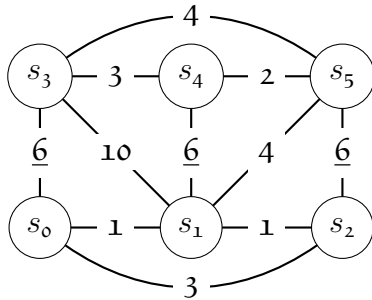


Exercice 1

On considère le graphe non orienté valué G_1 suivant :



Déterminer un arbre recouvrant de G_1 de poids minimum depuis le sommet s_0 en utilisant l'algorithme de PRIM.

FIGURE 1 – Le graphe G_1

Exercice 2

On considère le graphe non orienté valué G_1 de l'Exercice 1 :

Déterminer la distance (longueur du plus court chemin) du sommet s_0 à chacun des sommets de G_1 .

Appliquer l'algorithme de KRUSKAL à G_1 afin de déterminer un arbre couvrant T_1 de poids minimal ; indiquer la distance du sommet s_0 à chacun des sommets de T_1 .

Peut-on trouver un arbre couvrant minimal T_2 de G_1 tel que la distance de s_0 à chacun des autres sommets soit la même dans G_1 et dans T_2 ?

Exercice 3

On considère le graphe non orienté valué G_2 suivant :

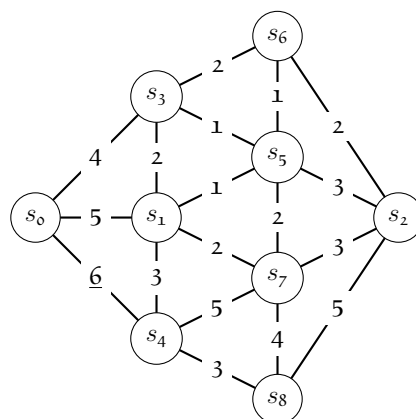


FIGURE 2 – Le graphe G_2

1. Déterminer le poids minimal d'un arbre recouvrant le graphe G_2 et combien y a-t-il d'arbres recouvrants de poids minimal ?
2. Appliquer l'algorithme de PRIM à G_2 afin de déterminer un arbre couvrant T de poids minimal.

Exercice 4

Expliquer pourquoi, si tous les poids d'arêtes d'un graphe sont strictement positifs, tout sous-ensemble d'arêtes de poids total minimal, reliant entre eux tous les sommets, est nécessairement un arbre. Donner un exemple montrant que cette conclusion n'est plus valable si l'on autorise des poids négatifs.

Exercice 5

(*) Soit T un arbre couvrant minimal d'un graphe $G = (V, E)$, et soit S un sous-ensemble de V . Soit T' le sous-graphe de T induit par S , et soit G' le sous-graphe de G induit par S . Montrer que si T' est connexe, alors T' est un arbre couvrant minimal de G' .

Solutions des exercices optionnels

Correction de l'exercice 5

On suppose que T' est connexe, on souhaite démontrer que T' est un arbre couvrant de poids minimal de G' .

T' est sans cycle car il est un sous-graphe induit de T qui est lui-même sans cycle (T est un arbre). Comme T' est connexe, T' est donc un arbre.

T' est un arbre couvrant de G' car leur ensemble de sommets sont identiques : S .

Il ne reste plus qu'à démontrer que, parmi tous les arbres couvrants de G' , T' est de poids minimal.

Par hypothèse, T est un arbre couvrant minimal de G , donc $w(T)$ est minimal. Soit I l'ensemble des sommets internes de T' , c'est à dire les sommets de degré strictement supérieur à 1. On construit maintenant un nouveau graphe F à partir de T en retirant à T à la fois les arêtes $E(T')$ de T' et les sommets internes I de T' . Le graphe F est forcément une forêt, car en enlevant I et $E(T')$ de T on ne peut pas créer de cycles (qui n'existait déjà pas dans T) et on ne peut que déconnecter T en plusieurs composantes connexes $C_1, C_2, \dots, C_k$.

