : si deux événements  $A$  et  $B$  sont tels que  **$A$  ne peut pas se produire sans que  $B$  se produise** ( $A$  entraîne automatiquement  $B$ ), alors la probabilité de  $B$  devrait être au moins égale à celle de  $A$  ;
- ▶ **additivité** : si deux (ou plus) événements sont **incompatibles entre eux** (il est impossible que plus d'un d'entre eux se produise ensemble), la probabilité qu'*au moins un d'entre eux se produise* devrait être la *somme* de leurs probabilités respectives.

# Notion d'indépendance entre événements

- ▶ **indépendance** : (à ce stade : notion floue) si deux événements  $A$  et  $B$  sont tels que le fait que  $A$  se produise (ou pas), n'a aucune influence sur le fait que  $B$  se produise, alors la probabilité que  $A$  et  $B$  se produisent tous les deux devrait être le *produit* de leurs probabilités.



# Notion d'indépendance entre événements

- ▶ **indépendance** : (à ce stade : notion floue) si deux événements  $A$  et  $B$  sont tels que le fait que  $A$  se produise (ou pas), n'a aucune influence sur le fait que  $B$  se produise, alors la probabilité que  $A$  et  $B$  se produisent tous les deux devrait être le *produit* de leurs probabilités.
- ▶ **Exemple** : Si 50% des gens préfèrent le vélo à la marche à pied, et que 20% des gens préfèrent la télé au cinéma, on peut prédire que 10% des gens préfèrent le vélo à la marche **et** la télé au cinéma, **mais pour cela, on fait l'hypothèse que les choix vélo/marche n'influent pas sur les choix télé/ciné.**

# Notion d'indépendance entre événements

- ▶ **indépendance** : (à ce stade : notion floue) si deux événements  $A$  et  $B$  sont tels que le fait que  $A$  se produise (ou pas), n'a aucune influence sur le fait que  $B$  se produise, alors la probabilité que  $A$  et  $B$  se produisent tous les deux devrait être le *produit* de leurs probabilités.
- ▶ **Exemple** : Si 50% des gens préfèrent le vélo à la marche à pied, et que 20% des gens préfèrent la télé au cinéma, on peut prédire que 10% des gens préfèrent le vélo à la marche **et** la télé au cinéma, **mais pour cela, on fait l'hypothèse que les choix vélo/marche n'influent pas sur les choix télé/ciné.**
- ▶ Plus prosaïquement : dans les situations simples qu'on appellera **indépendance**, la probabilité que **plusieurs événements se réalisent tous** sera le **produit** de leurs probabilités respectives.

# Notion d'indépendance entre événements

- ▶ **indépendance** : (à ce stade : notion floue) si deux événements  $A$  et  $B$  sont tels que le fait que  $A$  se produise (ou pas), n'a aucune influence sur le fait que  $B$  se produise, alors la probabilité que  $A$  et  $B$  se produisent tous les deux devrait être le *produit* de leurs probabilités.
- ▶ **Exemple** : Si 50% des gens préfèrent le vélo à la marche à pied, et que 20% des gens préfèrent la télé au cinéma, on peut prédire que 10% des gens préfèrent le vélo à la marche **et** la télé au cinéma, **mais pour cela, on fait l'hypothèse que les choix vélo/marche n'influent pas sur les choix télé/ciné.**
- ▶ Plus prosaïquement : dans les situations simples qu'on appellera **indépendance**, la probabilité que **plusieurs événements se réalisent tous** sera le **produit** de leurs probabilités respectives.
- ▶ (Mais ce n'est pas systématiquement le cas !)

# Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroter ses éléments de 1 à  $n$ , pour un certain entier  $n$ , sans en laisser de côté), ou **infini** (tous les autres cas).

# Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroter ses éléments de 1 à  $n$ , pour un certain entier  $n$ , sans en laisser de côté), ou **infini** (tous les autres cas).
- ▶ Exemples d'ensembles infinis :  $\mathbb{N}$  (entiers naturels),  $\mathbb{Z}$  (entiers relatifs),  $\mathbb{R}$  (nombres réels),  $[0, 1]$  (intervalle); l'ensemble des squelettes d'arbres binaires complets est également infini.

# Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroter ses éléments de 1 à  $n$ , pour un certain entier  $n$ , sans en laisser de côté), ou **infini** (tous les autres cas).
- ▶ Exemples d'ensembles infinis :  $\mathbb{N}$  (entiers naturels),  $\mathbb{Z}$  (entiers relatifs),  $\mathbb{R}$  (nombres réels),  $[0, 1]$  (intervalle); l'ensemble des squelettes d'arbres binaires complets est également infini.
- ▶ Une notion importante, notamment en théorie des probabilités, est celle d'ensemble **dénombrable** :

## Définition

Un ensemble infini  $E$  est **dénombrable** s'il est possible de numéroter ses éléments au moyen des entiers naturels, sans en laisser de côté; *i.e.* s'il existe une **bijection** entre  $\mathbb{N}$  et  $E$ .

# Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroter ses éléments de 1 à  $n$ , pour un certain entier  $n$ , sans en laisser de côté), ou **infini** (tous les autres cas).
- ▶ Exemples d'ensembles infinis :  $\mathbb{N}$  (entiers naturels),  $\mathbb{Z}$  (entiers relatifs),  $\mathbb{R}$  (nombres réels),  $[0, 1]$  (intervalle) ; l'ensemble des squelettes d'arbres binaires complets est également infini.
- ▶ Une notion importante, notamment en théorie des probabilités, est celle d'ensemble **dénombrable** :

## Définition

Un ensemble infini  $E$  est **dénombrable** s'il est possible de numéroter ses éléments au moyen des entiers naturels, sans en laisser de côté ; *i.e.* s'il existe une **bijection** entre  $\mathbb{N}$  et  $E$ .

- ▶ Exemples d'ensembles dénombrables :  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  ; l'ensemble des *suites finies* d'entiers ; l'ensemble des squelettes d'arbres binaires complets.

# Dénombrabilité

- ▶ Un ensemble peut être **fini** (s'il est vide, ou qu'on peut numéroter ses éléments de 1 à  $n$ , pour un certain entier  $n$ , sans en laisser de côté), ou **infini** (tous les autres cas).
- ▶ Exemples d'ensembles infinis :  $\mathbb{N}$  (entiers naturels),  $\mathbb{Z}$  (entiers relatifs),  $\mathbb{R}$  (nombres réels),  $[0, 1]$  (intervalle); l'ensemble des squelettes d'arbres binaires complets est également infini.
- ▶ Une notion importante, notamment en théorie des probabilités, est celle d'ensemble **dénombrable** :

## Définition

Un ensemble infini  $E$  est **dénombrable** s'il est possible de numéroter ses éléments au moyen des entiers naturels, sans en laisser de côté; *i.e.* s'il existe une **bijection** entre  $\mathbb{N}$  et  $E$ .

- ▶ Exemples d'ensembles dénombrables :  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ; l'ensemble des *suites finies* d'entiers; l'ensemble des squelettes d'arbres binaires complets.
- ▶ Exemples d'ensembles **non** dénombrables :  $\mathbb{R}$ ,  $[0, 1]$ ; l'ensemble des *suites infinies* d'entiers.



# Comment on sait si un ensemble est dénombrable ?

On admet les propriétés suivantes (“non dénombrable” veut dire infini et non dénombrable) :

- ▶ Si  $E$  est un ensemble dénombrable, et que  $A \subset E$ , alors  $A$  est soit fini, soit dénombrable.
- ▶ (Contraposée) Si  $A$  est non dénombrable et que  $A \subset B$ , alors  $B$  est non dénombrable.
- ▶ S’il existe une **injection** de  $E$  vers  $\mathbb{N}$  (ou un autre ensemble dénombrable), alors  $E$  est soit fini, soit dénombrable.
- ▶ S’il existe une **surjection** de  $\mathbb{N}$  vers  $E$ , alors  $E$  est soit fini, soit dénombrable.
- ▶ Si  $E$  est un ensemble infini, alors l’ensemble  $\text{Parties}(E)$  des **parties** de  $E$ , est non dénombrable.

## Probabilités discrètes

La notion importante est celle, abstraite, d'*espace de probabilités*, qui traduit sous forme d'axiomes les intuitions qu'on a développées.

- ▶ **univers** : un ensemble  $\Omega$  (dans la pratique,  $\Omega$  sera presque toujours *fini* ou *dénombrable*)

## Probabilités discrètes

La notion importante est celle, abstraite, d'*espace de probabilités*, qui traduit sous forme d'axiomes les intuitions qu'on a développées.

- ▶ **univers** : un ensemble  $\Omega$  (dans la pratique,  $\Omega$  sera presque toujours *fini* ou *dénombrable*)
- ▶ les éléments de  $\Omega$  sont parfois appelés *événements élémentaires* ;

## Probabilités discrètes

La notion importante est celle, abstraite, d'*espace de probabilités*, qui traduit sous forme d'axiomes les intuitions qu'on a développées.

