

Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique

<http://www.labri.fr/perso/duchon/Enseignements/Probas/>

2019-2020

Retour sur la notion d'indépendance

- ▶ Par définition, A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Retour sur la notion d'indépendance

- ▶ Par définition, A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- ▶ C'est symétrique : si A est indépendant de B , alors B est indépendant de A .

Retour sur la notion d'indépendance

- ▶ Par définition, A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- ▶ C'est symétrique : si A est indépendant de B , alors B est indépendant de A .
- ▶ C'est stable par complément : si A est indépendant de B , alors $\overline{A}$ est indépendant de B , A est indépendant de $\overline{B}$, $\overline{A}$ est indépendant de $\overline{B}$...

Retour sur la notion d'indépendance

- ▶ Par définition, A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- ▶ C'est symétrique : si A est indépendant de B , alors B est indépendant de A .
- ▶ C'est stable par complément : si A est indépendant de B , alors $\overline{A}$ est indépendant de B , A est indépendant de $\overline{B}$, $\overline{A}$ est indépendant de $\overline{B}$...
- ▶ **Attention** : si A est indépendant de C , et B est indépendant de C , **on ne peut pas en déduire** que $A \cap B$ est indépendant de C (même si A est indépendant de B !)

Retour sur la notion d'indépendance

- ▶ Par définition, A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- ▶ C'est symétrique : si A est indépendant de B , alors B est indépendant de A .
- ▶ C'est stable par complément : si A est indépendant de B , alors $\overline{A}$ est indépendant de B , A est indépendant de $\overline{B}$, $\overline{A}$ est indépendant de $\overline{B}$...
- ▶ **Attention** : si A est indépendant de C , et B est indépendant de C , **on ne peut pas en déduire** que $A \cap B$ est indépendant de C (même si A est indépendant de B !)
- ▶ (Ce serait vrai si on savait que A , B et C sont globalement indépendants)

Retour sur la notion d'indépendance

- ▶ Par définition, A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- ▶ C'est symétrique : si A est indépendant de B , alors B est indépendant de A .
- ▶ C'est stable par complément : si A est indépendant de B , alors $\overline{A}$ est indépendant de B , A est indépendant de $\overline{B}$, $\overline{A}$ est indépendant de $\overline{B}$...
- ▶ **Attention** : si A est indépendant de C , et B est indépendant de C , **on ne peut pas en déduire** que $A \cap B$ est indépendant de C (même si A est indépendant de B !)
- ▶ (Ce serait vrai si on savait que A , B et C sont globalement indépendants)
- ▶ Un événement de probabilité 0 ou 1, est indépendant de tout événement ; c'est la seule situation où un événement est indépendant de lui-même.

Probabilité conditionnelle

- ▶ **Notion fondamentale**, qui permet de décrire des situations où on n'a pas toute l'information.

Probabilité conditionnelle

- ▶ **Notion fondamentale**, qui permet de décrire des situations où on n'a pas toute l'information.
- ▶ Situation typique 1 :
 - ▶ Une certaine expérience a lieu ; je calcule la probabilité d'un certain événement A ("il y a 30% de chances que...")

Probabilité conditionnelle

- ▶ **Notion fondamentale**, qui permet de décrire des situations où on n'a pas toute l'information.
- ▶ Situation typique 1 :
 - ▶ Une certaine expérience a lieu ; je calcule la probabilité d'un certain événement A ("il y a 30% de chances que...")
 - ▶ J'apprends non pas que A se produit, mais qu'un **autre** événement B se produit

Probabilité conditionnelle

- ▶ **Notion fondamentale**, qui permet de décrire des situations où on n'a pas toute l'information.
- ▶ Situation typique 1 :
 - ▶ Une certaine expérience a lieu ; je calcule la probabilité d'un certain événement A ("il y a 30% de chances que...")
 - ▶ J'apprends non pas que A se produit, mais qu'un **autre** événement B se produit
 - ▶ Cela me conduit à **réévaluer** la probabilité que A se produise ("vu que B se produit, alors il y a 40% de chances que...")

Probabilité conditionnelle

- ▶ **Notion fondamentale**, qui permet de décrire des situations où on n'a pas toute l'information.
- ▶ Situation typique 1 :
 - ▶ Une certaine expérience a lieu ; je calcule la probabilité d'un certain événement A ("il y a 30% de chances que...")
 - ▶ J'apprends non pas que A se produit, mais qu'un **autre** événement B se produit
 - ▶ Cela me conduit à **réévaluer** la probabilité que A se produise ("vu que B se produit, alors il y a 40% de chances que...")
- ▶ Situation typique 2 : expérience composite

Probabilité conditionnelle

- ▶ **Notion fondamentale**, qui permet de décrire des situations où on n'a pas toute l'information.
- ▶ Situation typique 1 :
 - ▶ Une certaine expérience a lieu ; je calcule la probabilité d'un certain événement A ("il y a 30% de chances que...")
 - ▶ J'apprends non pas que A se produit, mais qu'un **autre** événement B se produit
 - ▶ Cela me conduit à **réévaluer** la probabilité que A se produise ("vu que B se produit, alors il y a 40% de chances que...")
- ▶ Situation typique 2 : expérience composite
 - ▶ Une première expérience a lieu, donnant un premier résultat (par exemple, B ou $\overline{B}$)

