

Probabilité Conditionnelle

1. Algèbre des évènements

Définition 1 Une expérience aléatoire \mathcal{E} est une expérience qui, répétée dans des conditions apparemment identiques, peut conduire à des résultats différents.

L'ensemble de tous les résultats possibles de \mathcal{E} est noté Ω et s'appelle l'univers associé à \mathcal{E} .

Définition 2 Soit \mathcal{E} une expérience aléatoire et Ω l'univers qui lui est associé. On dit qu'un évènement est lié à l'expérience \mathcal{E} si pour tout résultat ω de Ω , on sait dire si cet évènement a eu lieu ou non.

Un évènement est représenté par l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels il a eu lieu.

Exemple 1 On lance deux dés cubiques discernables. L'ensemble des résultats est alors l'ensemble des couples d'entiers compris entre 1 et 6 :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Déterminer la représentation de l'évènement : "La somme des points est supérieure ou égale à 10".

L'évènement A : "La somme des points est supérieure ou égale à 10" est représentée par :

$$(6, 4), (5, 5), (4, 6), (6, 5), (5, 6), (6, 6)$$

1.1 Evènements particuliers

- Tout résultat ω de Ω est un évènement (élémentaire).
- Ω est l'évènement certain car il est toujours réalisé.

- \emptyset est l'évènement impossible car il n'est jamais réalisé.

1.2 Opérations sur les évènements

Soit A et B deux évènements

- Evènement contraire : \bar{A} :
 \bar{A} est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.
- Evènement $A \cap B$:
 $A \cap B$ est réalisé si et seulement si A et B sont réalisés simultanément.
- Evènement $A \cup B$:
 $A \cup B$ est réalisé si et seulement si A ou B est réalisé.
- Inclusion :
 $A \subset B$ signifie que chaque fois que A est réalisé, B est également réalisé : A implique B .

Exemple 2 *On lance deux dés cubiques non discernables.*

- *Déterminer la représentation de l'évènement A : "La somme des points est inférieure ou égale à 8".*
- *Déterminer la représentation de l'évènement \bar{A} .*
- *Déterminer la représentation de l'évènement B : "Le minimum de points des deux dé est strictement inférieur à 3"*
- *Déterminer la représentation de l'évènement \bar{B} :*
- *Déterminer les représentations respectives des évènements $A \cap B$ et $A \cup B$.*
- *A-t-on $B \subset A$?*
- *Déterminer un évènement inclus dans A .*

1.3 Probabilité d'un évènement

Définition 3 *Soit Ω l'univers d'une expérience \mathcal{E} et soit \mathcal{T} l'ensemble des évènements lié à \mathcal{E} , on appelle **probabilité** toute application P de \mathcal{T} dans \mathbb{R}_+ vérifiant :*

- $P(\Omega) = 1$;
- $\forall A, B \in \mathcal{T}$, si $A \cap B = \emptyset$ alors

$$\triangleright P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Propriétés 1 La probabilité P d'un évènement vérifie les propriétés suivantes :

$$\triangleright P(\bar{A}) = 1 - P(A) \text{ et donc } 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$\triangleright P(\emptyset) = 0$$

Théorème 1 A et B étant deux évènements quelconques, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

1.4 Probabilité conditionnelle

Définition 4 Soit A un évènement donné tel que $P(A) \neq 0$, B étant un évènement quelconque, on appelle **probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé** le nombre $P(B/A)$ défini par :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

1.5 Exemple

Considérons une famille dont nous savons qu'elle a deux enfants.

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon ?
2. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons sachant qu'il y a au moins un garçon ?

Question 1

- \triangleright Soit A l'évènement : "l'aîné est un garçon" et B l'évènement : "les deux enfants sont des garçons".
- \triangleright On cherche alors à calculer : $P(A/B)$.
- \triangleright d'où par définition :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Question 2

- Soit C l'évènement : “il y a au moins un garçon”.
- On cherche alors à calculer : $P(B/C)$.
- d'où par définition :

$$P(B/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

2. Utilisation des probabilités conditionnelles

Il est courant de connaître $P(B/A)$. On utilise plutôt **la formule des probabilités composées** :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

2.1 Exemple

Considérons deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune 2 boules noires et 3 boules blanches. On tire une boule de U_1 , on note sa couleur et on la met dans l'urne U_2 . Puis on tire une boule de U_2 .

Question : Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois la boule noire ?

Solution

- Soit A l'évènement : “la boule tirée de U_1 est noire” et B l'évènement : “la boule tirée de U_2 est noire”.
- On cherche alors à calculer : $P(A \cap B)$.
- Or :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{2}{5} \\ P(B/A) &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- d'où en utilisant les probabilités composées :

$$P(B \cap A) = P(A) \times P(B/A) = \frac{1}{5}$$

2.2 Un exemple ... “plus biologique”

Considérons une population dont 1 habitant sur 100 est atteint d’une maladie ; on a mis au point un test qui permet de détecter cette maladie avec 8 chances sur 10 de reconnaître un malade (test positif) et 9 chances sur 10 de reconnaître un sujet sain (test négatif).

