Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique
http://www.labri.fr/perso/duchon/Enseignements/Probas/

2019-2020

Previously, on PSC...

- le vocabulaire des probabilités (univers, événement, loi de probabilités...)
- les définitions essentielles (axiomes d'une loi de probabilités)
- (en TD) quelques conséquences des définitions

Formules utiles, toujours valides

- vide : on a toujours $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

Formules utiles, toujours valides

- vide : on a toujours $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- union : pour n'importe quels événements A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;

Formules utiles, toujours valides

- vide : on a toujours $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- union : pour n'importe quels événements A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- complémentaire : pour n'importe quel événement A, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;

Formules utiles, toujours valides

- vide : on a toujours $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- union : pour n'importe quels événements A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- complémentaire : pour n'importe quel événement A, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- $A \backslash B$: pour n'importe quels événements A et B, $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$;

Formules utiles, toujours valides

- vide : on a toujours $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
- union : pour n'importe quels événements A et B, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- complémentaire : pour n'importe quel événement A, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
- $A \backslash B$: pour n'importe quels événements A et B, $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
- En particulier, monotonie : si $B \subset A$, on a bien $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$.

Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- on a défini l'ensemble des "résultats possibles" de l'expérience (les événements élémentaires) ;

Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- on a défini l'ensemble des "résultats possibles" de l'expérience (les événements élémentaires) ;
- on imagine ensuite que "quelque chose" (ou "quelqu'un") choisit un élément $x \in \Omega$ au hasard, de telle sorte que chaque élément x ait probabilité $\mathbb{P}(\{x\})$ d'être choisi ;

Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- on a défini l'ensemble des "résultats possibles" de l'expérience (les événements élémentaires) ;
- on imagine ensuite que "quelque chose" (ou "quelqu'un") choisit un élément $x \in \Omega$ au hasard, de telle sorte que chaque élément x ait probabilité $\mathbb{P}(\{x\})$ d'être choisi ;
- pour n'importe quel événement A, on considère alors que "l'événement A se produit" lorsque le x choisi est dans A

Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- on a défini l'ensemble des "résultats possibles" de l'expérience (les événements élémentaires) ;
- on imagine ensuite que "quelque chose" (ou "quelqu'un") choisit un élément $x \in \Omega$ au hasard, de telle sorte que chaque élément x ait probabilité $\mathbb{P}(\{x\})$ d'être choisi ;
- pour n'importe quel événement A, on considère alors que "l'événement A se produit" lorsque le x choisi est dans A
- et donc, "les événements A et B se produisent tous les deux" corrrespond à la condition "$x \in A$ et $x \in B$", soit $x \in A \cap B$; et "l'un au moins des événements A et B se produit" correspond à la condition "$x \in A$ ou $x \in B$", soit $x \in A \cup B$.

Interprétation

Une interprétation possible de la définition d'un espace de probabilités est la suivante :

- on a défini l'ensemble des "résultats possibles" de l'expérience (les événements élémentaires) ;
- on imagine ensuite que "quelque chose" (ou "quelqu'un") choisit un élément $x \in \Omega$ au hasard, de telle sorte que chaque élément x ait probabilité $\mathbb{P}(\{x\})$ d'être choisi ;
- pour n'importe quel événement A, on considère alors que "l'événement A se produit" lorsque le x choisi est dans A
- et donc, "les événements A et B se produisent tous les deux" corrrespond à la condition "$x \in A$ et $x \in B$", soit $x \in A \cap B$; et "l'un au moins des événements A et B se produit" correspond à la condition "$x \in A$ ou $x \in B$", soit $x \in A \cup B$.
- (*A priori*, l'espace de probabilités Ω prévu pour simuler une expérience donnée, ne permet pas de simuler la répétition de cette expérience ; en revanche, on peut concevoir un nouvel espace pour l'expérience répétée 2 fois, 3 fois...k fois...une infinité de fois.)

Quelques exemples

- **Lancer d'un dé équilibré :** on peut prendre $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et, pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \#A/6$.

Quelques exemples

- **Lancer d'un dé équilibré :** on peut prendre $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et, pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \#A/6$.
- **Tirage à pile ou face avec une pièce équilibrée :** on peut prendre $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$, avec $\mathbb{P}(\{\text{pile}\}) = \mathbb{P}(\{\text{face}\}) = 1/2$.

