Cascades multiplicatives sur arbres de Galton-Watson: propriétés asymptotiques

Quansheng LIU

IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu,
35042 Rennes, France (Email: liu@univ-rennes1.fr)

Nous considérons une martingale non-négative, $\{Y_n\}_{(n\geq 1)}$, définie par des sommes de produit de poids aléatoires indexés par des nœuds d' un arbre de Galton-Watson. Il y a une mesure naturelle, μ_ω, définie sur la frontière de l'arbre, de masse $\|\mu_\omega\| = Z(\omega) := \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega)$. Lorsque l'arbre est un arbre homogène à r (=constante ≥ 2) branches et lorsque les poids sont indépendants et identiquement distribués, il s'agit du modèle canonique des cascades auto-similaires de Mandelbrot. La martingale $\{Y_n\}$ a été aussi bien étudiée dans beaucoup d'autres contextes, notamment dans la théorie de marche aléatoire avec branchement.

Dan le cas où la variable limite Z n'est pas dégénérée, nous proposons d'étudier la vitesse de convergence de la fonction de répartition $P(Z \leq x)$ quand $x \to 0$, et celle de la fonction caracteristique Ee^{itZ} lorsque $|t| \to \infty$. En particulier, nou s obtenons, dans des cas courants, des conditions nécessaires et suffisantes pour l'éxistence des moments d'ordre négatifs de Z, et la continuté absolue sur $]0, \infty[$ de la loi de Z. Pour le modèle canonique de Mandelbro t, d'autres propriétés asymptotiques sont aussi montreées pour la variable limite $Z = Z(r), r \geq 2$, lorsque le nombre de branche r tend vers l'infini, la loi des poids étant fixeé. Notre étude est basée sur l'équation fonctionnelle $Z = \sum_{i=1}^{\infty} A_i Z_i$, où $(A_1, A_2, ...)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $[0, \infty[\times[0, \infty[\times...$ et indépendante de $(Z_1, Z_2, ...)$, les $Z_i's$ étant des copies indépendantes de Z.

Les modèles d'arbres de l'analyse d'algorithmes

Philippe Flajolet, INRIA Rocquencourt

L'algorithmique est le lieu d'un foisonnement de modèles d'arbres aléatoires. Chacun de ces modèles probabilise de manière spécifique l'enseL'L'algorithmique est le lieu d'un foisonnement de modèles d'arbres aléatoires. Chacun de ces modèles probabilise de manière spécifique l'ensemble des arbres à n sommets. Ainsi, les modèles combinatoires uniformes interviennent-ils dans l'anaL'algorithmique est le lieu d'un foisonnement de modèles d'arbres aléatoires. Chacun de ces modèles probabilise de manière spécifique l'ensemble des arbres à n sommets. Ainsi, les modèles combinatoires uniformes interviennent-ils dans l'analyse des algorithmes de manipulation symbolique. Les modèles d'arbres de recherche et leurs généralisations multidimensionnelles se relient à la gestion de données géométriques. Enfin les modèles d'arbres digitaux qui sont d'une grande richesse recouvrent les algorithmes de hachage dynamique, certaines méthodes d'algorithmique distribuée, ainsi que divers problèmes de recherche textuelle et de compression, voire même la factorisation de polynômes en calcul formel.

L'exposé présentera un survol de ces modèles, de leur relevance algorithmique, ainsi que des principales caractéristiques des arbres aléatoires résultants, comme notamment les types de sommets, la hauteur ou la longueur de cheminement. L'accent sera mis sur les approches issues de la "combinatoire analytique", c'est-à-dire fondées sur la conjonction d'équations fonctionnelles et d'analyse asymptotique complexe.

Analyse en moyenne d'arbres digitaux.

Brigitte Vallée, GREYC
Université de Caen, F-14032 Caen (France)

L' arbre digital (ou trie) est une structure de données très utilisée en théorie de l'information. Elle sert à implémenter des dictionnaires sur des mots. Nous considérons ici que la source qui produ it les mots obéit à un mécanisme très général lié à un système dynamique; Ceci permet de modéliser des sources simples ("sans mémoire" ou associées à une chaî ne de Markov) mais aussi des mécanismes plus complexes qui produisent des mots où le symbole émis dépend de toute l'histoire précédente. Les trois principaux paramètres des tries ont tous une signification algorithmique claire, et nous analysons leur valeurs moyennes.