- ▶ **univers** : un ensemble  $\Omega$  (dans la pratique,  $\Omega$  sera presque toujours *fini* ou *dénombrable*)
- ▶ les éléments de  $\Omega$  sont parfois appelés *événements élémentaires* ;
- ▶ **événement** : on appelle événement, toute partie de  $\Omega$  (*i.e.* un ensemble d'événements élémentaires) ;

# Probabilités discrètes

La notion importante est celle, abstraite, d'*espace de probabilités*, qui traduit sous forme d'axiomes les intuitions qu'on a développées.

- ▶ **univers** : un ensemble  $\Omega$  (dans la pratique,  $\Omega$  sera presque toujours *fini* ou *dénombrable*)
- ▶ les éléments de  $\Omega$  sont parfois appelés *événements élémentaires* ;
- ▶ **événement** : on appelle événement, toute partie de  $\Omega$  (*i.e.* un ensemble d'événements élémentaires) ;
- ▶ **loi de probabilité sur  $\Omega$**  : une fonction  $\mathbb{P} : \text{Parties}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , qui doit satisfaire à certaines règles :
  - ▶ **positivité** : pour tout  $A \subset \Omega$ ,  $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$  ;
  - ▶  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  ;
  - ▶ **additivité** : quels que soient les événements  $A$  et  $B$ , **si**  $A$  et  $B$  sont disjoints ( $A \cap B = \emptyset$ ), **alors** on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

## Probabilités discrètes

La notion importante est celle, abstraite, d'*espace de probabilités*, qui traduit sous forme d'axiomes les intuitions qu'on a développées.

- ▶ **univers** : un ensemble  $\Omega$  (dans la pratique,  $\Omega$  sera presque toujours *fini* ou *dénombrable*)
- ▶ les éléments de  $\Omega$  sont parfois appelés *événements élémentaires* ;
- ▶ **événement** : on appelle événement, toute partie de  $\Omega$  (*i.e.* un ensemble d'événements élémentaires) ;
- ▶ **loi de probabilité sur  $\Omega$**  : une fonction  $\mathbb{P} : \text{Parties}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , qui doit satisfaire à certaines règles :
  - ▶ **positivité** : pour tout  $A \subset \Omega$ ,  $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$  ;
  - ▶  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  ;
  - ▶ **additivité** : quels que soient les événements  $A$  et  $B$ , **si**  $A$  et  $B$  sont disjoints ( $A \cap B = \emptyset$ ), **alors** on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

- ▶ (en fait on demande une condition **plus forte**, la "sigma-additivité")

## Sigma-additivité

La condition de sigma-additivité est une extension de celle d'additivité : la fonction  $\mathbb{P}$ , définie sur les parties de  $\Omega$ , est sigma-additive, si

- ▶ pour tout entier  $n \geq 0$ , pour toute famille de  $n$  événements  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ , si les  $A_i$  sont deux à deux disjoints, alors

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

## Sigma-additivité

La condition de sigma-additivité est une extension de celle d'additivité : la fonction  $\mathbb{P}$ , définie sur les parties de  $\Omega$ , est sigma-additive, si

- ▶ pour tout entier  $n \geq 0$ , pour toute famille de  $n$  événements  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ , si les  $A_i$  sont deux à deux disjoints, alors

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

- ▶ pour toute famille *dénombrable* d'événements  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , si les  $A_i$  sont deux à deux disjoints ( $A_i \cap A_j = \emptyset$  quand  $i \neq j$ ), alors on a

$$\mathbb{P}(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$



## Sigma-additivité

La condition de sigma-additivité est une extension de celle d'additivité : la fonction  $\mathbb{P}$ , définie sur les parties de  $\Omega$ , est sigma-additive, si

- ▶ pour tout entier  $n \geq 0$ , pour toute famille de  $n$  événements  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ , si les  $A_i$  sont deux à deux disjoints, alors

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

- ▶ pour toute famille *dénombrable* d'événements  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , si les  $A_i$  sont deux à deux disjoints ( $A_i \cap A_j = \emptyset$  quand  $i \neq j$ ), alors on a

$$\mathbb{P}(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

- ▶ En fait, l'additivité (pour 2 événements) entraîne l'additivité (pour  $n$  événements) ; et le cas de familles infinies dénombrables entraîne le cas de 2 événements ; **mais** le cas de 2 événements ne suffit pas pour entraîner le cas dénombrable.

## Preuve : sigma-additivité $\implies$ additivité

On suppose que la fonction  $\mathbb{P}$  est telle que, pour toute famille  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'événements deux à deux disjoints, on ait  $\mathbb{P}(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ ; et on prouve l'additivité pour deux événements disjoints.

