

Exercice 1

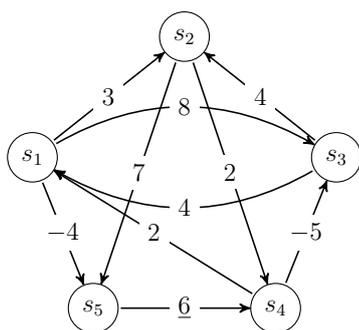
(*) Une preuve de la validité de l'algorithme de *Floyd-Warshall* est basée sur le lemme suivant :

Lemme 1 (Les sous-chemins des plus courts chemins sont des plus courts chemin) *Étant donné un graphe orienté pondéré $G = (V, E)$ et une fonction de pondération $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, soit $p = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ un plus court chemin d'un sommet v_1 à un sommet v_k et, pour tout couple d'entiers i, j quelconques tels que $1 \leq i \leq j \leq k$, soit $p_{ij} = \langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_j \rangle$ un sous-chemin de p allant du sommet v_i au sommet v_j . Alors, p_{ij} est un plus court chemin de v_i à v_j .*

Démontrer le **Lemme 1**.

Exercice 2

Soit $G_1 = (V, E)$ le graphe orienté avec une fonction de pondération $w : V \rightarrow \mathbb{R}$ représenté ci-dessous.



L'exécution de l'algorithme de *Floyd-Warshall* redonné en annexe page 2 a produit le résultat final suivant :

$$D^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & -5 & 0 & -5 \\ 5 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(5)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & s_3 & s_4 & s_5 & s_1 \\ s_3 & \text{NIL} & s_4 & s_2 & s_1 \\ s_3 & s_3 & \text{NIL} & s_2 & s_1 \\ s_3 & s_3 & s_4 & \text{NIL} & s_1 \\ s_3 & s_3 & s_4 & s_5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

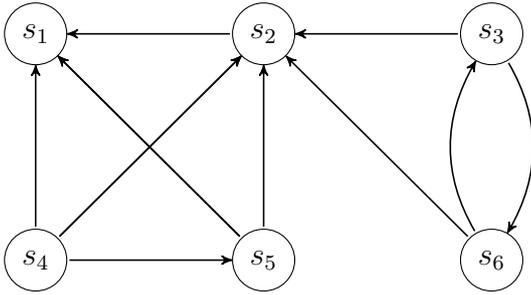
1. Expliquer comment connaître à partir de la matrice $D^{(5)}$ la distance du plus court chemin entre les sommets s_5 et s_4 puis entre les sommets s_2 et s_5 .
2. Expliquer comment reconstruire à partir de la matrice $\Pi^{(5)}$ le plus court chemin entre les sommets s_5 et s_4 puis entre les sommets s_2 et s_5 .
3. Recalculez les matrices $D^{(i)}$ et $\Pi^{(i)}$ en appliquant l'algorithme de *Floyd-Warshall* pour $i = 0, 1$ et 2 . Outre les matrices $D^{(i)}$, votre algorithme calculera également à chaque étape la matrice de liaison $\Pi^{(i)}$; plus précisément, vous calculerez la séquence $\Pi^{(0)}, \Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}$, où $\Pi_{ij}^{(k)}$ est défini comme le prédécesseur du sommet s_j sur le plus court chemin partant du sommet s_i , et dont tous les sommets intermédiaires sont dans $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$. L'initialisation de la matrice Π se fait de la manière suivante : pour $k = 0$, un plus court chemin de s_i vers s_j ne possède aucun sommet intermédiaire. Donc,

$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \text{NIL} & \text{si } s_i = s_j \text{ ou } w(s_i, s_j) = \infty, \\ s_i & \text{si } s_i \neq s_j \text{ et } w(s_i, s_j) < \infty. \end{cases}$$

4. (*) Complétez les résultats de la question précédente en finissant de recalculer les matrices $D^{(5)}$ et $\Pi^{(5)}$.

Exercice 3

Soit $G_2 = (V, E)$ le graphe orienté représenté ci-dessous.



1. Calculer la fermeture transitive du graphe G_2 .
2. Proposer un algorithme en $\mathcal{O}(n^3)$ pour calculer la fermeture transitive d'un graphe.

Annexe

FLOYD-WARSHALL(W)

- 1 $n \leftarrow \text{nombre_de_lignes}(W)$
- 2 $D^{(0)} \leftarrow W$
- 3 **pour** $k \leftarrow 1$ à n
- 4 **pour** $i \leftarrow 1$ à n
- 5 **pour** $j \leftarrow 1$ à n
- 6 $d_{ij}^{(k)} \leftarrow \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$
- 7 **calcul** $(\pi_{ij}^{(k)})$
- 8 **retourner** $D^{(n)}$ et $\Pi^{(n)}$

Solutions des exercices optionnels

Correction de l'exercice 1

DÉMONSTRATION – Si l'on décompose le chemin p en $v_1 \xrightarrow{p_{1i}} v_i \xrightarrow{p_{ij}} v_j \xrightarrow{p_{jk}} v_k$, alors $w(p) = w(p_{1i}) + w(p_{ij}) + w(p_{jk})$. Supposons à présent qu'il existe un chemin p'_{ij} de v_i vers v_j ayant un poids $w(p'_{ij}) < w(p_{ij})$. Dans ce cas, $v_1 \xrightarrow{p_{1i}} v_i \xrightarrow{p'_{ij}} v_j \xrightarrow{p_{jk}} v_k$ est un chemin de v_1 vers v_k dont le poids $w(p_{1i}) + w(p'_{ij}) + w(p_{jk})$ est inférieur à $w(p)$, ce qui contredit la prémisse qui veut que p soit un plus court chemin entre v_1 et v_k . \square