

## Connectivité d'un graphe et flot maximal

L'*arête connectivité* d'un graphe non orienté est le nombre minimum d'arêtes qu'il faut supprimer pour que le graphe ne soit plus connexe.

### Exercice 1

1. Quelle est l'arête connectivité d'un arbre ?
2. Quelle est l'arête connectivité d'une chaîne circulaire (*i.e.*, un cycle) ?

### Exercice 2

On souhaite montrer comment on peut déterminer l'arête connectivité d'un graphe non orienté  $G = (V, E)$  en exécutant un algorithme de calcul de flot maximal sur au plus  $|V|$  réseaux de flots, comportant chacun  $\mathcal{O}(V)$  sommets et  $\mathcal{O}(E)$  arêtes.

Pour ce faire, pour n'importe quelle paire de sommets  $u$  et  $v$ , on définit un réseau de flot  $G_{uv}$  (version orienté de  $G$ ) avec capacité  $c = 1$  sur toutes les arêtes et avec pour source  $s \equiv u$  et pour puit  $t \equiv v$ .

Le réseau de flots  $G_{uv}$  a  $\mathcal{O}(V)$  sommets (en fait  $|V|$  sommets) et  $\mathcal{O}(E)$  arêtes. Ainsi, le nombre d'arêtes qui traverse une coupe est égal à la capacité de la coupe. Nous noterons  $f_{uv}$  le flot maximal sur le réseau de flots  $G_{uv}$ .

1. Expliquer comment créer le réseau de flots  $G_{uv}$  à partir de  $G$ . Montrer que  $G_{uv}$  a bien  $|V|$  sommets et  $\mathcal{O}(E)$  arcs.

On souhaite montrer la propriété suivante :

**Propriété 1** *Quelque soit  $u \in V$ , l'arête connectivité de  $G$  noté  $k$  est égale à :*

$$k = \min_{v \in V - \{u\}} |f_{uv}|$$

*où la source est fixée et où tous les puits sont possibles.*

2. Si on suppose la propriété vraie, donner un algorithme qui permette de calculer l'arête connectivité d'un graphe.

La propriété 1 provient du théorème **flot maximal = coupe minimale** et de la façon dont on a choisit les capacités des arêtes pour que la coupe soit égale au nombre d'arêtes qui la traverse.

2. Démontrer la propriété 1. Pour cela vous démontrerez que  $\forall u \in V$ ,

(a)  $k \geq \min_{v \in V - \{u\}} |f_{uv}|$

(b)  $k \leq \min_{v \in V - \{u\}} |f_{uv}|$