Probabilité conditionnelle

- ▶ **Notion fondamentale**, qui permet de décrire des situations où on n'a pas toute l'information.
- ▶ Situation typique 1 :
 - ▶ Une certaine expérience a lieu ; je calcule la probabilité d'un certain événement A ("il y a 30% de chances que...")
 - ▶ J'apprends non pas que A se produit, mais qu'un **autre** événement B se produit
 - ▶ Cela me conduit à **réévaluer** la probabilité que A se produise ("vu que B se produit, alors il y a 40% de chances que...")
- ▶ Situation typique 2 : expérience composite
 - ▶ Une première expérience a lieu, donnant un premier résultat (par exemple, B ou $\overline{B}$)
 - ▶ **Selon que B se produise ou pas**, cela change les conditions de la deuxième expérience ;

Probabilité conditionnelle

- ▶ **Notion fondamentale**, qui permet de décrire des situations où on n'a pas toute l'information.
- ▶ Situation typique 1 :
 - ▶ Une certaine expérience a lieu ; je calcule la probabilité d'un certain événement A ("il y a 30% de chances que...")
 - ▶ J'apprends non pas que A se produit, mais qu'un **autre** événement B se produit
 - ▶ Cela me conduit à **réévaluer** la probabilité que A se produise ("vu que B se produit, alors il y a 40% de chances que...")
- ▶ Situation typique 2 : expérience composite
 - ▶ Une première expérience a lieu, donnant un premier résultat (par exemple, B ou $\overline{B}$)
 - ▶ **Selon que B se produise ou pas**, cela change les conditions de la deuxième expérience ;
 - ▶ **Si B se produit**, alors la seconde expérience est telle que la probabilité de A est...

Probabilité conditionnelle

- ▶ **Notion fondamentale**, qui permet de décrire des situations où on n'a pas toute l'information.
- ▶ Situation typique 1 :
 - ▶ Une certaine expérience a lieu ; je calcule la probabilité d'un certain événement A ("il y a 30% de chances que...")
 - ▶ J'apprends non pas que A se produit, mais qu'un **autre** événement B se produit
 - ▶ Cela me conduit à **réévaluer** la probabilité que A se produise ("vu que B se produit, alors il y a 40% de chances que...")
- ▶ Situation typique 2 : expérience composite
 - ▶ Une première expérience a lieu, donnant un premier résultat (par exemple, B ou $\overline{B}$)
 - ▶ **Selon que B se produise ou pas**, cela change les conditions de la deuxième expérience ;
 - ▶ **Si B se produit**, alors la seconde expérience est telle que la probabilité de A est...
 - ▶ **Si B ne se produit pas**, alors la seconde expérience est telle que la probabilité de A est...

Probabilité conditionnelle

- ▶ **Notion fondamentale**, qui permet de décrire des situations où on n'a pas toute l'information.
- ▶ Situation typique 1 :
 - ▶ Une certaine expérience a lieu ; je calcule la probabilité d'un certain événement A ("il y a 30% de chances que...")
 - ▶ J'apprends non pas que A se produit, mais qu'un **autre** événement B se produit
 - ▶ Cela me conduit à **réévaluer** la probabilité que A se produise ("vu que B se produit, alors il y a 40% de chances que...")
- ▶ Situation typique 2 : expérience composite
 - ▶ Une première expérience a lieu, donnant un premier résultat (par exemple, B ou $\overline{B}$)
 - ▶ **Selon que B se produise ou pas**, cela change les conditions de la deuxième expérience ;
 - ▶ **Si B se produit**, alors la seconde expérience est telle que la probabilité de A est...
 - ▶ **Si B ne se produit pas**, alors la seconde expérience est telle que la probabilité de A est...
- ▶ **Dans les deux cas**, on est en train de décrire ou calculer une **probabilité conditionnelle**.

Analogie : proportions

Quand on considère un univers dont les éléments sont les individus d'une population, la probabilité d'un ensemble correspond à une **proportion**.

- ▶ Si sur une population de 200 étudiants il y a 40 gauchers, les gauchers représentent 20% de la population.

Analogie : proportions

Quand on considère un univers dont les éléments sont les individus d'une population, la probabilité d'un ensemble correspond à une **proportion**.

- ▶ Si sur une population de 200 étudiants il y a 40 gauchers, les gauchers représentent 20% de la population.
- ▶ Si dans cette population il y a 35 étudiants qui forment le groupe 1, le groupe 1 représente 17.5% de la population.

Analogie : proportions

Quand on considère un univers dont les éléments sont les individus d'une population, la probabilité d'un ensemble correspond à une **proportion**.