Par construction, $C_i \cap S$ ne contient que des sommets de degré 1 dans T' . Supposons qu'il contienne deux sommets s_1 et s_2 , alors, il existe une chaîne reliant s_1 à s_2 dans T' . Comme C_i est connexe, il existe aussi une chaîne de s_1 à s_2 . Par construction $E(T) \cap C_i = \emptyset$ et ces deux chaînes sont distinctes et forment un cycle dans T , ce qui est impossible. Ainsi, chaque composante C_i est connectée à T' par un seul sommet appartenant à S que l'on nommera $x_0^{C_i}$. Les autres sommets $x_j^{C_i}$ pour $j \neq 0$ n'appartiennent donc pas à S .

En d'autres termes, dans chaque composante connexe de la forêt F un et un seul sommet appartient à G' , on appellera ces sommets les *points de liaison*.

Comme l'on a conservé dans F les sommets de degrés 1 de T' , on a la relation :

$$E(T) = E(F) \sqcup E(T'),$$

où $\sqcup$ est l'union disjointe.

On obtient ainsi la relation sur les poids :

$$w(T) = w(F) + w(T').$$

Maintenant supposons que T' ne soit pas l'arbre couvrant minimal. Alors, il existe un arbre couvrant minimal T'' dans G' . On a alors la relation $w(T'') < w(T')$.

Substituons alors dans G' l'arbre couvrant T' par l'arbre couvrant T'' . Considérons maintenant le graphe $H = T'' \cup F$. Comme les sommets de T'' sont les sommets de G' alors l'union avec les composantes connexes de F reste un arbre, car on "recolle" à T'' des "petits morceaux" d'arbre (i.e., les composantes connexes de la forêt F) par un point de liaison, i.e., un seul sommet appartenant à S . Le graphe H ainsi obtenu est donc un arbre couvrant et son poids est :

$$w(H) = w(F) + w(T'') < w(T)$$

H est donc un arbre couvrant de G de poids plus petit que T ce qui contredit l'hypothèse de minimalité du poids de T . Donc, T' est un arbre couvrant minimal de G' .

Autre preuve Commençons par démontrer que T' est un arbre couvrant de G' .

T' est sans cycle car il est un sous-graphe induit de T qui est lui-même sans cycle (T est un arbre). Comme T' est connexe, T' est donc un arbre. Enfin, T' est un arbre couvrant de G' car leurs ensembles de sommets sont identiques : S .

Démontrons maintenant que, parmi tous les arbres couvrant de G' , T' est de poids minimal.

Pour ce faire, nous allons montrer d'abord la propriété intermédiaire suivante :

Soit T'' un arbre couvrant de G' de poids minimal tel que $T' \neq T''$. Il existe toujours deux arêtes e et f dans G' telle que :

1. $e \in T''$ et $e \notin T'$
2. $f \in T'$ et $f \notin T''$
3. $w(e) = w(f)$

et telle que la substitution de e par f dans T'' donne un autre arbre couvrant minimal de G' .

Comme T'' et T' sont des arbres couvrants de G' , ils ont le même nombre d'arêtes. Cela implique qu'il existe une arête $f \in T' \setminus T''$. On choisira l'arête de cet ensemble qui a le plus petit poids.

Soit C_f le cycle fondamental de f par rapport à T'' . Comme T' est sans cycle, il existe une arête e de C_f qui ne soit pas non plus dans T' . Comparons les poids de e et f : substituer e par f dans T'' donne un autre arbre couvrant de G' et comme T'' est de poids minimal, $w(e) \leq w(f)$.

Soit C_e le cycle fondamental de e par rapport à T' . Comme T'' est sans cycle, il existe une arête g de C_e qui ne soit pas non plus dans T'' . De plus, comme T' est inclu dans T , le cycle fondamental C_e est aussi un cycle fondamental de T . Comparons maintenant les poids de e et g : substituer g par e dans T donne un autre arbre couvrant de G et comme T est de poids minimal, $w(g) \leq w(e)$.

Pour résumer, on a :

- $w(g) \leq w(e) \leq w(f)$
- f est l'arête de plus petit poids telle que $f \in T'$ et $f \notin T''$
- g est une arête qui vérifie $g \in T'$ et $g \notin T''$

On en déduit que $w(g) = w(f)$ et donc que $w(e) = w(f)$.

Ainsi, substituer e par f dans T'' donne un arbre couvrant minimal de G' .

On peut maintenant utiliser la propriété précédente pour transformer T'' en T' en remplaçant, à chaque fois, une arête de T'' par une arête de T' tout en conservant les propriétés de T'' , à savoir, être un arbre couvrant de poids minimal de G' .