## Preuve : sigma-additivité $\implies$ additivité

On suppose que la fonction  $\mathbb{P}$  est telle que, pour toute famille  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'événements deux à deux disjoints, on ait  $\mathbb{P}(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ ; et on prouve l'additivité pour deux événements disjoints.

Soient donc  $A$  et  $B$  deux événements disjoints; on pose  $A_0 = A$ ,  $A_1 = B$ , et pour  $i \geq 2$ ,  $A_i = \emptyset$ .

## Preuve : sigma-additivité $\implies$ additivité

On suppose que la fonction  $\mathbb{P}$  est telle que, pour toute famille  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'événements deux à deux disjoints, on ait  $\mathbb{P}(\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ ; et on prouve l'additivité pour deux événements disjoints.

Soient donc  $A$  et  $B$  deux événements disjoints; on pose  $A_0 = A$ ,  $A_1 = B$ , et pour  $i \geq 2$ ,  $A_i = \emptyset$ . Les  $A_i$  sont bien deux à deux disjoints, et on a  $\cup_i A_i = A \cup B$ , et  $\mathbb{P}(A \cup B) = \lim_n (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \sum_{i=2}^n 0) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .

## Preuve : additivité pour 2 $\implies$ pour $n$

- ▶ Convenons d'appeler " $n$ -additive" une fonction sur les parties de  $\Omega$ , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly  $n$  parties deux à deux disjointes.

## Preuve : additivité pour 2 $\implies$ pour $n$

- ▶ Convenons d'appeler " $n$ -additive" une fonction sur les parties de  $\Omega$ , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly  $n$  parties deux à deux disjointes.
- ▶ On prouve que, si  $\mathbb{P}$  est 2-additive, alors pour tout  $n \geq 0$ , elle est également  $n$ -additive.

## Preuve : additivité pour 2 $\implies$ pour $n$

- ▶ Convenons d'appeler " $n$ -additive" une fonction sur les parties de  $\Omega$ , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly  $n$  parties deux à deux disjointes.
- ▶ On prouve que, si  $\mathbb{P}$  est 2-additive, alors pour tout  $n \geq 0$ , elle est également  $n$ -additive.
- ▶ Par récurrence sur  $n$  : posons  $H_n$ , "toute fonction 2-additive est  $k$ -additive pour tout  $2 \leq k \leq n$ ".

## Preuve : additivité pour 2 $\implies$ pour $n$

- ▶ Convenons d'appeler " $n$ -additive" une fonction sur les parties de  $\Omega$ , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly  $n$  parties deux à deux disjointes.
- ▶ On prouve que, si  $\mathbb{P}$  est 2-additive, alors pour tout  $n \geq 0$ , elle est également  $n$ -additive.
- ▶ Par récurrence sur  $n$  : posons  $H_n$ , "toute fonction 2-additive est  $k$ -additive pour tout  $2 \leq k \leq n$ ".
- ▶  $H_2$  est trivialement vraie (toute fonction 2-additive, est 2-additive).



## Preuve : additivité pour 2 $\implies$ pour $n$

- ▶ Convenons d'appeler " $n$ -additive" une fonction sur les parties de  $\Omega$ , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly  $n$  parties deux à deux disjointes.
- ▶ On prouve que, si  $\mathbb{P}$  est 2-additive, alors pour tout  $n \geq 0$ , elle est également  $n$ -additive.
- ▶ Par récurrence sur  $n$  : posons  $H_n$ , "toute fonction 2-additive est  $k$ -additive pour tout  $2 \leq k \leq n$ ".
- ▶  $H_2$  est trivialement vraie (toute fonction 2-additive, est 2-additive).
- ▶ Soit  $n \geq 2$  ; supposons  $H_n$  vraie, et montrons  $H_{n+1}$ .

## Preuve : additivité pour 2 $\implies$ pour $n$

- ▶ Convenons d'appeler " $n$ -additive" une fonction sur les parties de  $\Omega$ , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly  $n$  parties deux à deux disjointes.
- ▶ On prouve que, si  $\mathbb{P}$  est 2-additive, alors pour tout  $n \geq 0$ , elle est également  $n$ -additive.
- ▶ Par récurrence sur  $n$  : posons  $H_n$ , "toute fonction 2-additive est  $k$ -additive pour tout  $2 \leq k \leq n$ ".
- ▶  $H_2$  est trivialement vraie (toute fonction 2-additive, est 2-additive).
- ▶ Soit  $n \geq 2$  ; supposons  $H_n$  vraie, et montrons  $H_{n+1}$ .
- ▶ Soient  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ ,  $n + 1$  ensembles deux à deux disjoints ; il faut montrer  $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)$ .