- ▶ Si sur une population de 200 étudiants il y a 40 gauchers, les gauchers représentent 20% de la population.
- ▶ Si dans cette population il y a 35 étudiants qui forment le groupe 1, le groupe 1 représente 17.5% de la population.
- ▶ Si je veux évaluer la proportion de gauchers dans le groupe 1, il faut compter les étudiants qui sont gauchers **et** dans le groupe 1, et diviser leur nombre par 35 (le nombre d'étudiants dans le groupe en question) ; il n'y a aucune raison que cette proportion soit de 20% comme dans l'ensemble de la population.

Analogie : proportions

Quand on considère un univers dont les éléments sont les individus d'une population, la probabilité d'un ensemble correspond à une **proportion**.

- ▶ Si sur une population de 200 étudiants il y a 40 gauchers, les gauchers représentent 20% de la population.
- ▶ Si dans cette population il y a 35 étudiants qui forment le groupe 1, le groupe 1 représente 17.5% de la population.
- ▶ Si je veux évaluer la proportion de gauchers dans le groupe 1, il faut compter les étudiants qui sont gauchers **et** dans le groupe 1, et diviser leur nombre par 35 (le nombre d'étudiants dans le groupe en question); il n'y a aucune raison que cette proportion soit de 20% comme dans l'ensemble de la population.
- ▶ (Les calculs de probabilités conditionnelles, c'est le même genre, mais avec des probabilités à la place des tailles de populations)

Probabilité conditionnelle : définition

- ▶ $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités ; B un événement, quelconque, sauf qu'on demande $\mathbb{P}(B) > 0$.

Probabilité conditionnelle : définition

- ▶ $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités ; B un événement, quelconque, sauf qu'on demande $\mathbb{P}(B) > 0$.
- ▶ Pour **tout** événement A , on définit la “probabilité de A sachant B ”, ou “probabilité de A conditionnellement à B ”, par

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Probabilité conditionnelle : définition

- ▶ $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités ; B un événement, quelconque, sauf qu'on demande $\mathbb{P}(B) > 0$.
- ▶ Pour **tout** événement A , on définit la “probabilité de A sachant B ”, ou “probabilité de A conditionnellement à B ”, par

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- ▶ Autre notation : $\mathbb{P}(A|B)$; **mais** on préfère éviter cette notation car prêtant à confusion :

Probabilité conditionnelle : définition

- ▶ $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités ; B un événement, quelconque, sauf qu'on demande $\mathbb{P}(B) > 0$.
- ▶ Pour **tout** événement A , on définit la “probabilité de A sachant B ”, ou “probabilité de A conditionnellement à B ”, par

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- ▶ Autre notation : $\mathbb{P}(A|B)$; **mais** on préfère éviter cette notation car prêtant à confusion :
 - ▶ **Il n'y a pas** d'événement $A|B$

Probabilité conditionnelle : définition

- ▶ $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités ; B un événement, quelconque, sauf qu'on demande $\mathbb{P}(B) > 0$.
- ▶ Pour **tout** événement A , on définit la “probabilité de A sachant B ”, ou “probabilité de A conditionnellement à B ”, par

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

- ▶ Autre notation : $\mathbb{P}(A|B)$; **mais** on préfère éviter cette notation car prêtant à confusion :
 - ▶ **Il n'y a pas** d'événement $A|B$
 - ▶ $\mathbb{P}_B$ est bien une fonction de probabilité comme une autre, **différente** (a priori) de $\mathbb{P}$.

$\mathbb{P}_B$ est une fonction de probabilité

- ▶ $\mathbb{P}_B(A)$ est bien définie pour toute partie $A \subset \Omega$;

$\mathbb{P}_B$ est une fonction de probabilité

- ▶ $\mathbb{P}_B(A)$ est bien définie pour toute partie $A \subset \Omega$;
- ▶ On calcule facilement $\mathbb{P}_B(\Omega)$: $\Omega \cap B = B$ donc $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(B) = 1$.

$\mathbb{P}_B$ est une fonction de probabilité

- ▶ $\mathbb{P}_B(A)$ est bien définie pour toute partie $A \subset \Omega$;
- ▶ On calcule facilement $\mathbb{P}_B(\Omega)$: $\Omega \cap B = B$ donc $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(B) = 1$.
- ▶ On vérifie l'additivité (en fait, sigma-additivité) : si E et F sont deux événements disjoints, $(E \cup F) \cap B = (E \cap B) \cup (F \cap B)$ (union disjointe), et donc

$$\mathbb{P}_B(E \cup F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap B) + \mathbb{P}(F \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(E) + \mathbb{P}_B(F)$$

$\mathbb{P}_B$ est une fonction de probabilité

- ▶ $\mathbb{P}_B(A)$ est bien définie pour toute partie $A \subset \Omega$;
- ▶ On calcule facilement $\mathbb{P}_B(\Omega)$: $\Omega \cap B = B$ donc $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(B) = 1$.
- ▶ On vérifie l'additivité (en fait, sigma-additivité) : si E et F sont deux événements disjoints, $(E \cup F) \cap B = (E \cap B) \cup (F \cap B)$ (union disjointe), et donc

$$\mathbb{P}_B(E \cup F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap B) + \mathbb{P}(F \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(E) + \mathbb{P}_B(F)$$

