Probabilités, Statistiques, Combinatoire : Devoir surveillé

22 mars 2019 – durée 1h20

Document autorisé : une feuille A4 manuscrite - Calculatrices autorisées

Les différents exercices sont indépendants. Il est important de justifier toutes vos réponses ; chaque fois que vous calculez une probabilité ou une probabilité conditionnelle, ou que vous interprétez l'énoncé d'un exercice en termes de probabilités ou de probabilités conditionnelles, faites-le le plus explicitement possible.

Barème (indicatif) : Ex.1, 4 pts ; Ex.2, 6 pts ; Ex.3, 6 pts ; Ex.4, 4 pts.

Rappel de notation : $\mathbb{P}_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle parfois notée $\mathbb{P}(A|B)$.

Exercice 1

Dans une promotion de 100 étudiants, on désigne 4 étudiants pour servir de délégués. L'ordre de désignation n'importe pas ; seul compte l'ensemble des 4 délégués.

1. Combien de choix sont possibles pour constituer l'ensemble de 4 délégués ?
2. La promotion de 100 étudiants est répartie en 4 groupes de 25. Combien y a-t-il de façons possibles de désigner un étudiant dans chaque groupe ?
3. Si l'on suppose que les 4 délégués sont choisis aléatoirement, de telle sorte que chaque choix possible de 4 délégués ait la même probabilité, quelle est la probabilité qu'on ait exactement un délégué dans chaque groupe ?

Exercice 2

Une *composition* d'un entier $n > 0$ est une séquence ordonnée (possiblement de longueur 1) d'entiers strictement positifs, dont la somme est égale à n . Par exemple, $(1, 3, 2, 5)$ est une composition de 11, et il y a 4 compositions de l'entier 3 : $(1, 1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, et (3) . On note $\mathcal{C}_n$ l'ensemble de toutes les compositions de n , et c_n le cardinal de $\mathcal{C}_n$.

1. Écrire tous les éléments de $\mathcal{C}_1$, de $\mathcal{C}_2$, et de $\mathcal{C}_4$.
2. Proposer (sans preuve) une formule pour c_n , qui soit possiblement valable pour tout $n > 0$.
3. On va chercher à prouver votre formule. Soit $n > 1$ un entier.
 - a) Quels sont les entiers k qui peuvent se trouver en première position dans une composition de n ?
 - b) Pour un entier k donné, comment sont formées les compositions de n qui commencent par l'entier k ? (distinguer le cas $k = n$ des cas $k < n$)
 - c) En déduire une formule donnant c_n en fonction des termes précédents de la suite, de c_1 à c_{n-1} .
 - d) **Question bonus** : en utilisant la relation trouvée à la question précédente, prouver, par récurrence sur n , la formule proposée à la question 2.

4. Écrire une fonction **Python** `compositions(n)`, qui retourne la liste de toutes les compositions de l'entier n (supposé strictement positif). Chaque composition sera représentée sous la forme d'un tuple. Il est recommandé d'écrire votre fonction de manière récursive; il n'est pas demandé de chercher à optimiser sa complexité.

Par exemple, l'appel `compositions(3)` devrait retourner la liste $[(3,), (1,1,1), (1,2), (2,1)]$ (dans cet ordre ou dans un autre).

Exercice 3

Dans le glossaire français d'une célèbre émission télévisée, il y a 21209 mots de 10 lettres. Le tableau suivant donne leur répartition en fonction de leur première lettre :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1685	1015	2362	1836	1639	728	671	548	945	120	58	498	1354
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
321	403	2012	98	1552	1588	1040	97	516	31	21	18	53

On tire au hasard une lettre (uniformément), puis un mot du glossaire commençant par cette lettre (uniformément).

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot YPONOMEUTE? Comparer avec la probabilité d'obtenir ce même mot si on avait tiré uniformément sur le glossaire entier. Même question avec CALLYPIGES (les deux mots sont dans le glossaire).
2. Les événements A : "Le mot choisi commence par une voyelle" et B : "La première lettre du mot est (strictement) avant H dans l'alphabet" sont-ils indépendants? Justifier.
Lors de l'émission, le candidat doit deviner le mot précédemment choisi. Les statistiques montrent qu'il a 80% de chances de le trouver s'il commence par une consonne, mais seulement 30% s'il commence par une voyelle.
3. Sachant que le candidat a trouvé le mot, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un mot commençant par une voyelle.

Exercice 4

Anatole et Philémon jouent à un jeu de hasard : ils tirent à tour de rôle à pile ou face, avec une même pièce équilibrée. Ils jouent jusqu'à ce qu'un joueur tire Pile; ce joueur gagne la partie (on admet que la probabilité que personne ne gagne la partie, est nulle). C'est Anatole qui joue en premier.

1. On définit les événements suivants :
 - A : "Anatole gagne la partie"
 - B : "Philémon gagne la partie"
 - C : "Anatole ne gagne pas la partie dès son premier lancer"
 Déterminer $\mathbb{P}(C)$.
2. Expliquer pourquoi on a $\mathbb{P}_C(B) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_C(A) = \mathbb{P}(B)$.
3. (Si vous n'avez pas fait la question précédente, vous pouvez admettre les identités demandées pour cette question) En déduire $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.