## Preuve : additivité pour 2 $\implies$ pour $n$

- ▶ Convenons d'appeler " $n$ -additive" une fonction sur les parties de  $\Omega$ , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly  $n$  parties deux à deux disjointes.
- ▶ On prouve que, si  $\mathbb{P}$  est 2-additive, alors pour tout  $n \geq 0$ , elle est également  $n$ -additive.
- ▶ Par récurrence sur  $n$  : posons  $H_n$ , "toute fonction 2-additive est  $k$ -additive pour tout  $2 \leq k \leq n$ ".
- ▶  $H_2$  est trivialement vraie (toute fonction 2-additive, est 2-additive).
- ▶ Soit  $n \geq 2$  ; supposons  $H_n$  vraie, et montrons  $H_{n+1}$ .
- ▶ Soient  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ ,  $n + 1$  ensembles deux à deux disjoints ; il faut montrer  $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)$ .
- ▶ Comme  $\mathbb{P}$  est 2-additive, on a  $\mathbb{P}(A_n \cup A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1})$ .

## Preuve : additivité pour 2 $\implies$ pour $n$

- ▶ Convenons d'appeler " $n$ -additive" une fonction sur les parties de  $\Omega$ , qui satisfait la condition d'additivité pour toutes les familles d'exactly  $n$  parties deux à deux disjointes.
- ▶ On prouve que, si  $\mathbb{P}$  est 2-additive, alors pour tout  $n \geq 0$ , elle est également  $n$ -additive.
- ▶ Par récurrence sur  $n$  : posons  $H_n$ , "toute fonction 2-additive est  $k$ -additive pour tout  $2 \leq k \leq n$ ".
- ▶  $H_2$  est trivialement vraie (toute fonction 2-additive, est 2-additive).
- ▶ Soit  $n \geq 2$  ; supposons  $H_n$  vraie, et montrons  $H_{n+1}$ .
- ▶ Soient  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ ,  $n + 1$  ensembles deux à deux disjoints ; il faut montrer  $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)$ .
- ▶ Comme  $\mathbb{P}$  est 2-additive, on a  $\mathbb{P}(A_n \cup A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1})$ .
- ▶ On pose, pour  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $B_i = A_i$  ; et  $B_n = A_n \cup A_{n+1}$  ; comme  $\mathbb{P}$  est  $n$ -additive, on applique cette propriété aux  $B_i$ , et on conclut.

## Retour sur la définition

- ▶ La règle de sigma-additivité est la plus complexe ; dans les cas où  $\Omega$  est un ensemble *fini*, la règle plus simple d'**additivité** suffit : si  $A$  et  $B$  sont des événements et qu'on a  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$  (qui s'étend alors à n'importe quel nombre fini  $n$  d'événements)

## Retour sur la définition

- ▶ La règle de sigma-additivité est la plus complexe ; dans les cas où  $\Omega$  est un ensemble *fini*, la règle plus simple d'**additivité** suffit : si  $A$  et  $B$  sont des événements et qu'on a  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$  (qui s'étend alors à n'importe quel nombre fini  $n$  d'événements)
- ▶ Dans les cas d'un univers infini, il faudrait pour faire les choses proprement, manipuler des limites de sommes ; pour les cas dont on a besoin, on admettra que "les calculs se passent bien" (tout peut être rendu rigoureux)

## Retour sur la définition

- ▶ La règle de sigma-additivité est la plus complexe ; dans les cas où  $\Omega$  est un ensemble *fini*, la règle plus simple d'**additivité** suffit : si  $A$  et  $B$  sont des événements et qu'on a  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$  (qui s'étend alors à n'importe quel nombre fini  $n$  d'événements)
- ▶ Dans les cas d'un univers infini, il faudrait pour faire les choses proprement, manipuler des limites de sommes ; pour les cas dont on a besoin, on admettra que "les calculs se passent bien" (tout peut être rendu rigoureux)
- ▶ **Remarque importante** : pour un univers donné, la notion de probabilité n'est pas intrinsèque, **elle dépend du choix** qu'on fait de la fonction de probabilité.

## Retour sur la définition

- ▶ La règle de sigma-additivité est la plus complexe ; dans les cas où  $\Omega$  est un ensemble *fini*, la règle plus simple d'**additivité** suffit : si  $A$  et  $B$  sont des événements et qu'on a  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$  (qui s'étend alors à n'importe quel nombre fini  $n$  d'événements)
- ▶ Dans les cas d'un univers infini, il faudrait pour faire les choses proprement, manipuler des limites de sommes ; pour les cas dont on a besoin, on admettra que "les calculs se passent bien" (tout peut être rendu rigoureux)
- ▶ **Remarque importante** : pour un univers donné, la notion de probabilité n'est pas intrinsèque, **elle dépend du choix** qu'on fait de la fonction de probabilité.
- ▶ On note qu'il n'y a pas de règle qui parle d'indépendance ! La formule par le produit de probabilités va servir à *définir* l'indépendance.