Quelques exemples

- **Lancer d'un dé équilibré :** on peut prendre $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et, pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \#A/6$.
- **Tirage à pile ou face avec une pièce équilibrée :** on peut prendre $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$, avec $\mathbb{P}(\{\text{pile}\}) = \mathbb{P}(\{\text{face}\}) = 1/2$.
- **Tirage deux fois, ou trois fois, à pile ou face :** on peut prendre pour Ω, les séquences de longueur 2, ou 3, à valeur dans $\{P, F\}$: par exemple, $\Omega_2 = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$ (avec quelle loi ?)

Quelques exemples

- **Lancer d'un dé équilibré :** on peut prendre $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et, pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \#A/6$.
- **Tirage à pile ou face avec une pièce équilibrée :** on peut prendre $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$, avec $\mathbb{P}(\{\text{pile}\}) = \mathbb{P}(\{\text{face}\}) = 1/2$.
- **Tirage deux fois, ou trois fois, à pile ou face :** on peut prendre pour Ω, les séquences de longueur 2, ou 3, à valeur dans $\{P, F\}$: par exemple, $\Omega_2 = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$ (avec quelle loi ?)
- **Tirage à pile ou face avec une pièce déséquilibrée :** par exemple, $\Omega = \{P, F\}$ avec $\mathbb{P}(\{P\}) = 0.6$ et $\mathbb{P}(\{F\}) = 0.4$.

Décrire une loi de probabilités

Pour décrire de manière complète une loi de probabilités $\mathbb{P}$, il faut *a priori* décrire $\mathbb{P}(A)$ pour *toute* partie A de Ω. . .(ça fait beaucoup ! et en plus il faut satisfaire les axiomes !)
Le théorème suivant nous permet de ne décrire que l'information minimale (et naturelle) : la probabilité de chaque singleton.

Théorème

Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable, et soit pour chaque $x \in \Omega$, $p(x)$ un "poids" tel que l'on ait

$$\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1.$$

Alors il existe une **unique** loi de probabilités $\mathbb{P}$ sur Ω telle que l'on ait, pour tout $x \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{x\}) = p(x)$; et cette probabilité est définie, pour toute partie $A \subset \Omega$, par

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A} p(x).$$

Preuve (dans le cas fini)

- **unicité :** si on a, pour tout x, $\mathbb{P}(\{x\}) = p(x)$, alors, pour tout $A \subset \Omega$, si on note $x_1, \ldots, x_k$ les éléments de A (avec $k = \#A$), on a, par additivité (en posant $A_i = \{x_i\}$) :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i)$$

(*i.e.*, la probabilité de tout ensemble en découle)

Preuve (dans le cas fini)

- **unicité :** si on a, pour tout x, $\mathbb{P}(\{x\}) = p(x)$, alors, pour tout $A \subset \Omega$, si on note $x_1, \ldots, x_k$ les éléments de A (avec $k = \#A$), on a, par additivité (en posant $A_i = \{x_i\}$) :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i)$$

  (*i.e.*, la probabilité de tout ensemble en découle)
- **existence :** il suffit de vérifier que la fonction $\mathbb{P}$ ainsi définie, est bien une fonction de probabilité ;

Preuve (dans le cas fini)

- **unicité :** si on a, pour tout x, $\mathbb{P}(\{x\}) = p(x)$, alors, pour tout $A \subset \Omega$, si on note $x_1, \ldots, x_k$ les éléments de A (avec $k = \#A$), on a, par additivité (en posant $A_i = \{x_i\}$) :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i)$$

  (*i.e.*, la probabilité de tout ensemble en découle)
- **existence :** il suffit de vérifier que la fonction $\mathbb{P}$ ainsi définie, est bien une fonction de probabilité ;
- par exemple, pour l'additivité : si $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$ et $B = \{x_{k+1}, \ldots, x_{k+\ell}\}$ sont disjoints, on vérifie qu'on a bien, en posant $C = A \cup B$,

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{i=1}^{k+\ell} p(x_i) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i) + \sum_{i=k+1}^{k+\ell} p(x_i) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Preuve (dans le cas fini)