- ▶ **En termes de poids**, si $\mathbb{P}$ correspond à attribuer un poids $p(x)$ à chaque $x \in \Omega$, $\mathbb{P}_B$ correspond à un changement de poids : pour tout $x \in \Omega$, on définit $p'(x)$:

$\mathbb{P}_B$ est une fonction de probabilité

- ▶ $\mathbb{P}_B(A)$ est bien définie pour toute partie $A \subset \Omega$;
- ▶ On calcule facilement $\mathbb{P}_B(\Omega)$: $\Omega \cap B = B$ donc $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(B) = 1$.
- ▶ On vérifie l'additivité (en fait, sigma-additivité) : si E et F sont deux événements disjoints, $(E \cup F) \cap B = (E \cap B) \cup (F \cap B)$ (union disjointe), et donc

$$\mathbb{P}_B(E \cup F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap B) + \mathbb{P}(F \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(E) + \mathbb{P}_B(F)$$

- ▶ **En termes de poids**, si $\mathbb{P}$ correspond à attribuer un poids $p(x)$ à chaque $x \in \Omega$, $\mathbb{P}_B$ correspond à un changement de poids : pour tout $x \in \Omega$, on définit $p'(x)$:
 - ▶ si $x \in B$, $p'(x) = p(x)$;

$\mathbb{P}_B$ est une fonction de probabilité

- ▶ $\mathbb{P}_B(A)$ est bien définie pour toute partie $A \subset \Omega$;
- ▶ On calcule facilement $\mathbb{P}_B(\Omega)$: $\Omega \cap B = B$ donc $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(B) = 1$.
- ▶ On vérifie l'additivité (en fait, sigma-additivité) : si E et F sont deux événements disjoints, $(E \cup F) \cap B = (E \cap B) \cup (F \cap B)$ (union disjointe), et donc

$$\mathbb{P}_B(E \cup F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap B) + \mathbb{P}(F \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(E) + \mathbb{P}_B(F)$$

- ▶ **En termes de poids**, si $\mathbb{P}$ correspond à attribuer un poids $p(x)$ à chaque $x \in \Omega$, $\mathbb{P}_B$ correspond à un changement de poids : pour tout $x \in \Omega$, on définit $p'(x)$:
 - ▶ si $x \in B$, $p'(x) = p(x)$;
 - ▶ si $x \notin B$, $p'(x) = 0$.

$\mathbb{P}_B$ est une fonction de probabilité

- ▶ $\mathbb{P}_B(A)$ est bien définie pour toute partie $A \subset \Omega$;
- ▶ On calcule facilement $\mathbb{P}_B(\Omega)$: $\Omega \cap B = B$ donc $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(B) = 1$.
- ▶ On vérifie l'additivité (en fait, sigma-additivité) : si E et F sont deux événements disjoints, $(E \cup F) \cap B = (E \cap B) \cup (F \cap B)$ (union disjointe), et donc

$$\mathbb{P}_B(E \cup F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap B) + \mathbb{P}(F \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}_B(E) + \mathbb{P}_B(F)$$

- ▶ **En termes de poids**, si $\mathbb{P}$ correspond à attribuer un poids $p(x)$ à chaque $x \in \Omega$, $\mathbb{P}_B$ correspond à un changement de poids : pour tout $x \in \Omega$, on définit $p'(x)$:
 - ▶ si $x \in B$, $p'(x) = p(x)$;
 - ▶ si $x \notin B$, $p'(x) = 0$.
- ▶ **Donc** toutes les propriétés **générales** d'une fonction de probabilité, s'appliquent à $\mathbb{P}_B$.

Calculs sur les probabilités conditionnelles

- ▶ Dans énormément de problèmes, ce qui est décrit naturellement, ce ne sont pas des probabilités “pures”, mais des probabilités conditionnelles.

Calculs sur les probabilités conditionnelles

- ▶ Dans énormément de problèmes, ce qui est décrit naturellement, ce ne sont pas des probabilités “pures”, mais des probabilités conditionnelles.
- ▶ Il est important de **repérer** ces situations dans la description de l'énoncé !

Calculs sur les probabilités conditionnelles

- ▶ Dans énormément de problèmes, ce qui est décrit naturellement, ce ne sont pas des probabilités “pures”, mais des probabilités conditionnelles.
- ▶ Il est important de **repérer** ces situations dans la description de l'énoncé !
- ▶ Une erreur fréquente, et grave : il ne faut pas confondre $\mathbb{P}(A \cap B)$ (“probabilité pure”) et $\mathbb{P}_B(A)$ (probabilité conditionnelle) !

Calculs sur les probabilités conditionnelles

- ▶ Dans énormément de problèmes, ce qui est décrit naturellement, ce ne sont pas des probabilités “pures”, mais des probabilités conditionnelles.
- ▶ Il est important de **repérer** ces situations dans la description de l'énoncé !
- ▶ Une erreur fréquente, et grave : il ne faut pas confondre $\mathbb{P}(A \cap B)$ (“probabilité pure”) et $\mathbb{P}_B(A)$ (probabilité conditionnelle) !
- ▶ En particulier, si on connaît $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}_B(A)$, et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$ (par exemple), on peut déterminer toutes les probabilités ne faisant intervenir que A et B (et leurs complémentaires) – même pas besoin de décrire explicitement un espace de probabilités.