## Le problème de la modélisation

- ▶ Souvent, quand on veut faire un calcul de probabilités, on a en tête une situation donnée, présentant de l'incertitude, et qu'on souhaite modéliser (lancer d'un dé, sélection d'un individu dans une population, événement futur donc imprévisible).

# Le problème de la modélisation

- ▶ Souvent, quand on veut faire un calcul de probabilités, on a en tête une situation donnée, présentant de l'incertitude, et qu'on souhaite modéliser (lancer d'un dé, sélection d'un individu dans une population, événement futur donc imprévisible).
- ▶ **Modéliser** l'expérience, c'est décrire un univers  $\Omega$  dans lequel on est capable d'associer à chaque situation qui nous intéresse, un événement  $A \subset \Omega$ , **et** décrire également la fonction de probabilité  $\mathbb{P}$  qui correspond.

# Le problème de la modélisation

- ▶ Souvent, quand on veut faire un calcul de probabilités, on a en tête une situation donnée, présentant de l'incertitude, et qu'on souhaite modéliser (lancer d'un dé, sélection d'un individu dans une population, événement futur donc imprévisible).
- ▶ **Modéliser** l'expérience, c'est décrire un univers  $\Omega$  dans lequel on est capable d'associer à chaque situation qui nous intéresse, un événement  $A \subset \Omega$ , **et** décrire également la fonction de probabilité  $\mathbb{P}$  qui correspond.
- ▶ Il faut bien comprendre que **l'univers  $\Omega$ , et la fonction de probabilité, qui permettent de modéliser la situation, ne sont pas définis de manière unique** ; même si, souvent, il y a un choix qui semble plus naturel que d'autres.

# Le problème de la modélisation

- ▶ Souvent, quand on veut faire un calcul de probabilités, on a en tête une situation donnée, présentant de l'incertitude, et qu'on souhaite modéliser (lancer d'un dé, sélection d'un individu dans une population, événement futur donc imprévisible).
- ▶ **Modéliser** l'expérience, c'est décrire un univers  $\Omega$  dans lequel on est capable d'associer à chaque situation qui nous intéresse, un événement  $A \subset \Omega$ , **et** décrire également la fonction de probabilité  $\mathbb{P}$  qui correspond.
- ▶ Il faut bien comprendre que **l'univers  $\Omega$ , et la fonction de probabilité, qui permettent de modéliser la situation, ne sont pas définis de manière unique** ; même si, souvent, il y a un choix qui semble plus naturel que d'autres.
- ▶ En revanche, si la situation modélisée est bien comprise, le résultat des calculs de probabilités qu'on va faire sur des événements définis en fonction du "monde modélisé", **ne doit pas dépendre** de la modélisation.

## Un exemple de modélisation

- ▶ On veut modéliser l'expérience suivante : on lance une pièce équilibrée, et on observe le résultat ; si elle tombe côté Pile, on s'arrête ; si elle tombe côté Face, on la relance et on observe également le résultat.

## Un exemple de modélisation

- ▶ On veut modéliser l'expérience suivante : on lance une pièce équilibrée, et on observe le résultat ; si elle tombe côté Pile, on s'arrête ; si elle tombe côté Face, on la relance et on observe également le résultat.
- ▶ On a trois résultats distinguables :

## Un exemple de modélisation

- ▶ On veut modéliser l'expérience suivante : on lance une pièce équilibrée, et on observe le résultat ; si elle tombe côté Pile, on s'arrête ; si elle tombe côté Face, on la relance et on observe également le résultat.
- ▶ On a trois résultats distinguables :
  - ▶  $P$  : Le premier lancer donne Pile ;

## Un exemple de modélisation

- ▶ On veut modéliser l'expérience suivante : on lance une pièce équilibrée, et on observe le résultat ; si elle tombe côté Pile, on s'arrête ; si elle tombe côté Face, on la relance et on observe également le résultat.
- ▶ On a trois résultats distinguables :
  - ▶  $P$  : Le premier lancer donne Pile ;
  - ▶  $FP$  : Le premier lancer donne Face, le second donne Pile ;



## Un exemple de modélisation

- ▶ On veut modéliser l'expérience suivante : on lance une pièce équilibrée, et on observe le résultat ; si elle tombe côté Pile, on s'arrête ; si elle tombe côté Face, on la relance et on observe également le résultat.
- ▶ On a trois résultats distinguables :
  - ▶  $P$  : Le premier lancer donne Pile ;
  - ▶  $FP$  : Le premier lancer donne Face, le second donne Pile ;
  - ▶  $FF$  : Le premier lancer donne Face, le second donne Face.