- **unicité :** si on a, pour tout x, $\mathbb{P}(\{x\}) = p(x)$, alors, pour tout $A \subset \Omega$, si on note $x_1, \ldots, x_k$ les éléments de A (avec $k = \#A$), on a, par additivité (en posant $A_i = \{x_i\}$) :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i)$$

  (*i.e.*, la probabilité de tout ensemble en découle)
- **existence :** il suffit de vérifier que la fonction $\mathbb{P}$ ainsi définie, est bien une fonction de probabilité ;
- par exemple, pour l'additivité : si $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$ et $B = \{x_{k+1}, \ldots, x_{k+\ell}\}$ sont disjoints, on vérifie qu'on a bien, en posant $C = A \cup B$,

$$\mathbb{P}(C) = \sum_{i=1}^{k+\ell} p(x_i) = \sum_{i=1}^{k} p(x_i) + \sum_{i=k+1}^{k+\ell} p(x_i) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

- Les preuves dans le cas où Ω est dénombrable, demandent de manipuler des **séries** : on admet.

Extension : “proba. proportionnelle à. . .”

Une extension très utile du théorème précédent : on a des “poids” $p(x)$ pour tout $x \in \Omega$, qui sont des nombres positifs ou nuls, mais on n'a pas forcément $\sum_{x \in \Omega} p(x) = 1$.

Extension : “proba. proportionnelle à. . .”

Une extension très utile du théorème précédent : on a des “poids” $p(x)$ pour tout $x \in \Omega$, qui sont des nombres positifs ou nuls, mais on n'a pas forcément $\sum_{x\in\Omega} p(x) = 1$.
Dans ce cas, on peut **quand même** se servir des poids pour définir une loi de probabilités : on pose $C = \sum_{x\in\Omega} p(x)$, et, pour toute partie $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{C} \sum_{x\in A} p(x).$$

Extension : “proba. proportionnelle à. . .”

Une extension très utile du théorème précédent : on a des “poids” $p(x)$ pour tout $x \in \Omega$, qui sont des nombres positifs ou nuls, mais on n'a pas forcément $\sum_{x\in\Omega} p(x) = 1$.
Dans ce cas, on peut **quand même** se servir des poids pour définir une loi de probabilités : on pose $C = \sum_{x\in\Omega} p(x)$, et, pour toute partie $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{C} \sum_{x\in A} p(x).$$

(Dans le cas où Ω est **dénombrable**, ça marche aussi, mais à condition qu'on ait $C < \infty$: la série doit être convergente.)

Loi uniforme sur un ensemble fini

(On suppose ici que l'univers Ω est **fini**.)
Parmi les lois de probabilités sur un tel ensemble, la **loi uniforme** est la seule qui accorde la même probabilité à tous les singletons, *i.e.* pour tout $x \in \Omega$, $p(x) = 1/\#\Omega$.

Définition

La loi uniforme $\mathbb{P}_U$ sur Ω est définie par : pour toute partie $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}_U(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

- C'est la loi des "tirages équitables".

Loi uniforme sur un ensemble fini

(On suppose ici que l'univers Ω est **fini**.)
Parmi les lois de probabilités sur un tel ensemble, la **loi uniforme** est la seule qui accorde la même probabilité à tous les singletons, *i.e.* pour tout $x \in \Omega$, $p(x) = 1/\#\Omega$.

Définition

La loi uniforme $\mathbb{P}_U$ sur Ω est définie par : pour toute partie $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}_U(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

- C'est la loi des "tirages équitables".
- C'est ce qu'on entend par "dé équilibré" (univers : les entiers de 1 à 6), "[jeu de cartes] bien mélangé" (univers : les ordres possibles sur le paquet de cartes, *i.e.* les permutations sur un ensemble à 32, ou 52, ou 78 éléments), , "choisir uniformément" parmi un ensemble fini. . .

Espace produit

- Situation fréquente : on a une expérience “composite”, facile à décrire comme : “on effectue l'expérience $\mathcal{A}$, puis, indépendamment, l'expérience $\mathcal{B}$”.