Calculs sur les probabilités conditionnelles

- ▶ Dans énormément de problèmes, ce qui est décrit naturellement, ce ne sont pas des probabilités “pures”, mais des probabilités conditionnelles.
- ▶ Il est important de **repérer** ces situations dans la description de l'énoncé !
- ▶ Une erreur fréquente, et grave : il ne faut pas confondre $\mathbb{P}(A \cap B)$ (“probabilité pure”) et $\mathbb{P}_B(A)$ (probabilité conditionnelle) !
- ▶ En particulier, si on connaît $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}_B(A)$, et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$ (par exemple), on peut déterminer toutes les probabilités ne faisant intervenir que A et B (et leurs complémentaires) – même pas besoin de décrire explicitement un espace de probabilités.
- ▶ Un outil très utile : la *formule des probabilités totales*

Formule des probabilités totales

- ▶ Si on connaît $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap B)$:
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A).$$

Formule des probabilités totales

- ▶ Si on connaît $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap B)$:
 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$.
- ▶ On peut aussi calculer $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B)$, et si on connaît $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$: $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$.

Formule des probabilités totales

- ▶ Si on connaît $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap B)$:
 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$.
- ▶ On peut aussi calculer $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B)$, et si on connaît $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$: $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$.
- ▶ Or A est l'union disjointe de $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$, donc
 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$.

Formule des probabilités totales

- ▶ Si on connaît $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap B)$:
 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$.
- ▶ On peut aussi calculer $\mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B)$, et si on connaît $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$, on peut en déduire $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$: $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$.
- ▶ Or A est l'union disjointe de $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$, donc
 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$.
- ▶ On en déduit la **formule des probabilités totales** :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$$

Formule généralisée

Au lieu de B et $\overline{B}$, on peut aussi écrire une formule avec un nombre quelconque d'événements $B_1, B_2, \dots, B_k$ qui **partitionnent** l'univers Ω :

Si les B_i sont deux à deux disjoints, **et** que leur union est $\bigcup_{i=1}^k B_i = \Omega$, **alors** on a pour tout événement A ,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}_{B_i}(A)$$

Conditionnement et indépendance

- (Pour $\mathbb{P}(B) > 0$) les conditions $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ sont **équivalentes**; cela conduit à réexaminer la signification de l'indépendance : le fait que B se produise, n'influence pas les chances que A se produise.

Conditionnement et indépendance

- ▶ (Pour $\mathbb{P}(B) > 0$) les conditions $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ sont **équivalentes**; cela conduit à réexaminer la signification de l'indépendance : le fait que B se produise, n'influence pas les chances que A se produise.
- ▶ Sous cette forme, il n'est pas forcément clair que ce soit symétrique : (si A et B sont tous les deux de probabilité strictement positive) $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Indépendance conditionnelle

$(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probas, A un événement de proba > 0 .

- ▶ $\mathbb{P}_A$ est une probabilité comme une autre ;

Indépendance conditionnelle

$(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probas, A un événement de proba > 0 .

- ▶ $\mathbb{P}_A$ est une probabilité comme une autre ;
- ▶ deux événements B et C peuvent être indépendants **pour la probabilité** $\mathbb{P}_A$, c'est une notion **différente** de l'indépendance **pour la probabilité** $\mathbb{P}$!

Indépendance conditionnelle

$(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probas, A un événement de proba > 0 .

- ▶ $\mathbb{P}_A$ est une probabilité comme une autre ;
- ▶ deux événements B et C peuvent être indépendants **pour la probabilité** $\mathbb{P}_A$, c'est une notion **différente** de l'indépendance **pour la probabilité** $\mathbb{P}$!
- ▶ **Pire !** B et C peuvent être indépendants **conditionnellement** à A , indépendants **conditionnellement** à $\bar{A}$, **tout en n'étant pas indépendants pour** $\mathbb{P}$

Un exemple d'énoncé possible

On applique deux tests de dépistage, le test t_1 et le test t_2 pour une certaine maladie à une personne. Chaque test, qu'il soit appliqué à une personne malade ou saine, a deux résultats possible : "Positif" ou "Négatif".

- ▶ S'ils sont appliqués à une personne malade, les deux tests donnent des résultats indépendants ; le test t_1 a 90% de chances de donner un résultat "Positif", le test t_2 a 80% de chances de donner un résultat "Positif".
- ▶ S'ils sont appliqués à une personne saine, les deux tests donnent des résultats indépendants ; chaque test a 90% de chances de donner un résultat "Négatif".
- ▶ La personne testée a 1% de chances d'être porteuse de la maladie.

Les événements "le test t_1 donne un résultat positif" et "le test t_2 donne un résultat positif" sont-ils indépendants ?