## Un exemple de modélisation

- ▶ On veut modéliser l'expérience suivante : on lance une pièce équilibrée, et on observe le résultat ; si elle tombe côté Pile, on s'arrête ; si elle tombe côté Face, on la relance et on observe également le résultat.
- ▶ On a trois résultats distinguables :
  - ▶  $P$  : Le premier lancer donne Pile ;
  - ▶  $FP$  : Le premier lancer donne Face, le second donne Pile ;
  - ▶  $FF$  : Le premier lancer donne Face, le second donne Face.
- ▶ Premier modèle :  $\Omega = \{a, b, c\}$ , avec comme événements  $P = \{a\}$ ,  $FP = \{b\}$ ,  $FF = \{c\}$  (quelle serait la fonction  $\mathbb{P}$  ?)

# Un exemple de modélisation

- ▶ On veut modéliser l'expérience suivante : on lance une pièce équilibrée, et on observe le résultat ; si elle tombe côté Pile, on s'arrête ; si elle tombe côté Face, on la relance et on observe également le résultat.
- ▶ On a trois résultats distinguables :
  - ▶  $P$  : Le premier lancer donne Pile ;
  - ▶  $FP$  : Le premier lancer donne Face, le second donne Pile ;
  - ▶  $FF$  : Le premier lancer donne Face, le second donne Face.
- ▶ Premier modèle :  $\Omega = \{a, b, c\}$ , avec comme événements  $P = \{a\}$ ,  $FP = \{b\}$ ,  $FF = \{c\}$  (quelle serait la fonction  $\mathbb{P}$  ?)
- ▶ Autre modèle possible :  $\Omega' = \{(p, p), (p, f), (f, p), (f, f)\}$ , avec  $P = \{(p, p), (p, f)\}$ ,  $FP = \{(f, p)\}$ ,  $FF = \{(f, f)\}$  (semble étrange ? la fonction  $\mathbb{P}'$  est beaucoup plus simple à décrire)

## Pile ou face (suite)

Définition de la fonction de probabilités :

- ▶ On estime avoir une chance sur deux que la première pièce tombe côté Pile :  $\mathbb{P}(P) = 1/2$

## Pile ou face (suite)

Définition de la fonction de probabilités :

- ▶ On estime avoir une chance sur deux que la première pièce tombe côté Pile :  $\mathbb{P}(P) = 1/2$
- ▶ On estime avoir une chance sur quatre que la première pièce tombe côté Pile et la seconde côté Face :  
 $\mathbb{P}(FP) = 1/4 = \mathbb{P}(FF)$ .

## Pile ou face (suite)

Définition de la fonction de probabilités :

- ▶ On estime avoir une chance sur deux que la première pièce tombe côté Pile :  $\mathbb{P}(P) = 1/2$
- ▶ On estime avoir une chance sur quatre que la première pièce tombe côté Pile et la seconde côté Face :  
 $\mathbb{P}(FP) = 1/4 = \mathbb{P}(FF)$ .
- ▶ Dans le cas de l'univers  $\Omega'$ , on peut définir  $\mathbb{P}'$  sur toute partie de  $\Omega'$  par  $\mathbb{P}'(A) = \#A/4$  ("si on lançait la deuxième pièce aussi lorsque la première donnait Pile, on aurait une chance sur 4 d'obtenir Pile puis Face")

## Pile ou face (suite)

Définition de la fonction de probabilités :

- ▶ On estime avoir une chance sur deux que la première pièce tombe côté Pile :  $\mathbb{P}(P) = 1/2$
- ▶ On estime avoir une chance sur quatre que la première pièce tombe côté Pile et la seconde côté Face :  
 $\mathbb{P}(FP) = 1/4 = \mathbb{P}(FF)$ .
- ▶ Dans le cas de l'univers  $\Omega'$ , on peut définir  $\mathbb{P}'$  sur toute partie de  $\Omega'$  par  $\mathbb{P}'(A) = \#A/4$  ("si on lançait la deuxième pièce aussi lorsque la première donnait Pile, on aurait une chance sur 4 d'obtenir Pile puis Face")
- ▶ Sur  $\Omega'$ , la fonction de probabilités  $\mathbb{P}'$  est appelée **loi uniforme** : chaque événement élémentaire a la même probabilité.

