

Algorithmique des graphes

Cours 1 – Introduction

František Kardoš

`frantisek.kardos@u-bordeaux.fr`

Organisation de l'UE

12 × 1h20 de cours

12 × 2h40 de TD

Organisation de l'UE

12 × 1h20 de cours

12 × 2h40 de TD

DS début novembre

examen mi-décembre

Organisation de l'UE

12 × 1h20 de cours

12 × 2h40 de TD

DS début novembre

examen mi-décembre

groupe 1 : František Kardoš

groupe 2 : Olivier Baudon

groupe 3 : Olivier Delmas

groupe 4 : Adrien Boussicault

groupe 5 + CMI : František Kardoš

groupe MI : Philippe Duchon

Organisation de l'UE

12 × 1h20 de cours

12 × 2h40 de TD

DS début novembre

examen mi-décembre

groupe 1 : František Kardoš

groupe 2 : Olivier Baudon

groupe 3 : Olivier Delmas

groupe 4 : Adrien Boussicault

groupe 5 + CMI : František Kardoš

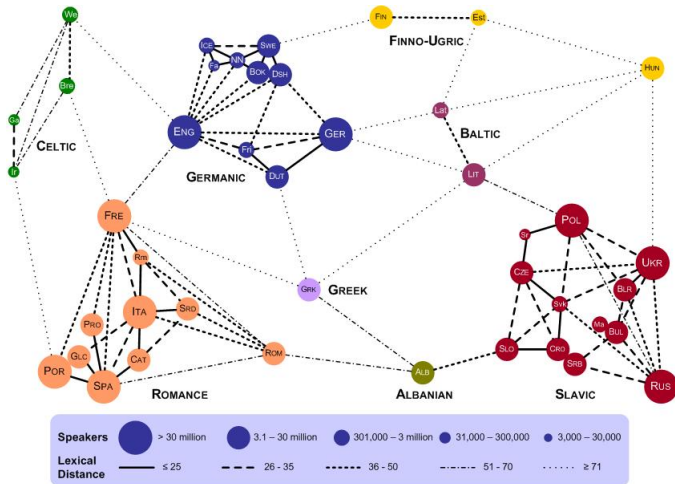
groupe MI : Philippe Duchon

www.labri.fr/perso/fkardos

Contenu de l'UE

- ▶ graphes et leurs représentations
- ▶ algorithmes d'exploration
 - ▶ parcours en largeur
 - ▶ parcours en profondeur
- ▶ algorithmes d'optimisation
 - ▶ arbre couvrant le moins cher
 - ▶ calcul de distances (plus courts chemins)
 - ▶ optimisation de flots
- ▶ complexité d'algorithmes

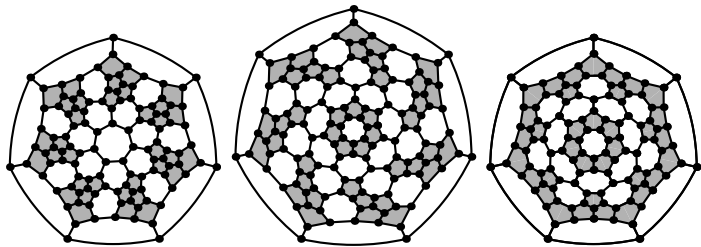
Qu'est-ce qu'un graphe ?



Qu'est-ce qu'un graphe ?



Qu'est-ce qu'un graphe ?

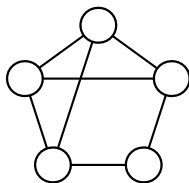
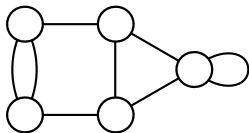


Graphes – définitions

Un graphe $G = (V, E)$ est un couple d'ensembles finis, dont

- ▶ V est l'ensemble de *sommets* de G (représentant des objets), et
- ▶ E est l'ensemble d'*arêtes* de G (représentant des liens/rerelations entre des objets).

Une arête relie deux sommets (pas nécessairement distincts).
Si l'arête e relie les sommets u et v , on écrit $e = uv$, on dit que u et v sont *voisins* ou *adjacents*.



Graphes – définitions

Pour un graphe G , on note

- ▶ $V(G)$ l'ensemble des sommets de G
- ▶ $n = |V(G)|$ le nombre de sommets de G – l'*ordre* de G
- ▶ $E(G)$ l'ensemble des arêtes de G
- ▶ $m = |E(G)|$ le nombre d'arêtes de G – la *taille* de G

Graphes – définitions

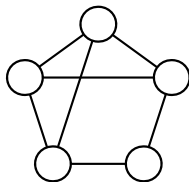
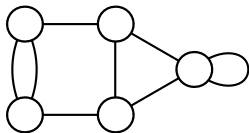
Une arête reliant un sommet à lui-même est une *boucle*.
Des arêtes reliant la même paire de sommets sont des arêtes parallèles (des arêtes multiples).

Un graphe est dit *simple* s'il n'a ni boucles ni arêtes multiples.

Graphes – définitions

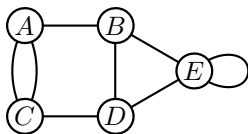
Une arête reliant un sommet à lui-même est une *boucle*.
Des arêtes reliant la même paire de sommets sont des arêtes parallèles (des arêtes multiples).

Un graphe est dit *simple* s'il n'a ni boucles ni arêtes multiples.
Y a-t-il un graphe simple parmi ces deux-ci ?