Interprétons les données

- ▶ M : la personne testée est malade ; $\mathbb{P}(M) = 1/100$,
 $\mathbb{P}(\overline{M}) = 99/100$.

Interprétons les données

- ▶ M : la personne testée est malade; $\mathbb{P}(M) = 1/100$, $\mathbb{P}(\overline{M}) = 99/100$.
- ▶ P_1 : le test t_1 est positif; P_2 : le test t_2 est positif.

Interprétons les données

- ▶ M : la personne testée est malade ; $\mathbb{P}(M) = 1/100$, $\mathbb{P}(\overline{M}) = 99/100$.
- ▶ P_1 : le test t_1 est positif ; P_2 : le test t_2 est positif.
- ▶ D'après l'énoncé, $\mathbb{P}_M(P_1) = 9/10$, $\mathbb{P}_M(P_2) = 8/10$, P_1 et P_2 sont indépendants conditionnellement à M .

Interprétons les données

- ▶ M : la personne testée est malade ; $\mathbb{P}(M) = 1/100$, $\mathbb{P}(\overline{M}) = 99/100$.
- ▶ P_1 : le test t_1 est positif ; P_2 : le test t_2 est positif.
- ▶ D'après l'énoncé, $\mathbb{P}_M(P_1) = 9/10$, $\mathbb{P}_M(P_2) = 8/10$, P_1 et P_2 sont indépendants conditionnellement à M .
- ▶ Toujours d'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{P_1}) = \mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{P_2}) = 9/10$, donc $\mathbb{P}_{\overline{M}}(P_1) = \mathbb{P}_{\overline{M}}(P_2) = 1/10$; et P_1 et P_2 sont indépendants conditionnellement à $\overline{M}$.

Interprétons les données

- ▶ M : la personne testée est malade ; $\mathbb{P}(M) = 1/100$, $\mathbb{P}(\overline{M}) = 99/100$.
- ▶ P_1 : le test t_1 est positif ; P_2 : le test t_2 est positif.
- ▶ D'après l'énoncé, $\mathbb{P}_M(P_1) = 9/10$, $\mathbb{P}_M(P_2) = 8/10$, P_1 et P_2 sont indépendants conditionnellement à M .
- ▶ Toujours d'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{P_1}) = \mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{P_2}) = 9/10$, donc $\mathbb{P}_{\overline{M}}(P_1) = \mathbb{P}_{\overline{M}}(P_2) = 1/10$; et P_1 et P_2 sont indépendants conditionnellement à $\overline{M}$.
- ▶ On peut en déduire
$$\mathbb{P}(P_1) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P_1) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(P_1) = 108/1000 = 0.108 ;$$

et $\mathbb{P}(P_2) = 107/1000 = 0.107$.

Interprétons les données

- ▶ M : la personne testée est malade ; $\mathbb{P}(M) = 1/100$, $\mathbb{P}(\overline{M}) = 99/100$.
- ▶ P_1 : le test t_1 est positif ; P_2 : le test t_2 est positif.
- ▶ D'après l'énoncé, $\mathbb{P}_M(P_1) = 9/10$, $\mathbb{P}_M(P_2) = 8/10$, P_1 et P_2 sont indépendants conditionnellement à M .
- ▶ Toujours d'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{P_1}) = \mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{P_2}) = 9/10$, donc $\mathbb{P}_{\overline{M}}(P_1) = \mathbb{P}_{\overline{M}}(P_2) = 1/10$; et P_1 et P_2 sont indépendants conditionnellement à $\overline{M}$.
- ▶ On peut en déduire
$$\mathbb{P}(P_1) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P_1) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(P_1) = 108/1000 = 0.108 ;$$

et $\mathbb{P}(P_2) = 107/1000 = 0.107$.
- ▶ On peut aussi calculer $\mathbb{P}(P_1 \cap P_2)$:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) &= \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(P_1 \cap P_2) \\ &= \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P_1)\mathbb{P}_M(P_2) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(P_1)\mathbb{P}_{\overline{M}}(P_2) \\ &= \frac{171}{10000} = 0.0171\end{aligned}$$

Interprétons les données

- ▶ M : la personne testée est malade ; $\mathbb{P}(M) = 1/100$, $\mathbb{P}(\overline{M}) = 99/100$.
- ▶ P_1 : le test t_1 est positif ; P_2 : le test t_2 est positif.
- ▶ D'après l'énoncé, $\mathbb{P}_M(P_1) = 9/10$, $\mathbb{P}_M(P_2) = 8/10$, P_1 et P_2 sont indépendants conditionnellement à M .
- ▶ Toujours d'après l'énoncé, $\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{P_1}) = \mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{P_2}) = 9/10$, donc $\mathbb{P}_{\overline{M}}(P_1) = \mathbb{P}_{\overline{M}}(P_2) = 1/10$; et P_1 et P_2 sont indépendants conditionnellement à $\overline{M}$.
- ▶ On peut en déduire
$$\mathbb{P}(P_1) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P_1) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(P_1) = 108/1000 = 0.108 ;$$

et $\mathbb{P}(P_2) = 107/1000 = 0.107$.
- ▶ On peut aussi calculer $\mathbb{P}(P_1 \cap P_2)$:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) &= \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P_1 \cap P_2) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(P_1 \cap P_2) \\ &= \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(P_1)\mathbb{P}_M(P_2) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(P_1)\mathbb{P}_{\overline{M}}(P_2) \\ &= \frac{171}{10000} = 0.0171\end{aligned}$$
- ▶ Donc P_1 et P_2 ne sont pas indépendants.