La notion de "probabilité fondamentale" joue un rôle essentiel dans l'a nalyse : A tout préfixe fini m, on associe la probabilité p_m qu'un mot commence par le préfixe m et toutes les analyses précédentes font intervenir deux grandeurs

$$\Lambda(k,s) := \sum_{m \in \mathcal{M}_k} p_m^s, \qquad \Lambda(s) := \sum_{m \in \mathcal{M}^*} p_m^s,$$

où $\mathcal{M}_k$ désigne l'ensemble des préfixes de longueur k et $\mathcal{M}^*$ l'ensemble des préfixes finis. L'outil principal utilisé est lié au système dynamique sous-jacent: c'est une généralisation de l'opérateur classique de Ruelle. L'opérateur class ique agit sur des fonctions d'une variable, tandis que le nouvel opérateur agit su r les fonctions de deux variables. Plus précisément, ce sont les les propriétés spectrales de cet opérateur qui jouent un rôle essentiel et interviennent dans tous les résultats de l'analyse. En particulier, deux grandeurs importantes de la sou rce (entropie et probabilité de coï ncidence) s'expriment en fonction des obje ts spectraux dominants de l'opérateur de Ruelle.

Nous obtenons, pour les tries, les résultats suivants:

(i) La hauteur d'un trie a une valeur moyenne $\sim B \log n$

(ii) la longueur de cheminement a pour valeur moyenne $\sim An \log n$

(iii) la taille moyenne d'un trie est, à de petites fluctuations pr 'es, $\approx An$.
Les constantes A et B sont reliées à l'entropie et à la probabilit é de coï ncidence de la source qui produit les mots.

Processus de branchement avec migration controlee de type binomial

Christine Jacob INRA, Laboratoire de Biometrie Jouy-en-Josas

On considère un processus de Galton Watson généré par une distribution de descendance F d'espérance $m < \infty$ et de variance $\sigma^2 < \infty$, et avec une δ-migration contrôlée selon une loi binomiale de paramètre $p_{N_n^{bef}}$ dépendant de N_n^{bef}, population avant migration à la génération n. La migration est une émigration lorsque $\delta = 1$, une immigration lorsque $\delta = -1$ et une observation sur place lorsque $\delta = 0$. On suppose $\lim_n p_n = p$, $0 \leq p \leq 1$, $p_n = O(m_*^{-nx})$, où $m_* = m(1-\delta p)$, $0 \leq x \leq 1$. Lorsque $p > 0$, p_n est déterministe et lorsque $p = 0$, p_n peut être déterministe ou stochastique. On étudie le comportement asymptotique du processus avant migration $\{N_n^{bef}\}_n$, après migration $\{N_n\}_n$ et du processus de migration $\{N_n^{obs}\}_n$ dans le cas supercritique $m_* > 1$. On montre que la vitesse de convergence de N_n et N_n^{bef} ne dépend pas de x, ce qui n'est pas le cas de N_n^{obs}; $N_n m_*^{-n}$ et $N_n^{bef} m_*^{-n}$ convergent p.s. et dans L^2 vers une variable W dont on peut calculer l'espérance lorsque $x = 1$. Pour $x < 1$, $N_n^{obs}[m\tilde{p}_n m_*^{n-1}]^{-1}$ converge p.s. et dans L^2 vers W^{1-x} où $\tilde{p}_n$ est déterministe et $\lim_n p_n \tilde{p}_n^{-1} = O(1)$. On a le même type de résultats avec la normalisation associée à la martingale construite à partir de $\{N_n\}_n$, normalisation qui est stochastique, lorsque $p_{N_n^{bef}}$ est stochastique. La convergence L^2 est alors obtenue en supposant x suffisamment proche de 1 losque $\delta = 1$. Finalement pour $x = 1$, N_n^{obs} converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre déterministe ou stochastique selon que p_n est stochastique ou déterministe. On donne quelques exemples d'application.