Probabilités, Statistiques, Combinatoire

Philippe Duchon

Université de Bordeaux – Licence Informatique
http://www.labri.fr/perso/duchon/Enseignements/Probas/

2018-2019

Loi d'une variable aléatoire

- Déterminer la **loi** d'une variable aléatoire X, cela revient à déterminer :
  - l'ensemble V des valeurs que peut prendre X (formellement, $V = X(\Omega)$)
  - pour chaque $v \in V$, la probabilité de l'événement $(X = v)$:

$$p(v) = \mathbb{P}(X = v)$$

- Dans la pratique, on va souvent considérer des variables à valeurs entières ($V \subset \mathbb{Z}$), voire entières positives ($V \subset \mathbb{N}$).
- Parmi l'infinie variété de lois possibles, il y en a certaines qui reviennent très souvent, parce qu'elles sont utiles pour modéliser beaucoup de situations ; on va en décrire quelques unes, et étudier leurs relations.

Lois de Bernoulli

- La variable aléatoire la plus simple possible à part les variables constantes : on a un événement A, et on pose $X = \mathbf{1}_A$ (indicatrice de A).
- Une telle variable a deux valeurs possibles : 1 (pour $t \in A$), et 0 (pour $t \notin A$).
- La loi est tout aussi simple à décrire : si on pose $p = \mathbb{P}(A)$, on a $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
- Le **paramètre** p ($0 \leq p \leq 1$) détermine complètement une loi de Bernoulli.
- **Terminologie :** "X suit la loi de Bernoulli de paramètre p" ; on dit aussi "X est une Bernoulli de paramètre p".

