

Devoir Surveillé du 6 novembre 2024
durée 1h30

Dans tout le sujet, on conviendra que, dans les différentes structures de données modélisant les graphes, les sommets sont rangés dans l'ordre croissant de leur numéro.

Exercice 1

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. On note par G^{-1} le graphe inversé de G , c'est-à-dire le graphe $G^{-1} = (V, E^{-1})$ ayant le même ensemble de sommets et dont l'ensemble des arcs E^{-1} est défini par :

$$(x, y) \in E^{-1} \iff (y, x) \in E$$

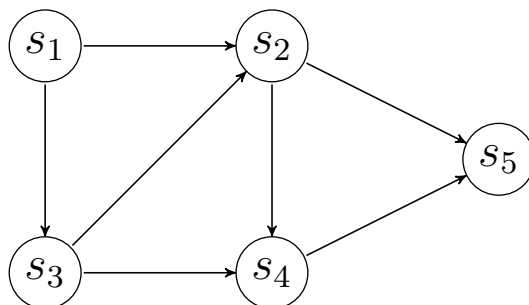


FIGURE 1 – Graphe orienté G_1 .

1. Soit G_1 le graphe de la Figure 1. Dessiner le graphe G_1^{-1} .
2. Donner la représentation de G_1^{-1} par ses listes de successeurs, puis par sa matrice d'adjacence.
3. Pour un graphe G orienté quelconque, représenté par ses listes de successeurs, proposer un algorithme pour calculer G^{-1} . Préciser la complexité de votre algorithme.
4. Pour un graphe G orienté quelconque, représenté par sa matrice d'adjacence, proposer un algorithme pour calculer G^{-1} . Préciser la complexité de votre algorithme.

Exercice 2

Important : Pour cet exercice vous répondrez sur l'annexe en page 4 et vous détacherez cette annexe pour l'insérer dans votre copie.

Soit le graphe orienté G_2 représenté par la Figure 2 que vous trouverez en annexe page 4. Ce graphe G_2 a 8 sommets. Le nom des sommets n'est pas indiqué sur le graphe, mais ils seront nommés par les lettres A, B, C, D, E, F, G et H.

Le but de cet exercice est d'attribuer correctement un nom à chaque sommet, de telle sorte qu'à l'issu d'un parcours en profondeur (en suivant l'ordre lexicographique) il y ait des arcs de **liaisons**, au moins un arc **retour**, au moins un arc **avant** et au moins 2 arcs **transverses**.

N'hésitez pas à faire des essais sur votre brouillon. Lorsque vous aurez trouver les noms des sommets qui permettent de respecter les contraintes précédemment indiquées,

1. vous indiquerez sur le graphe G_2 (en écrivant sur l'annexe) le nom de chacun des sommets (à l'intérieur de chaque sommet).
2. à l'issu de votre parcours en profondeur (en respectant l'ordre lexicographique), vous colorierez sur le graphe G_2 en annexe
 - en rouge les arcs de liaisons,
 - en vert le ou les arcs de retours,
 - en bleu le ou les arc avants,
 - et vous laisserez en noir les arcs transverses (il doit y en avoir au moins 2).

Si vous n'avez pas de couleurs, vous attacherez à chaque arc, à la place, une étiquette R, V et B pour rouge, vert et bleu.
3. vous indiquerez sur l'annexe de manière explicite au moins deux des arcs transverses obtenus à partir de votre parcours en profondeur.

Exercice 3

Dans cet exercice, le graphe (non-orienté) représente un réseau d'ordinateurs dans lequel on veut transmettre un message d'un sommet u à un sommet v d'une manière la plus efficace possible, en évitant de passer par un sommet x qui représente le lieu d'une attaque potentielle d'un ennemi cherchant à corrompre le message transmis.

1. Rappeler la définition de la distance $\text{dist}(u, v)$ entre deux sommets u et v dans un graphe (non-orienté) G .
2. Montrer que

$$\text{dist}(u, x) + \text{dist}(x, v) \geq \text{dist}(u, v)$$

pour tout triplet de sommets $u, v, x \in V(G)$ dans un graphe G .

3. Décider si la proposition suivante est vraie ou fausse. Si elle est vraie, donner une preuve ; si elle fausse, donner un contre-exemple.

Si $\text{dist}(u, x) + \text{dist}(x, v) > \text{dist}(u, v)$, alors aucune plus courte chaîne reliant u et v ne passe par x .

4. Décider si la proposition suivante est vraie ou fausse. Si elle est vraie, donner une preuve ; si elle fausse, donner un contre-exemple.

Si $\text{dist}(u, x) + \text{dist}(x, v) = \text{dist}(u, v)$, alors il existe une plus courte chaîne reliant u et v passant par x .

5. Décider si la proposition suivante est vraie ou fausse. Si elle est vraie, donner une preuve ; si elle fausse, donner un contre-exemple.

Si $\text{dist}(u, x) + \text{dist}(x, v) = \text{dist}(u, v)$, alors toute plus courte chaîne reliant u et v passe par x .

6. En utilisant l'algorithme $\text{PL}(\mathbf{G}, \mathbf{s})$ comme une boîte noire (donc sans la possibilité de modifier le code, tout en ayant accès aux résultats du calcul, à savoir, les tableaux `couleur[]`, `d[]`, et `pere[]`), proposer un algorithme efficace pour décider si le sommet x représente un danger potentiel, c'est à dire, décider s'il existe une plus courte chaîne reliant u et v qui passe par x . Préciser la complexité de votre algorithme.
7. Proposer une modification de l'algorithme $\text{PL}(\mathbf{G}, \mathbf{s})$ (cette fois-ci vous avez le droit à modifier le code de l'algorithme) pour décider si le sommet x représente un obstacle à éviter, c'est à dire si toute plus courte chaîne reliant u et v passe par x . Expliciter les lignes de code à ajouter / modifier / supprimer. Préciser la complexité de votre algorithme.

Rappels :

```
0  PP(G)
1  pour chaque sommet v de V(G) faire
2      couleur[v] <- BLANC
3      pere[v] <- nil
4  temps <- 0
5  pour chaque sommet v de V(G) faire
6      si couleur[v] = BLANC
7          alors Visiter_PP(v)

0  Visiter_PP(u)
1  couleur[u] <- GRIS
2  d[u] <- temps <- temps + 1
3  pour chaque v de Adj[u] faire
4      si couleur[v] = BLANC
5          alors pere[v] <- u
6              Visiter_PP(v)
7  couleur[u] <- NOIR
8  f[u] <- temps <- temps + 1

0  PL(G,s)
1  pour chaque sommet u de X[G] \ {s} faire
2      couleur[u] <- BLANC
3      d[u] <- infini
4      pere[u] <- nil
5  couleur[s] <- GRIS
6  d[s] <- 0
7  pere[s] <- nil
8  Enfiler(F, s)
9  tant que non vide(F) faire
10     u <- tete(F)
11     pour chaque v de Adj(u) faire
12         si couleur[v] = BLANC
13             alors couleur[v] <- GRIS
14                 d[v] <- d[u] + 1
15                 pere[v] <- u
16                 Enfiler(F, v)
17     Defiler(F)
18     couleur[u] <- NOIR
```

ANNEXE - VOUS DEVEZ DÉTACHER CETTE ANNEXE POUR L'INSÉRER DANS VOTRE COPIE
INDIQUEZ IMPÉRATIVEMENT VOTRE NOM ET PRÉNOM SUR CET ANNEXE

Nom :

Prénom :

Rappel des contraintes à respecter : Vous devez indiquer un nom à chaque sommet, de telle sorte qu'à l'issue d'un parcours en profondeur (en suivant l'ordre lexicographique) il y ait des arcs de **liaisons** (coloriés en rouge), au moins un arc **retour** (coloriés en vert), au moins un arc **avant** (coloriés en bleu) et au moins 2 arcs **transverses** (coloriés en noir).

Vos sommets porteront nécessairement les noms A, B, C, D, E, F, G et H.

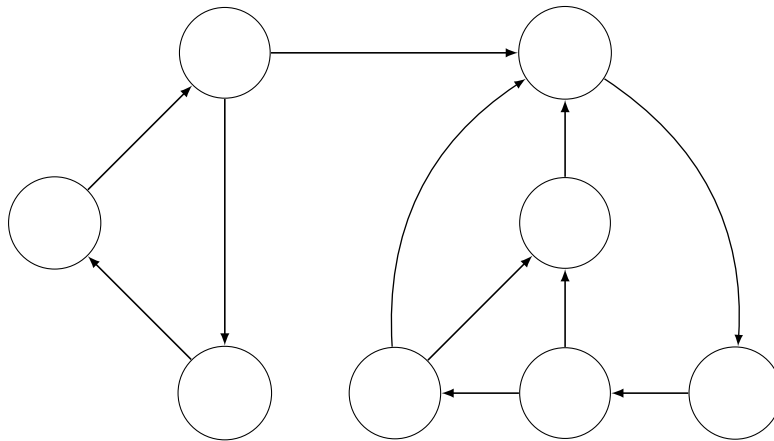


FIGURE 2 – Graphe orienté G_2 .

Parmi les arcs transverses obtenus à l'issue de votre parcours en profondeur, on trouve au moins les deux arcs transverses suivants :

Arc transverse #1

Arc transverse #2

(Vous nommerez un arc à l'aide du nom des sommets à chacune de ses extrémités. Par exemple s'il y a un arc entre le sommet A et B, vous nommerez cet arc par (A,B).)

FIN.