

TD 1 - Programmation dynamique et jeux sous forme normale

Exercice 1. Programmation dynamique I : le jeu des pièces. Le jeu des pièces est un jeu à un joueur joué selon les règles suivantes. Le joueur tire à pile ou face, maximum trois fois. Le joueur s'arrête de jouer quand il veut, il peut lancer sa pièce entre 0 (refus de jouer) et 3 fois (le maximum).

- si le joueur a obtenu plus de piles que de faces, il perd autant d'euros que le nombre de piles.
- si le joueur a obtenu plus de faces que de piles, il gagne autant d'euros que le nombre de faces.
- si le joueur a obtenu un pile et un face, il gagne un euro.

a) Représenter ce jeu sous forme d'un arbre, en distinguant les états où le joueur prend une décision, ceux où il tire à pile ou face, et ceux où le jeu est terminé.

b) On suppose qu'un joueur veut maximiser son paiement moyen. Devrait-il accepter de jouer à ce jeu ? Si oui avec quelle stratégie ?

c) On suppose que le second choix est effectué par un adversaire. Quelle est la valeur du jeu ?

Exercice 2. Programmation dynamique II On considère un jeu à deux joueurs à somme nulle entre le joueur I et le joueur II qui part d'un tas de cinq allumettes. Les joueurs jouent chacun leur tour, en commençant par le joueur I. Le joueur dont c'est le tour peut soit diviser un des tas d'allumettes en deux tas de taille non-nulle qu'il choisit, ou bien retirer une allumette à des tas de taille ≥ 2 . Le jeu s'arrête quand tous les tas sont de taille 1. Le joueur I gagne ssi il reste un nombre impair de tas.

En utilisant la programmation dynamique, calculer le gagnant à ce jeu.

Exercice 3. Jeux sous forme normale Etendre Pierre-Feuille-Ciseau avec le puit, qui "gagne" contre pierre et ciseau mais perd contre feuille. Analyser ce jeu (valeur et stratégies optimales).

Exercice 4. Formule générique pour les jeux 2*2 Calculer la valeur des jeux sous forme normale suivants

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

et une formule générique pour le jeu

$$M_{a,b,c,d} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Pour cette dernière question, on commencera par éliminer les cas dégénérés puis on s'aidera d'une représentation graphique avant de mettre en équation selon le principe d'équilibre.

Exercice 5. Preuve géométrique du théorème de von Neumann Le théorème de von Neumann établit que tout jeu M sous forme normale a une valeur. On note de manière générique A_I l'ensemble d'actions du joueur I indexant les lignes de la matrice de paiement et A_{II} l'ensemble des actions du joueur II indexant les colonnes de la matrice de paiement.

- Déduisez le théorème de von Neumann du lemme intermédiaire suivant. Pour tout jeu M à somme nulle, soit il existe σ telle que

$$\inf_{\tau \in \mathcal{D}(A_{II})} (\sigma \cdot M) \cdot \tau > 0$$

soit il existe τ telle que

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{D}(A_I)} \sigma \cdot (M \cdot \tau) \leq 0 .$$

- Dans le cas de la matrice

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

donner une raison géométrique à la non-existence d'une stratégie σ garantissant à I un paiement > 0 .

- Calculer graphiquement τ qui garantit un paiement ≤ 0 .
- En utilisant la même représentation, expliquer pourquoi il existe des jeux où les stratégies pures de I ne lui assure pas un gain ≥ 0 mais les stratégies mixtes le font.
- Prouver que les jeux 2x2 (i.e. $|A_I| = |A_{II}| = 2$) vérifient le lemme intermédiaire.
- Généraliser à nx2.
- Généraliser à nxm.