

Retour sur les pavages (TD2)

L'exercice 2.2 de la feuille TD2 proposait d'énumérer les pavages par des dominos d'une bande rectangulaire de longueur n et de hauteur 1, 2 ou 3.

2.1 Bande de hauteur 2

Le cas de la hauteur 1 est trivial : si n est impair, il n'y a aucun pavage possible, car le nombre de cases est impair et chaque domino occupe deux cases, donc k dominos occupent $2k$ cases. Et, pour n pair, il y a un seul pavage possible, où l'on place $n/2$ dominos horizontaux. On a donc $p_{2n}^1 = 1$ et $p_{2n+1}^1 = 0$ pour tout n .

Le cas de la hauteur 2 est un calcul assez classique. On s'aperçoit rapidement, en faisant quelques dessins, que l'on a $p_0^2 = 1$, $p_1^2 = 1$, $p_2^2 = 2$, $p_3^2 = 3$, $p_4^2 = 5$. On peut imaginer que l'on reconnaît une suite connue, mais mieux vaudrait une preuve.

Prenons n au moins égal à 2, et discutons de la première (ou la dernière, c'est équivalent) colonne. Il y a deux façons de couvrir la première colonne du rectangle $2 \times n$:

- soit on couvre l'ensemble de la colonne par un domino vertical ;
- soit on couvre chaque case par la première case d'un domino horizontal.

Les deux possibilités sont exclusives l'une de l'autre. Donc, si on note P_n l'ensemble des pavages de $2 \times n$, PV_n l'ensemble des pavages de $2 \times n$ dont la première colonne est couverte par un domino vertical, et PH_n l'ensemble des pavages de $2 \times n$ dont la première colonne est couverte par deux dominos horizontaux, on a clairement $PV_n \cap PH_n = \emptyset$ et $P_n = PV_n \cup PH_n$, et donc $\#P_n = \#PV_n + \#PH_n$. C'est un début.

Mais combien y a-t-il de pavages dans PV_n ? Si on prend un pavage de PV_n , les $n - 1$ colonnes à droite de la première doivent être pavées, et on a donc, à droite de la première colonne, un pavage (quelconque) de $2 \times (n - 1)$. Autrement dit, on peut écrire :

$$\#PV_n = \#P_{n-1}$$

On peut aussi exprimer cela en termes d'une bijection : la transformation de P_{n-1} vers PV_n qui consiste, pour tout pavage, à lui ajouter un domino vertical à sa gauche, est une bijection ; sa bijection réciproque consiste simplement à effacer la première colonne. On a donc l'égalité précédente entre les cardinaux.

Et pour PH_n ? Tout aussi simplement, dans un pavage de PH_n , les deux premières colonnes sont couvertes par les dominos horizontaux ; donc les $n - 2$ colonnes restantes doivent être également pavées, et on a un pavage formé de deux colonnes (couvertes par les deux dominos horizontaux) et d'un pavage de P_{n-2} . Là encore cela donne une équation sur les cardinaux :

$$\#PH_n = \#P_{n-2}$$

En regroupant les trois relations précédentes, il vient, pour $n \geq 2$:

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} \tag{2.1}$$

C'est la même récurrence que la suite de Fibonacci ! Comme les deux premiers termes sont $p_0 = 1$ et $p_1 = 1$, on a en fait $p_n = F_{n+1}$ (la suite de Fibonacci "standard" commence par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, avec donc $F_2 = 1$).

Notons qu'il est possible d'obtenir une expression exacte pour p_n (ou F_n), en s'inspirant de ce qui suit.

2.2 Bande de hauteur 3

Pour les bandes de hauteur 3, un raisonnement du même acabit que pour la hauteur 1 montre qu'il n'y a pas de pavages de $3 \times n$ si n est impair. On peut donc poser $p_n = \#P_n$, où cette fois-ci P_k désigne l'ensemble des pavages d'une bande $3 \times (2k)$.

On va naturellement être amené à s'intéresser au nombre de pavages d'une "presque bande" : une bande $3 \times n$, avec n *impair*, mais avec une case manquante : la première case de la première colonne est effacée (ce qui fait qu'avec un nombre impair de colonnes il y a bien un nombre pair de cases ; et avec un nombre pair de colonnes, il y aurait un nombre impair de cases, et donc pas de pavages). Notons Q_k l'ensemble des pavages de cette "pseudo-bande" avec $2k + 1$ colonnes.

Première remarque : la "pseudo-bande" à $2k + 1$ colonnes, mais où c'est la troisième case de la première colonne qui manque, a le même nombre de pavages : on passe de l'un à l'autre par symétrie d'axe horizontal.