Espace produit

- Situation fréquente : on a une expérience “composite”, facile à décrire comme : “on effectue l'expérience $\mathcal{A}$, puis, indépendamment, l'expérience $\mathcal{B}$”.
- On a une modélisation pour $\mathcal{A}$, par un espace $(\Omega_{\mathcal{A}}, \mathbb{P}_{\mathcal{A}})$; et une modélisation pour $\mathcal{B}$, par un espace $(\Omega_{\mathcal{B}}, \mathbb{P}_{\mathcal{B}})$.

Espace produit

- Situation fréquente : on a une expérience “composite”, facile à décrire comme : “on effectue l'expérience $\mathcal{A}$, puis, indépendamment, l'expérience $\mathcal{B}$”.
- On a une modélisation pour $\mathcal{A}$, par un espace $(\Omega_{\mathcal{A}}, \mathbb{P}_{\mathcal{A}})$; et une modélisation pour $\mathcal{B}$, par un espace $(\Omega_{\mathcal{B}}, \mathbb{P}_{\mathcal{B}})$.
- Soient $(p(x))_{x\in\Omega_{\mathcal{A}}}$ les poids pour la première proba, $(q(y))_{y\in\Omega_{\mathcal{B}}}$ les poids pour la deuxième.

Espace produit

- Situation fréquente : on a une expérience "composite", facile à décrire comme : "on effectue l'expérience $\mathcal{A}$, puis, indépendamment, l'expérience $\mathcal{B}$".
- On a une modélisation pour $\mathcal{A}$, par un espace $(\Omega_{\mathcal{A}}, \mathbb{P}_{\mathcal{A}})$; et une modélisation pour $\mathcal{B}$, par un espace $(\Omega_{\mathcal{B}}, \mathbb{P}_{\mathcal{B}})$.
- Soient $(p(x))_{x\in\Omega_{\mathcal{A}}}$ les poids pour la première proba, $(q(y))_{y\in\Omega_{\mathcal{B}}}$ les poids pour la deuxième.
- On peut prendre pour modéliser l'expérience composite, l'espace "produit" : $\Omega = \Omega_{\mathcal{A}} \times \Omega_{\mathcal{B}}$, avec poids $p'(x, y) = p(x)q(y)$.

Espace produit

- Situation fréquente : on a une expérience "composite", facile à décrire comme : "on effectue l'expérience $\mathcal{A}$, puis, indépendamment, l'expérience $\mathcal{B}$".
- On a une modélisation pour $\mathcal{A}$, par un espace $(\Omega_{\mathcal{A}}, \mathbb{P}_{\mathcal{A}})$; et une modélisation pour $\mathcal{B}$, par un espace $(\Omega_{\mathcal{B}}, \mathbb{P}_{\mathcal{B}})$.
- Soient $(p(x))_{x\in\Omega_{\mathcal{A}}}$ les poids pour la première proba, $(q(y))_{y\in\Omega_{\mathcal{B}}}$ les poids pour la deuxième.
- On peut prendre pour modéliser l'expérience composite, l'espace "produit" : $\Omega = \Omega_{\mathcal{A}} \times \Omega_{\mathcal{B}}$, avec poids $p'(x, y) = p(x)q(y)$.
- Si $E \subset \Omega_{\mathcal{A}}$ est un événement qui ne dépend que de la première expérience, et $F \subset \Omega_{\mathcal{B}}$ un événement qui ne dépend que de la deuxième, les événements correspondants dans l'espace produit sont $E' = E \times \Omega_{\mathcal{B}}$ et $F' = \Omega_{\mathcal{A}} \times F$

