Moments de la largeur des arbres de Cayley de taille n

Jean-Francois MARCKERT

(Institut Elie Cartan, Nancy et UVSQ)

Soit A_n l'ensemble des arbres de Cayley de taille n. Notons Z_i le nombre de noeuds à la distance i de la racine ; la *largeur* d'un arbre (notée W_n), est le nombre maximum de noeuds sur un niveau, c'est à dire :

$$W_n = \max_{0 \leq i \leq H_n} Z_i.$$

Takàcs a prouvé que :

$$\frac{W_n}{\sqrt{n}} \to \max\{e_s \mid 0 \leq s \leq 1\} \qquad \text{en distribution}$$

où $(e_s)_{0\leq s\leq 1}$ est une excursion Brownienne normalisée. ($max\{e_s \mid 0 \leq s \leq 1\}$ est de loi thêta). Le but de l'exposé est de montrer que cette convergence est également une convergence pour les moments ainsi que de donner des bornes fines pour les moments de W_n. Pour cela, on donne d'abord une bijection entre les arbres de Cayley et les schémas de parking. On obtient en passant le théorème de Takàcs en étudiant les variations modérées d'une excursion discrète liée au schéma de parking.

Dans une deuxième étape, on décrit un couplage fin entre le processus empirique (associé à des v.a. uniformes) et un schéma de parking. Ceci nous permet d'obtenir une convergence forte du schéma de parking vers le maximum de l'excursion brownienne et d'obtenir ainsi les moments.

Pont brownien sur l'arbre

Philippe BOUGEROL

(Université de PARIS VI)

Let B be the brownian motion on a noncompact non Euclidean rank one symmetric space H. A typical examples is an hyperbolic space $H_n, n \geq 2$. For $\nu > 0$, the Brownian bridge $B^{(\nu)}$ of length ν on H is the process $B_t, 0 \leq t \leq \nu$, conditioned by $B_0 = B_\nu = 0$, where 0 is an origin in H. It is proved that the process $\frac{1}{\sqrt{\nu}} d(0, B^{(\nu)}_{t\nu}), 0 \leq t \leq 1$ converges weakly to the Brownian excursion when $\nu \to +\infty$ (the Brownian excursion is the radial part of the Brownian Bridge on $\mathbb{R}^3$). The same result holds for the simple random walk on an homogeneous tree.

Vitesse de convergence de methode particulaire stochastique avec branchements.

Herve REGNIER

(CAR, Caisse des Dépots et Consignations)

L'exposé a pour objectif de présenter la vitesse de convergence d'un algorithme particulaire stochastique fondé sur des processus de branchement à valeurs mesures. Cet algorithme permet de résoudre numériquement les équations du type :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \mathcal{L}u(t,x) + f \circ u(t,x), & \forall\ (t,x) \in\ ]\,0,T\,] \times \mathbb{R} \\ \\ u(0,x) = u_0(x), & \forall\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec $\mathcal{L}$ opérateur elliptique et u_0 fonctiondéfinie sur $\mathbb{R}$.
Nous montrons que la vitesse de convergence de la solution approchée vers la solution exacte, estimée en norme $L^{1,\phi}(\mathbb{R})$ est en $\mathcal{O}(\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{\sqrt{N}})$ où, N est le nombre de particules initial, Δt le pas de discrétisation temporel et ϕ un poids mis sur la norme. L'algorithme ainsi que le résultat de vitesse de convergence ont été étendus pour des conditions initiales non monotones.

Pont brownien, coalescence et hashing

Philippe CHASSAING

(Institut Elie Cartan, Nancy)

On rappelle les diverses constructions de l'*arbre continu aléatoire* données par Aldous, et la construction du *coalescent additif standard* donné par Aldous & Pitman.

Une situation de coalescence apparaît quand on analyse des algorithmes de hachage: on montre qu'elle conduit à une construction très simple du coalescent additif standard, à partir du pont Brownien. Cette construction a aussi été considérée récemment par Bertoin.

Le hachage est une méthode de rangement en mémoire concue pour permettre une recherche rapide après rangement. De nombreuses variantes ont été proposées dès les années 60 par les informaticiens (voir Knuth 1997, Gonnet & Baeza-Yates 1989). L'analyse du coût de ces différentes methodes fait parfois appel à une combinatoire sophistiquée (Pittel 1987, Flajolet et al. 1998, Knuth 1998). Les méthodes de hachage consistent à ranger chaque fichier à une place déterminée par son nom, via une fonction de hachage, i.e. une fonction définie sur l'ensemble des chaînes de caractères à valeurs dans l'ensemble des places (ou des numéros de ces places). L'avantage évident est que lorsqu'on aura à nouveau besoin du fichier, la fonction de hachage indiquera alors directement où le chercher. Malheureusement une telle fonction de hachage ne peut être bijective, avec comme corollaire des **collisions**: le fichier va trouver sa place déja occupée.

Une méthode de résolution de ces collisions, parmi d'autres variantes, consiste à voir les places mémoire comme des places de parking et le fichier (voiture) trouvant sa place attitrée, disons la place k, déja occupée, va parcourir les places $k+1$, $k+2$, etc ... et se ranger à la première place vide qu'il trouvera. Des blocs de voitures (rangées consécutivement) se forment ainsi, et se soudent quand de nouvelles arrivées viennent remplir l'espace vide entre deux blocs. Les tailles des blocs donnent une mesure du coût de hachage. Soit $B(n,m) = \big(B_k(n,m)\big)_{k\geq 1}$ la suite des tailles (rangées en décroissant) des différents blocs après m arrivées au hasard sur n places. Posons

$$X_n(t) = \Big(\frac{B_k(n, n - \lceil t\sqrt{n}\rceil)}{n}\Big)_{k\geq 1}.$$

Alors les distributions fini-dimensionelles du processus X_n convergent vers celles du coalescent additif standard, mais aussi vers certaines fonctionelles naturelles du pont Brownien standard, conduisant ainsi à une construction alternative du coalescent additif standard.

Bibliographie

D. J. Aldous, The continuum random tree. II: An overview. Stochastic analysis, Proc. Symp., Durham/UK 1990, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 167, 23–70 (1991).

David Aldous & Jim Pitman (1999). The standard additive coalescent. *Ann. of Proba.* 26, 1703–1726 (1998).

J. Bertoin, A fragmentation process connected with Brownian motion. *Prépublication* 487, Laboratoire de Probabilités, Université de Paris VI & VII, 4, pl. Jussieu, Feb. 1999.

Ph. Chassaing & Guy Louchard (1999). Phase transition for parking blocks, Brownian excursion and coalescence. Preliminary version. available at: http://altair.iecn.u-nancy.fr/∼chassain

P. Flajolet, P. Poblete, & A. Viola (1998). On the Analysis of Linear Probing Hashing. *Algoritmica* Vol. **22** (4): 490-515.

D. Foata, & J. Riordan (1974). Mappings of acyclic and parking functions. *Aequationes math.* Vol. **10**: 10-22.

Gonnet, G. H. & Baeza-Yates, R. (1989). *Handbook of algorithms and data structures.* Addison-Wesley.

D.E. Knuth (1997). *The art of computer programming. Vol. 3: sorting and searching* , 2nd ed., Addison-Wesley.

D. E. Knuth (1998). Linear Probing and Graphs. *Algoritmica* Vol. **22** (4): 561-568.

B. Pittel (1987). Linear probing: the probable largest search time grows logarithmically with the number of records. *J. Algorithms* Vol. **8** (2): 236–249.