

Chemins arc-disjoints et flots binaires

Exercice 1

Soit G un graphe orienté avec une source s (un sommet sans arc entrant) et un puits t (un sommet sans arc sortant). Deux chemins reliant s à t sont dits arc-disjoints, s'ils ne partagent pas d'arc (cependant, ils peuvent passer tous les deux par un même sommet).

On souhaite connaître le plus grand nombre possible de chemins élémentaires arc-disjoints reliant s à t . Soit (G, s, t, c) le réseau de flot correspondant au graphe donné G , où la capacité c de tout arc du graphe est égale à 1.

1. Montrer que s'il existe k chemins arc-disjoints reliant s à t dans un graphe G , alors il existe un flot de valeur k dans le réseau de flot G .

Le reste de l'exercice a pour objectif de démontrer la réciproque : s'il existe un flot de valeur k dans G , alors il existe k chemins arc-disjoints reliant s à t .

Un flot est dit *binaire* si le flot $f(e)$ sur chaque arc d'un réseau est soit 0 soit 1. Si f est un flot binaire, on notera $E_1(f)$ l'ensemble des arcs avec un flot de 1.

2. Soit f un flot binaire de valeur $k \geq 1$. Montrer que l'ensemble $E_1(f)$ contient un chemin élémentaire de s à t .
3. Soit f un flot binaire de valeur $k \geq 1$. Montrer que si l'ensemble $E_1(f)$ contient un circuit C , alors en annulant le flot le long de C le résultat obtenu reste un flot.
4. En déduire que s'il existe un flot binaire de valeur $k \geq 1$, alors il existe un flot f' de même valeur que f tel que $E_1(f')$ ne contient aucun circuit.
5. Déduire des questions précédentes que s'il existe un flot binaire de valeur k , alors il existe k chemins arc-disjoints reliant s et t .
6. Montrer que si toutes les capacités d'arc sont binaires (soit 0 soit 1), alors une étape d'amélioration dans l'algorithme de Ford-Fulkerson transforme un *flot binaire* en un *flot binaire*. En déduire que le flot retourné par l'algorithme de Ford-Fulkerson est binaire.
7. En déduire le **théorème de Menger** : Soit G un graphe orienté et soient s et t deux sommets de G . Le nombre maximum de chemins élémentaires arc-disjoints reliant s à t est égal au nombre minimum d'arcs dont la suppression rend t inaccessible depuis s .