Espace produit

- Situation fréquente : on a une expérience "composite", facile à décrire comme : "on effectue l'expérience $\mathcal{A}$, puis, indépendamment, l'expérience $\mathcal{B}$".
- On a une modélisation pour $\mathcal{A}$, par un espace $(\Omega_{\mathcal{A}}, \mathbb{P}_{\mathcal{A}})$; et une modélisation pour $\mathcal{B}$, par un espace $(\Omega_{\mathcal{B}}, \mathbb{P}_{\mathcal{B}})$.
- Soient $(p(x))_{x\in\Omega_{\mathcal{A}}}$ les poids pour la première proba, $(q(y))_{y\in\Omega_{\mathcal{B}}}$ les poids pour la deuxième.
- On peut prendre pour modéliser l'expérience composite, l'espace "produit" : $\Omega = \Omega_{\mathcal{A}} \times \Omega_{\mathcal{B}}$, avec poids $p'(x, y) = p(x)q(y)$.
- Si $E \subset \Omega_{\mathcal{A}}$ est un événement qui ne dépend que de la première expérience, et $F \subset \Omega_{\mathcal{B}}$ un événement qui ne dépend que de la deuxième, les événements correspondants dans l'espace produit sont $E' = E \times \Omega_{\mathcal{B}}$ et $F' = \Omega_{\mathcal{A}} \times F$
- On a alors $E' \cap F' = E \times F$, et on vérifie qu'on a alors $\mathbb{P}(E' \cap F') = \mathbb{P}(E')\mathbb{P}(F') = \mathbb{P}_{\mathcal{A}}(E)\mathbb{P}_{\mathcal{B}}(F)$.

Un exemple d'utilisation de la loi uniforme

- Expérience : on joue 10 fois d'affilée à Pile ou Face, et on note la séquence de résultats.

Un exemple d'utilisation de la loi uniforme

- Expérience : on joue 10 fois d'affilée à Pile ou Face, et on note la séquence de résultats.
- On modélise cette expérience avec l'univers $\Omega = \{P, F\}^{10}$ (de cardinal $2^{10} = 1024$), avec la *loi uniforme* : chaque événement élémentaire s (séquence binaire de longueur 10) a un poids $p(s) = 1/1024$.

Un exemple d'utilisation de la loi uniforme

- Expérience : on joue 10 fois d'affilée à Pile ou Face, et on note la séquence de résultats.
- On modélise cette expérience avec l'univers $\Omega = \{P, F\}^{10}$ (de cardinal $2^{10} = 1024$), avec la *loi uniforme* : chaque événement élémentaire s (séquence binaire de longueur 10) a un poids $p(s) = 1/1024$.
- Quelle est la probabilité, sur les 10 tirages, de ne pas avoir obtenu deux tirages de Pile consécutifs ? (on n'exclut pas les Face consécutifs, seulement les Pile)

Un exemple d'utilisation de la loi uniforme

- Expérience : on joue 10 fois d'affilée à Pile ou Face, et on note la séquence de résultats.
- On modélise cette expérience avec l'univers $\Omega = \{P, F\}^{10}$ (de cardinal $2^{10} = 1024$), avec la *loi uniforme* : chaque événement élémentaire s (séquence binaire de longueur 10) a un poids $p(s) = 1/1024$.
- Quelle est la probabilité, sur les 10 tirages, de ne pas avoir obtenu deux tirages de Pile consécutifs ? (on n'exclut pas les Face consécutifs, seulement les Pile)
- $N/1024$, où N est le nombre de séquences binaires de longueur 10 (sur l'alphabet $\{P, F\}$) qui n'ont pas deux P consécutifs...

Un exemple d'utilisation de la loi uniforme

- Expérience : on joue 10 fois d'affilée à Pile ou Face, et on note la séquence de résultats.
- On modélise cette expérience avec l'univers $\Omega = \{P, F\}^{10}$ (de cardinal $2^{10} = 1024$), avec la *loi uniforme* : chaque événement élémentaire s (séquence binaire de longueur 10) a un poids $p(s) = 1/1024$.
- Quelle est la probabilité, sur les 10 tirages, de ne pas avoir obtenu deux tirages de Pile consécutifs ? (on n'exclut pas les Face consécutifs, seulement les Pile)
- $N/1024$, où N est le nombre de séquences binaires de longueur 10 (sur l'alphabet $\{P, F\}$) qui n'ont pas deux P consécutifs...
- Ici, N est le terme F_{10} de la suite définie par : $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, et pour $k \geq 2$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ (suite de Fibonacci), ici $F_{10} = 144$, donc une probabilité de $144/1024 = 9/64 \simeq 0.14$.