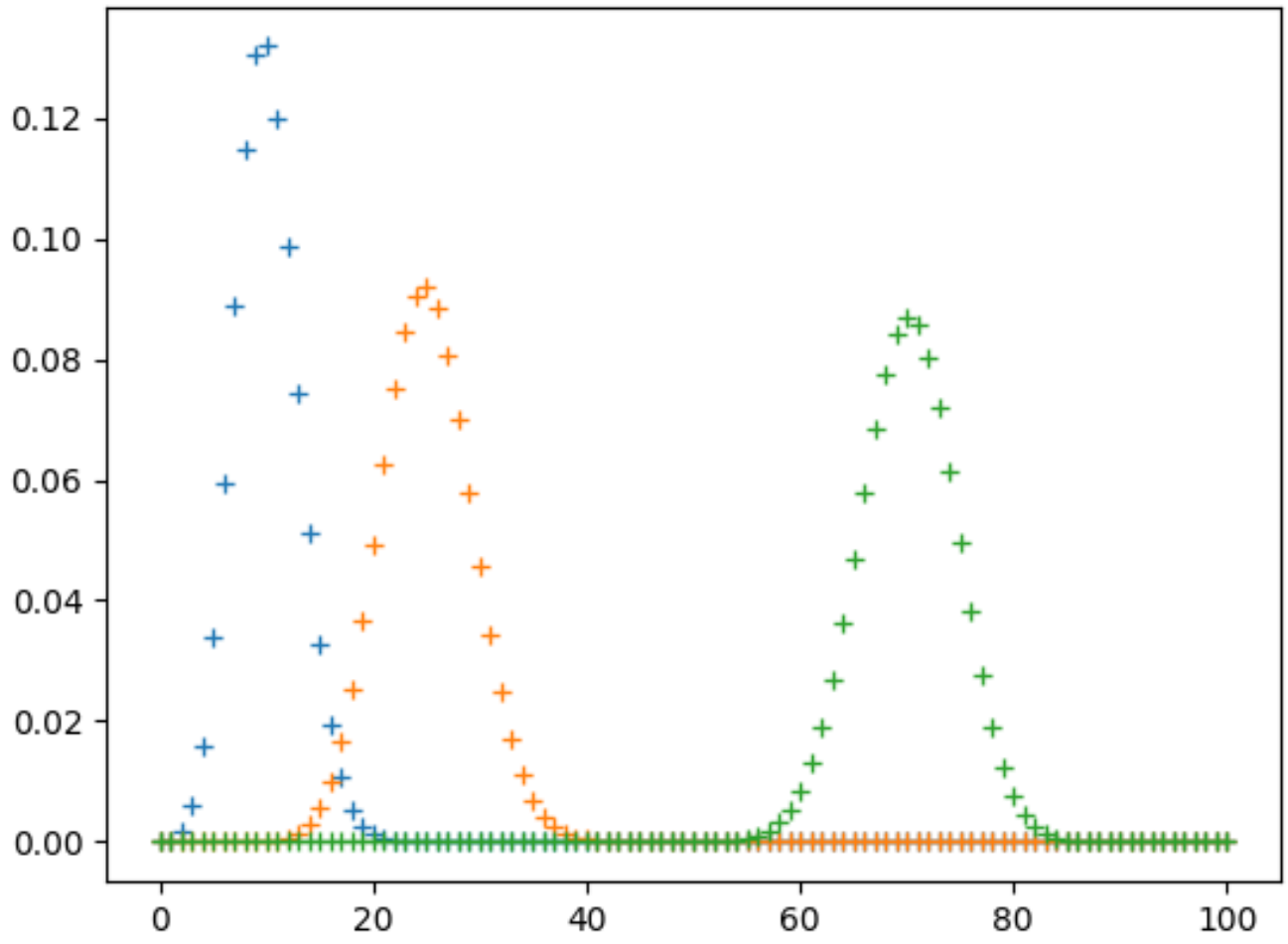
Lois binomiales

- Une situation classique : on a un nombre fixe d'événements indépendants, chacun ayant la même probabilité de se produire ; et on s'intéresse au **nombre** de ceux qui se produisent.
- **Exemple :** je lance 3 dés, et je marque 1 point par dé qui donne un résultat pair ; loi du nombre de points ?
- **Exemple :** dans un jeu de 32 cartes, dont j'ai séparé les 8 cartes de chaque couleur, je tire aléatoirement une carte de chaque couleur, et je note le nombre d'As obtenus.
- **Exemple (approché) :** je vais Place de la Victoire un jeudi soir (hors confinement), et je questionne 10 personnes "au hasard" ; et je compte le nombre d'étudiants de l'université parmi elles.
- *A priori*, il y a deux paramètres importants : le *nombre* d'événements, et la probabilité (commune) de chacun d'eux ; (n, p)
- (Somme de n Bernoulli indépendantes de même paramètre p)

Détermination de la loi binomiale

- Les valeurs possibles : tous les entiers de 0 à n : $V = [[0, n]]$.
- Il nous faut donc déterminer, pour chaque $k \in [[0, n]]$, la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.
- On va décomposer l'événement en union disjointe d'événements dont on sait calculer la probabilité.
- Fixons un ensemble $I \subset [[1, n]]$, de cardinal k ; on définit l'événement
$$F_I = (\cap_{i \in I} E_i) \cap \left(\cap_{j \notin I} \overline{E_j}\right)$$
("les E_i pour $i \in I$ se produisent, les autres non" ; $F_I \subset (X = i)$)
- Chaque E_i a probabilité p, chaque $\overline{E_j}$ a probabilité $1 - p$; et tous sont indépendants
- Donc $\mathbb{P}(F_I) = p^k (1 - p)^{n-k}$.
- **De plus**, $\{X = k\}$ est l'union des tous les événements F_I, pour toutes les parties **de cardinal** k de $[[1, n]]$; et il y a $\binom{n}{k}$ telles parties.
- **Donc**, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Courbes de probabilités binomiales



Lois géométriques

- Une autre situation classique : on a une *suite* (infinie) de Bernoulli indépendantes $B_1, B_2, \ldots$, de même paramètre ; et on s'intéresse au **numéro** de la première non nulle.
- Formellement,