Graphes – représentations

- ▶ Les listes d'adjacence : pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins ;



A : $[B, C, C]$

B : $[A, D, E]$

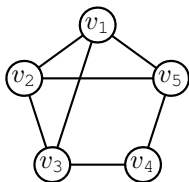
C : $[A, A, D]$

D : $[B, C, E]$

E : $[B, D, E, E]$

Graphes – représentations

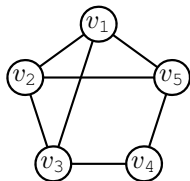
- ▶ Les listes d'adjacence : pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins ;
- ▶ La matrice d'adjacence : pour chaque paire de sommets il est indiqué s'ils sont voisins ou pas ;



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	0	1
v_2	1	0	1	0	1
v_3	1	1	0	1	0
v_4	0	0	1	0	1
v_5	1	1	0	1	0

Graphes – représentations

- ▶ Les listes d'adjacence : pour chaque sommet du graphe la liste de ses voisins ;
- ▶ La matrice d'adjacence : pour chaque paire de sommets il est indiqué s'ils sont voisins ou pas ;
- ▶ La matrice d'incidence : pour chaque sommet et pour chaque arête il est indiqué s'ils sont incidents ou pas.



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	1	0	0	0	0
v_2	1	0	0	1	1	0	0
v_3	0	1	0	1	0	1	0
v_4	0	0	0	0	0	1	1
v_5	0	0	1	0	1	0	1

Degrés

Le *degré* $deg(v)$ d'un sommet v est la longueur de la liste d'adjacence de v .

Dans un graphe simple, $deg(v)$ est égal au nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

Degrés

Le *degré* $deg(v)$ d'un sommet v est la longueur de la liste d'adjacence de v .

Dans un graphe simple, $deg(v)$ est égal au nombre d'arêtes qui lui sont incidentes.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	1	1	1	0	0	0	0
v_2	1	0	0	1	1	0	0
v_3	0	1	0	1	0	1	0
v_4	0	0	0	0	0	1	1
v_5	0	0	1	0	1	0	1

Quel est le degré de v_2 ?

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Démo. (par double comptage)

Posons sur chaque sommet du graphe autant de jetons que son degré. Il y a $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ de jetons au total.

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Démo. (par double comptage)

Posons sur chaque sommet du graphe autant de jetons que son degré. Il y a $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ de jetons au total. Tout sommet passe un jeton à toute arête incidente.

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Démo. (par double comptage)

Posons sur chaque sommet du graphe autant de jetons que son degré. Il y a $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ de jetons au total.

Tout sommet passe un jeton à toute arête incidente.

Chaque arête reçoit deux jetons.

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Démo. (par double comptage)

Posons sur chaque sommet du graphe autant de jetons que son degré. Il y a $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ de jetons au total.

Tout sommet passe un jeton à toute arête incidente.

Chaque arête reçoit deux jetons.

Il y a donc $2m$ jetons, d'où l'égalité.

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Démo. (par double comptage)

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Démo. (par double comptage)

$\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ est la somme des sommes de lignes de la matrice d'incidence de G ;

Degrés

Théorème (lemme des poignées de main)

Soit G un graphe. La somme des degrés de sommets de G est égale au double du nombre d'arêtes de G :

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

Démo. (par double comptage)

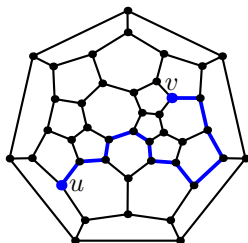
$\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ est la somme des sommes de lignes de la matrice d'incidence de G ;

$2m$ est la somme des sommes de colonnes de la dite matrice, d'où l'égalité.

Chaînes et connexité

Une *chaîne* entre deux sommets u et v d'un graphe G est une séquence d'arêtes consécutives, par exemple $(u_0u_1, u_1u_2, \dots, u_{k-1}u_k)$, telle que $u = u_0$ et $v = u_k$.

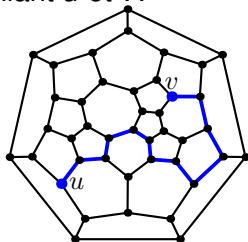
La *longueur* d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent (ici k).



Chaînes et connexité

On dit qu'un sommet v est *accessible* à partir du sommet u s'il existe une chaîne reliant u et v .

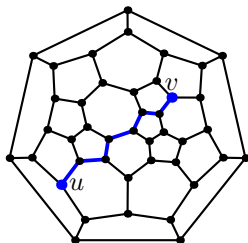
Un graphe est dit *connexe* si ses sommets sont tous accessibles entre eux, i.e., pour toute paire de sommets u et v il existe une chaîne reliant u et v .



Chaînes et connexité

La distance $dist(u, v)$ entre deux sommets u et v du graphe G est la longueur d'une plus courte chaîne entre u et v .

(S'il n'existe pas de chaîne entre ces sommets, la distance est définie comme infinie.)

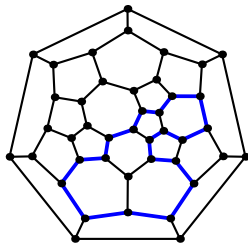


Cycles et arbres

Une séquence d'arêtes distinctes consécutives reliant un sommet à lui même est appelée un *cycle*; la *longueur* du cycle est le nombre d'arêtes composant le cycle.

Toute boucle est un cycle de longueur 1.

Toute paire d'arêtes parallèles forme un cycle de longueur 2.



Cycles et arbres

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

Un arbre est-il toujours simple ?

Cycles et arbres

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle.

Un arbre est-il toujours simple ?

Un graphe H est un *arbre couvrant* du graphe G si H est un arbre que l'on peut obtenir en supprimant des arêtes de G .