Un exemple d'utilisation de la loi uniforme

- Expérience : on joue 10 fois d'affilée à Pile ou Face, et on note la séquence de résultats.
- On modélise cette expérience avec l'univers $\Omega = \{P, F\}^{10}$ (de cardinal $2^{10} = 1024$), avec la *loi uniforme* : chaque événement élémentaire s (séquence binaire de longueur 10) a un poids $p(s) = 1/1024$.
- Quelle est la probabilité, sur les 10 tirages, de ne pas avoir obtenu deux tirages de Pile consécutifs ? (on n'exclut pas les Face consécutifs, seulement les Pile)
- $N/1024$, où N est le nombre de séquences binaires de longueur 10 (sur l'alphabet $\{P, F\}$) qui n'ont pas deux P consécutifs...
- Ici, N est le terme F_{10} de la suite définie par : $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, et pour $k \geq 2$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ (suite de Fibonacci), ici $F_{10} = 144$, donc une probabilité de $144/1024 = 9/64 \simeq 0.14$.
- (Quelle est la probabilité de n'obtenir ni deux Pile consécutifs, ni deux Face consécutifs ?)

Indépendance

- **Définition :** deux événements A et B sont indépendants, si on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Indépendance

- **Définition :** deux événements A et B sont indépendants, si on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- À ne surtout pas confondre avec deux événements incompatibles : $A \cap B = \emptyset$ (donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$).

Indépendance

- **Définition :** deux événements A et B sont indépendants, si on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- À ne surtout pas confondre avec deux événements incompatibles : $A \cap B = \emptyset$ (donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$).
- **Note :** la définition ne parle pas de causes communes, ou quoi que ce soit ; seulement de la formule.

Indépendance

- **Définition :** deux événements A et B sont indépendants, si on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- À ne surtout pas confondre avec deux événements incompatibles : $A \cap B = \emptyset$ (donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$).
- **Note :** la définition ne parle pas de causes communes, ou quoi que ce soit ; seulement de la formule.
- **Exemple important :** dans le cas de l'espace produit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, tout événement qui "vient" uniquement de Ω_1 est indépendant de tout événement qui "vient" uniquement de Ω_2.

Indépendance

- **Définition :** deux événements A et B sont indépendants, si on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- À ne surtout pas confondre avec deux événements incompatibles : $A \cap B = \emptyset$ (donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$).
- **Note :** la définition ne parle pas de causes communes, ou quoi que ce soit ; seulement de la formule.
- **Exemple important :** dans le cas de l'espace produit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, tout événement qui "vient" uniquement de Ω_1 est indépendant de tout événement qui "vient" uniquement de Ω_2.
- Mais il peut arriver qu'on découvre, par le calcul, que deux événements sont indépendants "sans qu'on le sache".

Un exemple d'indépendance

$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$ avec loi uniforme.

- On modélise deux lancers successifs d'une pièce équilibrée.

Un exemple d'indépendance

$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$ avec loi uniforme.

- On modélise deux lancers successifs d'une pièce équilibrée.
- $A = \{(P,P),(P,F)\}$: "le premier lancer donne Pile".

Un exemple d'indépendance

$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$ avec loi uniforme.

- On modélise deux lancers successifs d'une pièce équilibrée.
- $A = \{(P,P),(P,F)\}$: "le premier lancer donne Pile".
- $B = \{(P,F),(F,F)\}$: "le second lancer donne Face".

Un exemple d'indépendance

$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$ avec loi uniforme.

- On modélise deux lancers successifs d'une pièce équilibrée.
- $A = \{(P,P),(P,F)\}$: "le premier lancer donne Pile".
- $B = \{(P,F),(F,F)\}$: "le second lancer donne Face".
- $A \cap B = \{(P,F)\}$; sans surprise, A et B sont indépendants.

Un exemple d'indépendance

$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$ avec loi uniforme.

- On modélise deux lancers successifs d'une pièce équilibrée.
- $A = \{(P,P),(P,F)\}$: "le premier lancer donne Pile".
- $B = \{(P,F),(F,F)\}$: "le second lancer donne Face".
- $A \cap B = \{(P,F)\}$; sans surprise, A et B sont indépendants.
- $C = \{(P,P),(F,F)\}$: "les deux lancers donnent le même résultat".

Un exemple d'indépendance

$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$ avec loi uniforme.