# Description d'événements

Les opérations ensemblistes (union, intersection, différence ; complémentaire) permettent d'exprimer des **opérations logiques** sur les événements :

- ▶  $C = A \cup B$  : “ $A$  se produit, **ou**  $B$  se produit” (**Attention** : les éléments de  $C$  sont les éléments de  $A$  **et** les éléments de  $B$  ; *i.e.* les éléments de  $\Omega$  qui sont dans  $A$  **ou** dans  $B$ ...



# Description d'événements

Les opérations ensemblistes (union, intersection, différence ; complémentaire) permettent d'exprimer des **opérations logiques** sur les événements :

- ▶  $C = A \cup B$  : “ $A$  se produit, **ou**  $B$  se produit” (**Attention** : les éléments de  $C$  sont les éléments de  $A$  **et** les éléments de  $B$  ; *i.e.* les éléments de  $\Omega$  qui sont dans  $A$  **ou** dans  $B$ ...)
- ▶  $D = A \cap B$  : “ $A$  et  $B$  se produisent tous les deux”.

# Description d'événements

Les opérations ensemblistes (union, intersection, différence ; complémentaire) permettent d'exprimer des **opérations logiques** sur les événements :

- ▶  $C = A \cup B$  : “ $A$  se produit, **ou**  $B$  se produit” (**Attention** : les éléments de  $C$  sont les éléments de  $A$  **et** les éléments de  $B$  ; *i.e.* les éléments de  $\Omega$  qui sont dans  $A$  **ou** dans  $B$ ...)
- ▶  $D = A \cap B$  : “ $A$  et  $B$  se produisent tous les deux”.
- ▶  $E = A \setminus B$  : “ $A$  se produit, mais pas  $B$ ”

# Description d'événements

Les opérations ensemblistes (union, intersection, différence ; complémentaire) permettent d'exprimer des **opérations logiques** sur les événements :

- ▶  $C = A \cup B$  : “ $A$  se produit, **ou**  $B$  se produit” (**Attention** : les éléments de  $C$  sont les éléments de  $A$  **et** les éléments de  $B$  ; *i.e.* les éléments de  $\Omega$  qui sont dans  $A$  **ou** dans  $B$ ...
- ▶  $D = A \cap B$  : “ $A$  et  $B$  se produisent tous les deux”.
- ▶  $E = A \setminus B$  : “ $A$  se produit, mais pas  $B$ ”
- ▶  $F = \bar{A}$  (notation pour  $F = \Omega \setminus A$ , en considérant que  $\Omega$  est fixé) : “ $A$  ne se produit pas”.

# Description d'événements

Les opérations ensemblistes (union, intersection, différence ; complémentaire) permettent d'exprimer des **opérations logiques** sur les événements :

- ▶  $C = A \cup B$  : “ $A$  se produit, **ou**  $B$  se produit” (**Attention** : les éléments de  $C$  sont les éléments de  $A$  **et** les éléments de  $B$  ; *i.e.* les éléments de  $\Omega$  qui sont dans  $A$  **ou** dans  $B$ ...
- ▶  $D = A \cap B$  : “ $A$  et  $B$  se produisent tous les deux”.
- ▶  $E = A \setminus B$  : “ $A$  se produit, mais pas  $B$ ”
- ▶  $F = \bar{A}$  (notation pour  $F = \Omega \setminus A$ , en considérant que  $\Omega$  est fixé) : “ $A$  ne se produit pas”.
- ▶ Généralisations :  $G = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ , “un au moins des  $A_i$  se produit ;  $H = \bigcap_{i \geq 0} A_i$ , “tous les  $A_i$  se produisent”.

# Conséquences des axiomes

Les axiomes qu'on a posés entraînent des conséquences systématiques :

- ▶  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  (car  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A)$ ;  $\emptyset$  est "l'événement impossible").

# Conséquences des axiomes

Les axiomes qu'on a posés entraînent des conséquences systématiques :

- ▶  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  (car  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A)$ ;  $\emptyset$  est "l'événement impossible").
- ▶ Si  $A \subset B$ ,  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$  (car  $A$  et  $B \setminus A$  sont disjoints); en particulier  $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$ .

# Conséquences des axiomes

Les axiomes qu'on a posés entraînent des conséquences systématiques :

- ▶  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  (car  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A)$ ;  $\emptyset$  est "l'événement impossible").
- ▶ Si  $A \subset B$ ,  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$  (car  $A$  et  $B \setminus A$  sont disjoints); en particulier  $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$ .
- ▶ Si  $A$  et  $B$  ne sont pas forcément disjoints,  
 $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ ; en particulier,  
 $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .