

# Algorithmique des graphes

## Cours 9 – Encore des flots

František Kardoš

`frantisek.kardos@u-bordeaux.fr`

# Au programme

- ▶ Complexité de Ford-Fulkerson
- ▶ Performance de Ford-Fulkerson
- ▶ Applications de Ford-Fulkerson

# Complexité de Ford-Fulkerson

Marquage() :  $O(m + n)$ , comme un parcours en largeur

Améliorer() :  $O(m)$ , le quasi-chemin augmentant est de longueur au plus  $m$

Ford-Fulkerson :  $O(K \cdot (m + n))$  où  $K$  est le nombre d'améliorations effectuées avant de trouver un flot maximum

# Complexité de Ford-Fulkerson

Comment borner  $K$  ?

# Complexité de Ford-Fulkerson

Comment borner  $K$  ?

À chaque amélioration, un arc au moins devient saturé (ou redevient nul).

# Complexité de Ford-Fulkerson

Comment borner  $K$  ?

À chaque amélioration, un arc au moins devient saturé (ou redevient nul).

Si le même arc devient saturé à plusieurs reprises, ça ne peut pas être par le même quasi-chemin augmentant. En plus, c'est toujours par un quasi-chemin augmentant de plus en plus long.

# Complexité de Ford-Fulkerson

Comment borner  $K$  ?

À chaque amélioration, un arc au moins devient saturé (ou redevient nul).

Si le même arc devient saturé à plusieurs reprises, ça ne peut pas être par le même quasi-chemin augmentant. En plus, c'est toujours par un quasi-chemin augmentant de plus en plus long. Tout arc peut devenir saturé au plus  $m$  fois, d'où  $K \leq m^2$ .

# Performance de Ford-Fulkerson

Le quasi-chemin trouvé par `Marquage()` n'est pas forcément celui qui permet d'effectuer une amélioration d'un plus grande valeur possible.



# Performance de Ford-Fulkerson

Le quasi-chemin trouvé par `Marquage()` n'est pas forcément celui qui permet d'effectuer une amélioration d'un plus grande valeur possible.

Au lieu de juste chercher à joindre  $t$  par un quasi-chemin quelconque, on peut chercher à optimiser la valeur d'augmentation par un quasi-chemin, et cela sommet par sommet.

# Performance de Ford-Fulkerson

Implémentons Marquage() non pas comme un parcours en largeur, mais comme un calcul de distances (Dijkstra) :

# Performance de Ford-Fulkerson

Implémentons Marquage() non pas comme un parcours en largeur, mais comme un calcul de distances (Dijkstra) :

Dijkstra : Pour tout sommet, on veut calculer la **distance**

Ford-Fulkerson : Pour tout sommet, on veut calculer la **valeur d'amélioration**

# Performance de Ford-Fulkerson

Implémentons Marquage() non pas comme un parcours en largeur, mais comme un calcul de distances (Dijkstra) :

Dijkstra : La distance : la **somme** des distances arc par arc

Ford-Fulkerson : La valeur d'amélioration : le **minimum** des valeurs d'améliorations arc par arc

# Performance de Ford-Fulkerson

Choix de sommet à visiter parmi les sommets découverts mais pas encore visités (enfilés) :

Dijkstra : Le sommet d'une distance **minimum**

Ford-Fulkerson : Le sommet d'une valeur d'amélioration **maximum**

# Applications de Ford-Fulkerson

Posons  $c(e) = 1$  pour tout arc de  $G$ .

Qu'est-ce qu'un flot ?

# Applications de Ford-Fulkerson

Posons  $c(e) = 1$  pour tout arc de  $G$ .

Qu'est-ce qu'un flot ?

Qu'est-ce qu'un flot maximum ?

# Applications de Ford-Fulkerson

Posons  $c(e) = 1$  pour tout arc de  $G$ .

Qu'est-ce qu'un flot ?

Qu'est-ce qu'un flot maximum ?

Qu'est-ce qu'une coupe minimum ?



# Applications de Ford-Fulkerson

Posons  $c(e) = 1$  pour tout arc de  $G$ .

Qu'est-ce qu'un flot ?

Qu'est-ce qu'un flot maximum ?

Qu'est-ce qu'une coupe minimum ?

## Theorem (Menger)

*Le nombre maximum de  $s$ - $t$ -chemins arc-disjoints est égal à la taille minimum d'une  $s$ - $t$ -coupe.*

Preuve. Cas particulier de Ford-Fulkerson.

# Applications de Ford-Fulkerson

Et des chemins sommet-disjoints ?

# Applications de Ford-Fulkerson

Et des chemins sommet-disjoints ?

## Theorem (Menger)

*Le nombre maximum de  $s$ - $t$ -chemins sommet-disjoints est égal à la taille minimum d'un  $s$ - $t$ -séparateur.*

À noter : existe aussi dans une version non-orienté.

# Applications de Ford-Fulkerson

## Theorem (König)

*Soit  $G$  un graphe biparti. Alors le cardinal maximum d'un couplage est égal au cardinal minimum d'un transversal.*

Un *couplage* est un ensemble d'arêtes disjointes.

Un *transversal* est un ensemble de sommets couvrant toutes les arêtes.

Preuve. Transformer un graphe biparti en un réseau de flot, et appliquer Ford-Fulkerson.