- On modélise deux lancers successifs d'une pièce équilibrée.
- $A = \{(P,P),(P,F)\}$: "le premier lancer donne Pile".
- $B = \{(P,F),(F,F)\}$: "le second lancer donne Face".
- $A \cap B = \{(P,F)\}$; sans surprise, A et B sont indépendants.
- $C = \{(P,P),(F,F)\}$: "les deux lancers donnent le même résultat".
- A et C sont indépendants ; c'est déjà plus surprenant.

Un exemple d'indépendance

$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$ avec loi uniforme.

- On modélise deux lancers successifs d'une pièce équilibrée.
- $A = \{(P,P),(P,F)\}$: "le premier lancer donne Pile".
- $B = \{(P,F),(F,F)\}$: "le second lancer donne Face".
- $A \cap B = \{(P,F)\}$; sans surprise, A et B sont indépendants.
- $C = \{(P,P),(F,F)\}$: "les deux lancers donnent le même résultat".
- A et C sont indépendants ; c'est déjà plus surprenant.
- De plus, B et C sont également indépendants.

Un exemple d'indépendance

$\Omega = \{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$ avec loi uniforme.

- On modélise deux lancers successifs d'une pièce équilibrée.
- $A = \{(P,P),(P,F)\}$: "le premier lancer donne Pile".
- $B = \{(P,F),(F,F)\}$: "le second lancer donne Face".
- $A \cap B = \{(P,F)\}$; sans surprise, A et B sont indépendants.
- $C = \{(P,P),(F,F)\}$: "les deux lancers donnent le même résultat".
- A et C sont indépendants ; c'est déjà plus surprenant.
- De plus, B et C sont également indépendants.
- Par contre, $A \cap B \cap C = \emptyset$: $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Indépendance de plus de deux événements

Qu'entend-on par "A, B et C sont indépendants" ?

- . . .ce qu'on a vu précédemment : A et B indépendants, A et C indépendants, B et C indépendants ?

Indépendance de plus de deux événements

Qu'entend-on par "A, B et C sont indépendants" ?

- . . .ce qu'on a vu précédemment : A et B indépendants, A et C indépendants, B et C indépendants ?
- . . .ou une extension de la formule produit : $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$?

Indépendance de plus de deux événements

Qu'entend-on par "A, B et C sont indépendants" ?

- . . .ce qu'on a vu précédemment : A et B indépendants, A et C indépendants, B et C indépendants ?
- . . .ou une extension de la formule produit : $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$?
- . . .ou autre chose ?

Indépendance de plus de deux événements

Qu'entend-on par "A, B et C sont indépendants" ?

- . . .ce qu'on a vu précédemment : A et B indépendants, A et C indépendants, B et C indépendants ?
- . . .ou une extension de la formule produit : $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$?
- . . .ou autre chose ?
- En fait il y a deux notions différentes : indépendance deux à deux et indépendance globale.

Indépendance

On considère n événements $A_1, A_2, \ldots A_n$

- **Définition :** les n événements A_i sont deux à deux indépendants si, dès qu'on en prend deux, ils sont indépendants : pour tous i, j avec $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

Indépendance

On considère n événements $A_1, A_2, \ldots A_n$

- **Définition :** les n événements A_i sont deux à deux indépendants si, dès qu'on en prend deux, ils sont indépendants : pour tous i, j avec $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.
- **Définition :** les n événements A_i sont globalement indépendants si, dès qu'on en prend $k \leq n$ sur les n, la probabilité de leur intersection est le produit de leurs probabilités : pour tout $k \leq n$, pour tous $i_1 < i_2 \cdots < i_k$,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

Indépendance

On considère n événements $A_1, A_2, \ldots A_n$

- **Définition :** les n événements A_i sont deux à deux indépendants si, dès qu'on en prend deux, ils sont indépendants : pour tous i, j avec $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.
- **Définition :** les n événements A_i sont globalement indépendants si, dès qu'on en prend $k \leq n$ sur les n, la probabilité de leur intersection est le produit de leurs probabilités : pour tout $k \leq n$, pour tous $i_1 < i_2 \cdots < i_k$,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

- Propriété : l'indépendance globale entraîne l'indépendance 2 à 2 (mais la réciproque est fausse : voir par exemple le cas des deux pile-ou-face).