Question : Quelle est la probabilité pour qu’un sujet ayant un test positif soit malade ?

Solution

- Considérons les événements suivants :
- T = “le test est positif”
- M = “le sujet est malade”
- S = “le sujet est sain”
- Remarquons : $M = \bar{S}$.
- On recherche : $P(M/T)$!
- D’après l’énoncé, on connaît les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} P(M) &= \frac{1}{100} & P(S) &= \frac{99}{100} \\ P(T/M) &= \frac{8}{10} & P(T/S) &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

D’après le théorème de Bayes :

$$P(M/T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

Le problème se ramène donc au calcul de $P(M \cap T)$ et de $P(T)$.

Détermination de $P(M \cap T)$

$$M \cap T = T \cap M$$

d’où :

$$P(M \cap T) = P(T \cap M) = P(M) \times P(T/M) = \frac{1}{100} \times \frac{8}{10}$$

Détermination de $P(T)$

On peut remarquer que pour tout évènement :

$$T = (T \cap M) \cup (T \cap \bar{M})$$

où $(T \cap M)$ et $(T \cap \bar{M})$ sont incompatibles :

$$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M})$$

De plus dans notre cas particulier :

$$T = (T \cap M) \cup (T \cap S)$$

D'où :

$$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap S)$$

On sait calculer $P(T \cap M) = \frac{8}{1000}$ et d'après le théorème de Bayes :

$$P(T \cap S) = P(T/S) \times P(S) = \frac{1}{10} \times \frac{99}{100} = \frac{99}{1000}$$

d'où finalement :

$$P(M/T) = \frac{P(M) \times P(T/M)}{P(M) \times P(T/M) + P(S) \times P(T/S)}$$

$$P(M/T) = \frac{0.008}{0.008 + 0.099} = \frac{8}{107} = 0.075$$

Remarque 1

Cet exemple soulève quelques problèmes :

- Choix des probabilités de réussite au test et de tirer dans la population malade. Comment estimer ces probabilités.
- Dans l'exemple précédent, un sujet qui présente un test positif a environ 75 chances sur 1000 d'être malade mais aussi :

$$P(S/T) = 0.55$$

Un individu présentant un test positif a beaucoup plus de chance d'être sain que malade!!!

- Importance de la détermination des valeurs des probabilités intervenant dans le calcul

Remarque

D'une manière générale, pour tout évènement M et T la formule de Bayes s'écrit également

$$P(M/T) = \frac{P(M) \times P(T/M)}{P(M) \times P(T/M) + P(\bar{T}) \times P(T/\bar{T})}$$

2.3 Généralisation

Soit trois évènements quelconques, A, B, C tel que $P(A) \neq 0$ et $P(A \cap B) \neq 0$ alors :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/A \cap B)$$

2.4 Exemple

Considérons une urne U_1 contenant 3 boules noires et 4 boules blanches. On tire une à une sans remise trois boules de U_1 .

Question : Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Solution

- Soit A_i l'évènement : "la i ème boule tirée de U_1 est blanche et B_i l'évènement : "la i ème boule tirée de U_1 est noire".
- On cherche alors à calculer : $P(A_1 \cap A_2 \cap B_3)$.
- Or :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap B_3) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(B_3/A_1 \cap A_2)$$

- et :

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{4}{7} \\ P(A_2/A_1) &= \frac{3}{6} \\ P(B_3/A_1 \cap A_2) &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

- d'où finalement :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap B_3) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$$

3. Evénements indépendants

Définition 1 Deux événements A et B sont dits indépendants si :

$$P(A) = P(A/B) \quad \text{ou} \quad P(B) = P(B/A)$$

La réalisation de l'un quelconque des deux événements n'influe pas sur la réalisation (ou la non réalisation) de l'autre.

D'où en appliquant le théorème de Bayes :

$$P(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

On écrit généralement que deux événements sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Remarque

En général, on utilise cette égalité pour décider de l'indépendance de deux événements A et B :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(A) \times P(B) \Rightarrow P(B/A) = P(B)$$

Par exemple : deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont pas indépendants :

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 = P(A) \times P(B/A)$$

Exemple

On jette simultanément un dé blanc et un dé rouge. Soit A l'événement "le n. 1 est sorti sur le dé blanc". Soit B l'événement "la somme des numéros est égale à 7".

- Calculer $P(A)$ et $P(B)$
- Calculer $P(A \cap B)$, $P(A/B)$ et $P(B/A)$.
- A et B sont-ils indépendants ?
- $P(A) = \frac{1}{6}$
- $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

- $P(A \cap B) = P(\text{blanc} = 1, \text{rouge} = 6) = \frac{1}{36}$
- $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6}$
- $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{6}$
- Il y a indépendance puisque $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

4. Loi des grands nombres

La fréquence relative d'un évènement E dans une suite de n épreuves identiques tend vers la probabilité P de cet évènement lorsque le nombre n d'épreuves augmente indéfiniment :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|f_n - P| < \epsilon) = 1$$

f_n est la fréquence relative d'un évènement E et P sa probabilité.