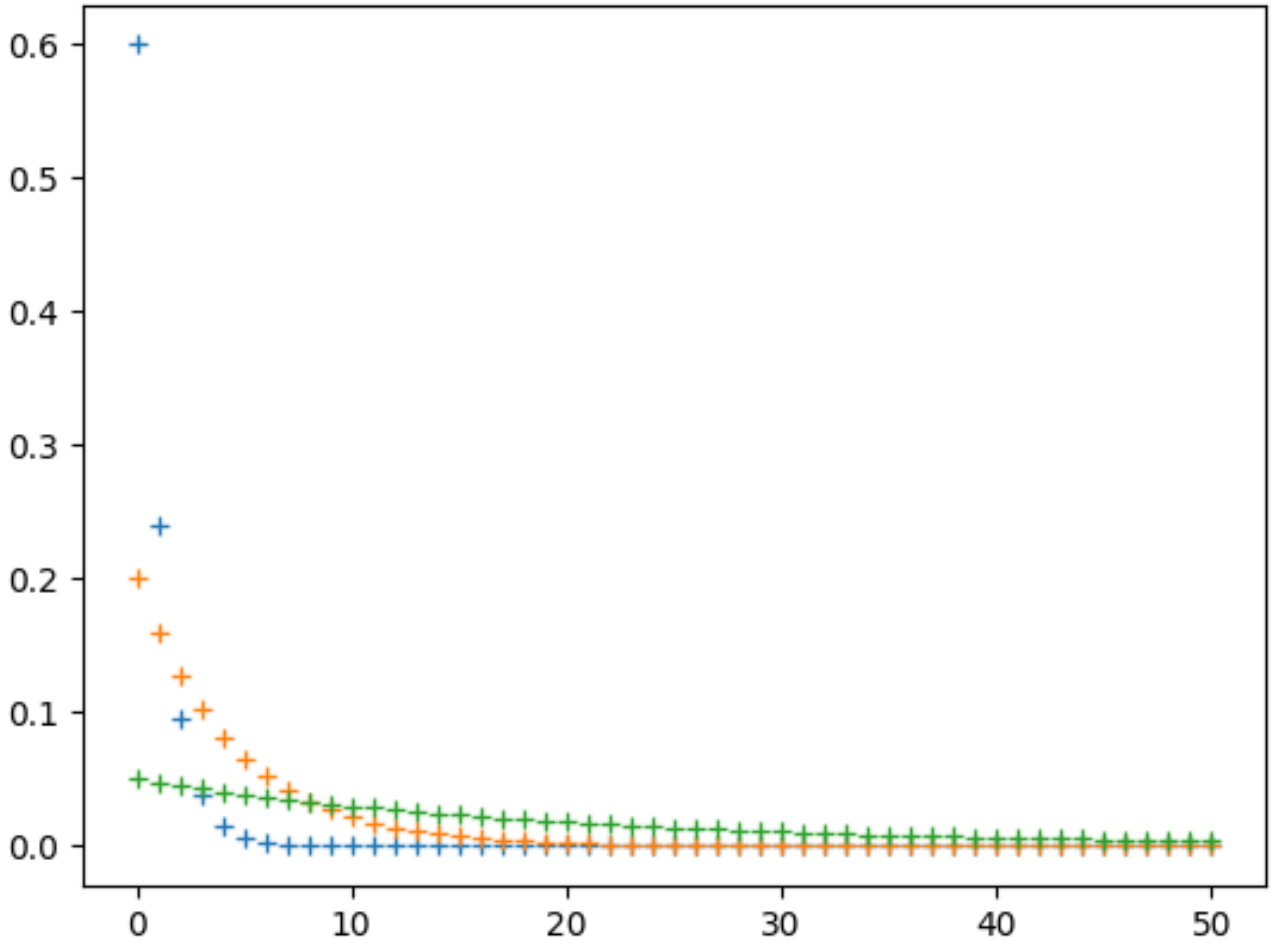
$$X = \min \{n > 0 : B_n = 1\}$$

- **Exemple :** je joue à pile ou face jusqu'à tirer Pile pour la première fois ; je regarde le nombre de fois que je lance ma pièce
- **Exemple :** Chaque jour, M. Ranafoute sort sans son formulaire de sortie ; chaque jour, chaque jour, il a une chance sur 50 de prendre une contravention. Quelle est la loi du nombre de sorties avant l'amende ?
- **Exemple :** Dans un jeu de dés, on lance deux dés et, si on fait un double, on rejoue immédiatement. Quelle est la loi du nombre de coups consécutifs joués ?
- Il y a un seul paramètre : la probabilité p, à chaque coup, de s'arrêter (le paramètre commun des Bernoulli).