Maintenant examinons comment sont fait les éléments de P_n . La première colonne peut être recouverte de trois manières distinctes :

- avec trois dominos horizontaux : le "reste" est alors un pavage de $3 \times (2n - 2)$, soit un élément de P_{n-1} ;
- avec un domino horizontal en haut, et un domino vertical : ce qui "reste" est un pavage de la pseudo-bande $3 \times 2n - 1$, soit un élément de Q_{n-1} ;
- avec un domino horizontal en bas, et un domino vertical : ce qui reste est le symétrique d'un élément de Q_{n-1} .

Si l'on compte combien cela fait de pavages, on obtient un début de récurrence :

$$p_n = p_{n-1} + 2q_{n-1}.$$

Et pour les éléments de Q_n ? Les deux cases restantes de la première colonne peuvent être soit recouvertes par un domino vertical (il reste un pavage de $3 \times (2n)$, soit un élément de P_n) ; soit recouverte par deux dominos horizontaux, et alors la case restante de la deuxième colonne doit aussi être couverte par un domino horizontal, et ce qui reste est un élément de Q_{n-1} .

Résultat, on a une deuxième relation de récurrence :

$$q_n = p_n + q_{n-1}.$$

Avant de regrouper les deux équations, on substitue la première dans le second membre de la seconde :

$$p_n = p_{n-1} + 2q_{n-1} \tag{2.2}$$

$$q_n = p_{n-1} + 3q_{n-1} \tag{2.3}$$

Ces deux équations définissent le couple (p_n, q_n) en fonction de (p_{n-1}, q_{n-1}) ; en ajoutant les conditions initiales $p_0 = 1$ et $q_0 = 1$, cela détermine l'ensemble des deux suites.

En particulier on peut en tirer les premiers éléments : pour les p_i , 1, 3, 11, 41, 153 ; pour les q_i , 1, 4, 15, 56, 209. Pour le coup, difficile de deviner une formule.

Mais on ne va pas se laisser abattre. Si on définit le vecteur (de dimension 2) $X_n = {}^t(p_n, q_n)$ (vecteur colonne), le système d'équations précédent devient $X_n = M.X_{n-1}$, où M est la matrice 2×2 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a donc $X_n = M^n X_0$, et il ne reste plus qu'à calculer intelligemment M^n .

Normalement, arrivé là, on calcule les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice M (elle est d'ordre 2, c'est faisable), ce qui permet d'écrire les puissances de M . On peut aussi faire ça à la main, en cherchant si par hasard il n'existerait pas des coefficients α et β tels que $(\alpha p_n + \beta q_n)$ soit simplement proportionnel à $(\alpha p_{n-1} + \beta q_{n-1})$, mettons avec un coefficient de proportionnalité c . On calcule :

$$\alpha p_n + \beta q_n = \dots = (\alpha + \beta)p_{n-1} + (2\alpha + 3\beta)q_{n-1},$$

ce qui fait que si on a simultanément $\alpha + \beta = c\alpha$ et $2\alpha + 3\beta = c\beta$, on a des solutions (oui, ce n'est rien d'autre que les conditions pour que c soit une valeur propre de M !). En résolvant en c , on obtient deux solutions, $c^+ = 2 + \sqrt{3}$ et $c^- = 2 - \sqrt{3}$. Les solutions de la récurrence sont donc de la forme : $p_n = a^+(c^+)^n + a^-(c^-)^n$ et $q_n = b^+(c^+)^n + b^-(c^-)^n$, il n'y a plus qu'à déterminer les coefficients a^+ et a^- (et b^+ et b^- , si on veut aussi q_n).

Les coefficients s'identifient en prenant les cas $n = 0$ et $n = 1$ par exemple : comme $p_0 = 1$ on doit avoir $a^+ + a^- = 1$; comme $p_1 = 3$, on doit avoir $a^+(2 + \sqrt{3}) + a^-(2 - \sqrt{3}) = 3$. Ces deux équations forment un système 2×2 qu'on résoud sans difficulté, on trouve $a^+ = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ et $a^- = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

On a donc une formule close, mais pas si simple que cela, pour p_n :

$$p_n = \frac{(3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n + (3 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^n}{6}.$$

On a un peu perdu de vue le fait que p_n est toujours entier... On peut le retrouver en développant les puissances, les puissances impaires de $\sqrt{3}$ s'annulent.

En revanche, comme $2 + \sqrt{3} \simeq 3.732$ et $2 - \sqrt{3} \simeq 0.268$, le terme en $(c^-)^n$ tend vers 0 alors que le terme en $(c^+)^n$ tend vers l'infini : on a donc, asymptotiquement,

$$p_n \sim a.c^n \simeq 0.789(3.732)^n.$$

Comme, de plus, le terme $a^-(c^-)^n$ est toujours plus petit que 1 et tend rapidement vers 0, l'approximation précédente est très précise.