Conditionnements successifs

- $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités fixé ; $A, B, C \dots$ des événements
- ▶ On a vu que $\mathbb{P}_B$ désigne une vraie fonction de probabilité sur Ω , a priori différente de $\mathbb{P}$: $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ représente l'expérience de départ **si on suppose que B se produit**.

Conditionnements successifs

- $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités fixé ; $A, B, C \dots$ des événements
- ▶ On a vu que $\mathbb{P}_B$ désigne une vraie fonction de probabilité sur Ω , a priori différente de $\mathbb{P}$: $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ représente l'expérience de départ **si on suppose que B se produit**.
 - ▶ Dans $(\Omega, \mathbb{P}_B)$, on peut aussi conditionner par un événement $C \dots$ pour obtenir encore une nouvelle probabilité, qu'on peut noter temporairement $(\mathbb{P}_B)_C$

Conditionnements successifs

$(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités fixé ; $A, B, C \dots$ des événements

- ▶ On a vu que $\mathbb{P}_B$ désigne une vraie fonction de probabilité sur Ω , a priori différente de $\mathbb{P}$: $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ représente l'expérience de départ **si on suppose que B se produit**.
- ▶ Dans $(\Omega, \mathbb{P}_B)$, on peut aussi conditionner par un événement $C \dots$ pour obtenir encore une nouvelle probabilité, qu'on peut noter temporairement $(\mathbb{P}_B)_C$
- ▶ Calculons : comment s'exprime $(\mathbb{P}_B)_C(A)$?

$$\begin{aligned}(\mathbb{P}_B)_C(A) &= \frac{\mathbb{P}_B(A \cap C)}{\mathbb{P}_B(C)} \\&= \frac{\mathbb{P}((A \cap C) \cap B) / \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(C \cap B) / \mathbb{P}(B)} \\&= \mathbb{P}_{B \cap C}(A)\end{aligned}$$

Conditionnements successifs

$(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilités fixé ; $A, B, C \dots$ des événements

- ▶ On a vu que $\mathbb{P}_B$ désigne une vraie fonction de probabilité sur Ω , a priori différente de $\mathbb{P}$: $(\Omega, \mathbb{P}_B)$ représente l'expérience de départ **si on suppose que B se produit**.
- ▶ Dans $(\Omega, \mathbb{P}_B)$, on peut aussi conditionner par un événement $C \dots$ pour obtenir encore une nouvelle probabilité, qu'on peut noter temporairement $(\mathbb{P}_B)_C$
- ▶ Calculons : comment s'exprime $(\mathbb{P}_B)_C(A)$?

$$\begin{aligned}(\mathbb{P}_B)_C(A) &= \frac{\mathbb{P}_B(A \cap C)}{\mathbb{P}_B(C)} \\&= \frac{\mathbb{P}((A \cap C) \cap B) / \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(C \cap B) / \mathbb{P}(B)} \\&= \mathbb{P}_{B \cap C}(A)\end{aligned}$$

- ▶ **Conséquence** : conditionner par B , puis par C , c'est équivalent à conditionner par $B \cap C$; et c'est donc équivalent à conditionner par C , puis par B .

Formule de Bayes

- Il ne faut surtout pas confondre $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$: dans la première la “référence” est $\mathbb{P}(A)$, dans la deuxième c’est $\mathbb{P}(B)$.

Formule de Bayes

- ▶ Il ne faut surtout pas confondre $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$: dans la première la “référence” est $\mathbb{P}(A)$, dans la deuxième c’est $\mathbb{P}(B)$.
- ▶ Toutefois, il y a un lien entre les deux : en effet on a

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A).$$

Formule de Bayes

- ▶ Il ne faut surtout pas confondre $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$: dans la première la “référence” est $\mathbb{P}(A)$, dans la deuxième c’est $\mathbb{P}(B)$.
- ▶ Toutefois, il y a un lien entre les deux : en effet on a

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A).$$

- ▶ On en déduit la **formule de Bayes** :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Formule de Bayes

- ▶ Il ne faut surtout pas confondre $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$: dans la première la “référence” est $\mathbb{P}(A)$, dans la deuxième c’est $\mathbb{P}(B)$.
- ▶ Toutefois, il y a un lien entre les deux : en effet on a

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A).$$

- ▶ On en déduit la **formule de Bayes** :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

- ▶ Aucune difficulté à prouver cette formule ; c’est surtout son *interprétation* qui est importante : on s’intéresse à la “plausibilité” de A

Formule de Bayes

- ▶ Il ne faut surtout pas confondre $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$: dans la première la "référence" est $\mathbb{P}(A)$, dans la deuxième c'est $\mathbb{P}(B)$.
- ▶ Toutefois, il y a un lien entre les deux : en effet on a