Détermination de la loi géométrique

- Ensemble des valeurs possibles : tous les entiers strictement positifs
- (plus, possiblement, $+\infty$? Au cas où toutes les B_i seraient nulles ?)
- On se donne donc un entier $k > 0$, et on détermine la probabilité de l'événement $\{X = k\}$.
- On peut écrire l'événement $\{X = k\}$ en terme des B_i :
  - Pour que $X = k$, il faut que chacune des B_i, pour $i < k$, soit nulle.
  - Il faut aussi qu'on ait $B_k = 1$.
  - Et ça suffit.
  - Comme les B_i sont indépendantes, la probabilité se calcule facilement
- Donc, $\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$ (pour tout entier $k > 0$)
- On calcule $\sum_{k=1}^{+\infty}(1 - p)^{k-1}p = 1$; donc $\mathbb{P}(X = \infty) = 0$ et on peut considérer X comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Courbes de probabilités géométriques



Propriétés de la loi géométrique

- On considère une variable G, géométrique de paramètre p ; et pour un entier $k > 0$, on note A l'événement $\{G > k\}$.
- On regarde alors la **loi de G sachant A**.
- $\mathbb{P}(A) = (1-p)^k$ ("les k premières Bernoulli sont nulles")
- Pour un entier m, on calcule $\mathbb{P}_A(G = m)$.
  - si $m \leq k$: $\{G = m\} \cap A = \emptyset$, donc $\mathbb{P}_A(G = m) = 0$;
  - si $m > k$: $\{G = m\} \subset A$, donc $\mathbb{P}_A(G = m) = \mathbb{P}(G = m)/\mathbb{P}(A)$, ce qui donne

$$\mathbb{P}_A(G = m) = (1-p)^{m-k-1}p = \mathbb{P}(G = m-k)$$

- Au final : pour tout n, $\mathbb{P}_A(G = k+n) = \mathbb{P}(G = n)$; cette propriété est **l'absence de mémoire** de la loi géométrique.
- **Interprétation :** si j'attends le "premier 6" dans une séquence de lancers de dé, et que j'ai déjà lancé 10 fois le dé sans obtenir de 6, le nombre de lancers qu'il me reste à faire suit toujours la loi géométrique.