2.3 On n'est jamais très fort pour ce calcul

Le calcul de la solution de la double récurrence (2.2-2.3) est classique, mais un peu calculatoire. Il existe une autre méthode, que nous esquissons ici. Elle repose sur la notion de *série génératrice* pour une suite de coefficients. **Précisons que ceci peut être considéré comme un complément au cours ; aucune compétence en manipulation de séries génératrices ne sera exigée à l'examen.**

Pour une suite de comptage $(c_n)_{n \geq 0}$ correspondant à une classe combinatoire (ou pas ; le fait que les c_n soient des entiers positifs ou nuls facilite certaines preuves techniques), on définit sa *série génératrice* comme la série entière

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \quad (2.4)$$

Le fait que les coefficients c_n soient positifs et, surtout, bornés par a^n pour une constante $a > 0$, garantit que la série a un rayon de convergence au moins $1/a$; tous les calculs qui suivent sont alors justifiés. Implicitement : toutes les séries manipulées ont un rayon de convergence positif ; sur un disque de rayon strictement inférieur au plus petit des rayons de convergence, toutes les séries convergent *normalement*¹ et les calculs sont justifiés.

Dans le cas du comptage des pavages de bandes de hauteur 3, on a deux séquences $(p_n)_{n \geq 0}$ et $(q_n)_{n \geq 0}$, et donc deux séries génératrices $P(z)$ et $Q(z)$. Les équations sur les séquences se traduisent en équations sur ces séries.

Prenons l'équation 2.2. En multipliant les membres gauche et droit par z^n , on obtient :

$$p_n z^n = z \cdot p_{n-1} z^{n-1} + 2z \cdot q_{n-1} z^{n-1}, \quad (2.5)$$

valide pour $n \geq 1$; pour $n = 0$, on a à la place $p_0 = 1$.

Si l'on somme les équations 2.5 pour tous les entiers $n \geq 1$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = z \left(\sum_{m=0}^{\infty} p_m z^m \right) + 2z \left(\sum_{m=0}^{\infty} q_m z^m \right) \quad (2.6)$$

(dans le membre de droite, on a silencieusement fait un changement de variable de sommation : $m = n - 1$). À gauche, on reconnaît $P(z) - 1$ (il manque le terme 1 correspondant à $n = 1$) ; à droite, les deux sommes sont respectivement $P(z)$ et $Q(z)$. On obtient ainsi une belle équation qui lie $P(z)$ et $Q(z)$:

$$P(z) = 1 + zP(z) + 2zQ(z). \quad (2.7)$$

On fait de même pour l'équation 2.3 (valide pour $n \geq 1$; pour $n = 0$, $q_0 = 1$). On obtient successivement

$$q_n z^n = z p_{n-1} z^{n-1} + 3z q_{n-1} z^{n-1}, \quad (2.8)$$

puis, en sommant pour les $n \geq 1$,

$$Q(z) - 1 = zP(z) + 3zQ(z). \quad (2.9)$$

L'équation 2.9 est une équation linéaire en $Q(z)$: elle permet d'exprimer $Q(z)$ en fonction de z et $P(z)$,

$$Q(z) = \frac{1 + zP(z)}{1 - 3z} \quad (2.10)$$

puis, en reportant cette expression dans 2.7,

$$P(z) = 1 + zP(z) + 2z \frac{1 + zP(z)}{1 - 3z}, \quad (2.11)$$

1. Ceci est un terme technique qui a un sens précis, ce n'est pas pour dire "si tout se passe bien, ça converge".

qui est encore de degré 1 en $P(z)$ et permet d'exprimer $P(z)$ en fonction de z :

$$P(z) \left(1 - z - \frac{2z^2}{1 - 3z} \right) = 1 + \frac{2z}{1 - 3z}, \quad (2.12)$$

ou, de manière équivalente,

$$P(z) \frac{1 - 4z + z^2}{1 - 3z} = \frac{1 - z}{1 - 3z}, \quad (2.13)$$

soit

$$P(z) = \frac{1 - z}{1 - 4z + z^2}. \quad (2.14)$$

On a ainsi obtenu une expression exacte pour la série génératrice $P(z)$, qui est une *fraction rationnelle*. On peut alors utiliser n'importe quelle technique pour en retrouver les coefficients. En factorisant le dénominateur $1 - 4z + z^2$ (qui n'est autre que le polynôme caractéristique de la matrice M ; ce n'est pas un hasard, même si ça y ressemble), on peut notamment exprimer $P(z)$ sous la forme

$$P(z) = \frac{a}{1 - z/c^+} + \frac{b}{1 - z/c^-} \quad (2.15)$$

avec a et b à déterminer ; qui permet d'obtenir les coefficients p_n de manière quasiment automatique (au moins quand on sait factoriser le dénominateur ; en gros, s'il est seulement de degré 1 ou 2).