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A).$$

- ▶ On en déduit la **formule de Bayes** :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

- ▶ Aucune difficulté à prouver cette formule ; c'est surtout son *interprétation* qui est importante : on s'intéresse à la "plausibilité" de A
 - ▶ $\mathbb{P}(A)$ représente la "probabilité *a priori*"

Formule de Bayes

- ▶ Il ne faut surtout pas confondre $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$: dans la première la "référence" est $\mathbb{P}(A)$, dans la deuxième c'est $\mathbb{P}(B)$.
- ▶ Toutefois, il y a un lien entre les deux : en effet on a

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A).$$

- ▶ On en déduit la **formule de Bayes** :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

- ▶ Aucune difficulté à prouver cette formule ; c'est surtout son *interprétation* qui est importante : on s'intéresse à la "plausibilité" de A
 - ▶ $\mathbb{P}(A)$ représente la "probabilité *a priori*"
 - ▶ B représente une situation observée ; $\mathbb{P}(B)$ c'est la probabilité (plausibilité) de cette observation

Formule de Bayes

- ▶ Il ne faut surtout pas confondre $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$: dans la première la "référence" est $\mathbb{P}(A)$, dans la deuxième c'est $\mathbb{P}(B)$.
- ▶ Toutefois, il y a un lien entre les deux : en effet on a

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A).$$

- ▶ On en déduit la **formule de Bayes** :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

- ▶ Aucune difficulté à prouver cette formule ; c'est surtout son *interprétation* qui est importante : on s'intéresse à la "plausibilité" de A
 - ▶ $\mathbb{P}(A)$ représente la "probabilité *a priori*"
 - ▶ B représente une situation observée ; $\mathbb{P}(B)$ c'est la probabilité (plausibilité) de cette observation
 - ▶ $\mathbb{P}_A(B)$ c'est la probabilité de l'observation si ce qui nous intéresse est vrai

Formule de Bayes

- ▶ Il ne faut surtout pas confondre $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$: dans la première la "référence" est $\mathbb{P}(A)$, dans la deuxième c'est $\mathbb{P}(B)$.
- ▶ Toutefois, il y a un lien entre les deux : en effet on a

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A).$$

- ▶ On en déduit la **formule de Bayes** :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

- ▶ Aucune difficulté à prouver cette formule ; c'est surtout son *interprétation* qui est importante : on s'intéresse à la "plausibilité" de A
 - ▶ $\mathbb{P}(A)$ représente la "probabilité *a priori*"
 - ▶ B représente une situation observée ; $\mathbb{P}(B)$ c'est la probabilité (plausibilité) de cette observation
 - ▶ $\mathbb{P}_A(B)$ c'est la probabilité de l'observation si ce qui nous intéresse est vrai
 - ▶ $\mathbb{P}_B(A)$ c'est la "nouvelle plausibilité" de A , en tenant compte de l'observation B .

Quelques problèmes de modélisation/calcul

- ▶ On dispose de trois jetons de couleur : un a deux côtés blancs, un a deux côtés noirs, et un a un côté blanc et un côté noir. On tire un des trois jetons de manière aléatoire uniforme, et on le pose d'un côté aléatoire uniforme.
 - ▶ Quelle est la probabilité que le jeton choisi ait ses deux faces de la même couleur ?
 - ▶ Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?
 - ▶ La face visible est blanche ; quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?

Quelques problèmes de modélisation/calcul

- ▶ On dispose de trois jetons de couleur : un a deux côtés blancs, un a deux côtés noirs, et un a un côté blanc et un côté noir. On tire un des trois jetons de manière aléatoire uniforme, et on le pose d'un côté aléatoire uniforme.
 - ▶ Quelle est la probabilité que le jeton choisi ait ses deux faces de la même couleur ?
 - ▶ Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?
 - ▶ La face visible est blanche ; quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ? (on cherche une probabilité conditionnelle)

Modélisation/calcul : Monty Hall

Ce problème se présente comme un jeu télévisé. Le candidat a face à lui trois portes fermées, dont une cache un cadeau de valeur et les deux autres un prix sans valeur. Les règles du jeu sont les suivantes :

1. Le candidat désigne une porte de son choix.
2. Le présentateur du jeu, qui sait quelle porte cache le cadeau de valeur, ouvre alors une porte, qui ne peut pas être celle montrée par le candidat, et derrière laquelle se trouve un cadeau sans valeur (s'il a le choix, il choisit au hasard).
3. Le candidat doit alors choisir définitivement une des portes restantes (soit celle qu'il avait désignée, soit la troisième porte), et il partira avec le cadeau qu'elle cache.

Le candidat peut-il adopter une stratégie "intelligente" pour maximiser ses chances d'obtenir le cadeau de valeur, ou est-ce qu'il n'a aucune prise sur ses chances ? S'il dispose d'une stratégie meilleure que les autres, quelle est-elle, et quelles sont alors ses chances d'obtenir le cadeau de valeur ?