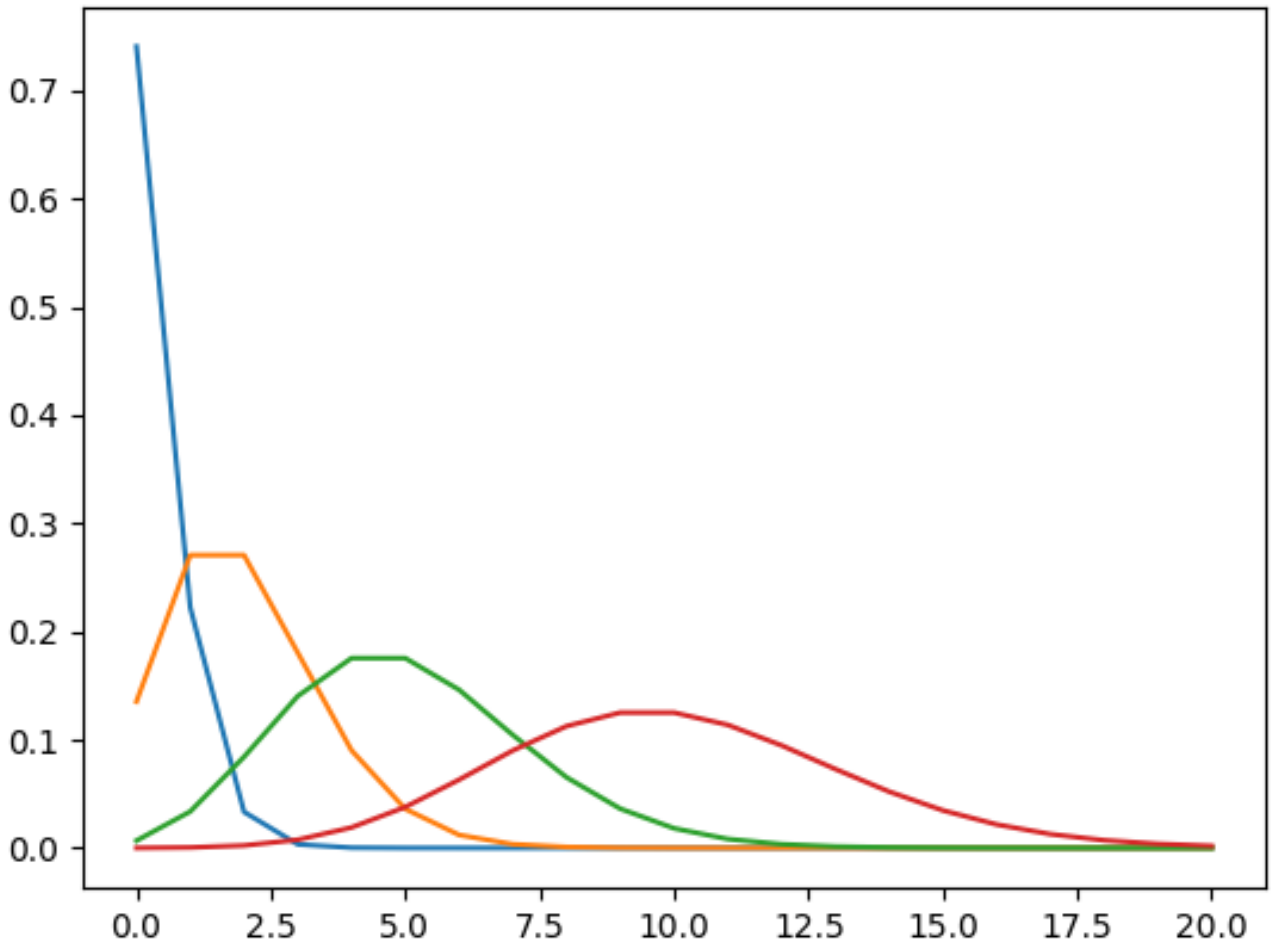
Lois de Poisson

- Pas d'interprétation élémentaire.
- **Une situation naturelle :** on sait que, *grosso modo*, il y a environ m voitures par heure, en moyenne, qui passent par un carrefour ; mais il y a des variations aléatoires, ce n'est pas exactement m toutes les heures.
- Si on considère que les voitures ne s'influencent pas les unes les autres, on peut modéliser le nombre de celles qui passent pendant une période donnée d'une heure, par une loi de Poisson de paramètre m.
- Par exemple : il y a N (un grand nombre) voitures dans les parages, et chacune a probabilité m/N (petite donc) de passer chaque heure ; et les passages des voitures sont indépendants.
- On pourrait utiliser la loi binomiale de paramètres N et m/N, mais N est grand et on ne le connaît pas forcément.
- La loi de Poisson de paramètre m est une sorte de limite : une binomiale de paramètres $(n, m/n)$ ressemble beaucoup à une Poisson de paramètre m (pour n grand).

Loi de Poisson (suite)

- Les valeurs possibles sont tous les entiers positifs ou nuls ($\mathbb{N}$).
- pour tout $k > 0$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-m}\frac{m^k}{k!}$, pour $m > 0$ fixé (le "paramètre").
- (Il se trouve que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$, donc pour la loi de Poisson la somme fait bien 1)
- Le nombre de clients qui entrent en une minute dans une boutique, le nombre d'accidents d'avion dans une année, le nombre de meurtres au cours d'une unité de temps, peuvent souvent être modélisés par des lois de Poisson.
- **Propriété :** la somme d'une variable X de Poisson, de paramètre x, et d'une variable Y de Poisson, indépendante de X, de paramètre y, est une Poisson de paramètre $(x + y)$.

Courbes de probabilités de Poisson



Récapitulatif

- **Bernoulli :** variable aléatoire X valant 0 ou 1 ; $p = \mathbb{P}(X = 1)$.
- **Géométrique :** nombre d'essais jusqu'au premier succès dans une séquence d'essais indépendant et de même probabilité de succès ; $\mathbb{P}(G = k) = (1-p)^{k-1}p$ pour $k > 0$.
- Absence de mémoire pour la géométrique.
- **Binomiale :** nombre d'essais réussis parmi n essais indépendants et de même probabilité de succès ; $\mathbb{P}(B = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$.
- **Poisson :** (genre de limite $n \to \infty$ pour les binomiales $(n, x/n)$) $\mathbb{P}(P = k) = e^{-x} x^k / k!$
- La somme de deux Poisson indépendantes, est une Poisson de paramètre, la somme des paramètres.