

UNIVERSITÉ PARIS 7 — DENIS DIDEROT — UFR D'INFORMATIQUE

THÈSE

pour l'obtention du diplôme de
docteur de l'université Paris 7, spécialité informatique
présentée par

Hugo Gimbert

Jeux positionnels

Soutenue publiquement le 15 décembre 2006 devant le jury constitué par :

| | |
|------------------|--------------------|
| Erich Grädel | Rapporteur |
| Igor Walukiewicz | Rapporteur |
| Jean-Éric Pin | Président du jury |
| Wiesław Zielonka | Directeur de thèse |
| Thierry Bousch | Examineur |
| Daniel Krob | Examineur |
| Jean Mairesse | Examineur |
| Sylvain Sorin | Examineur |

À mon père

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Remerciements | 9 |
| Introduction | 11 |
| Résumé | 11 |
| Contexte | 11 |
| À la recherche des jeux positionnels. | 14 |
| Motivations | 15 |
| Contributions | 17 |
| Plan | 18 |
| 1 Positionnalité des jeux sur les graphes finis | 21 |
| 1.1 Introduction | 22 |
| 1.1.1 Cadre et problématique | 22 |
| 1.1.2 Motivations | 22 |
| 1.1.3 Plan du chapitre | 25 |
| 1.2 Jeux sur les graphes finis | 25 |
| 1.2.1 Systèmes de transitions | 25 |
| 1.2.2 Déroulement d’une partie | 26 |
| 1.2.3 Valeur d’un jeu et stratégies optimales | 28 |
| 1.3 Quelques exemples de fonctions de paiement | 30 |
| 1.3.1 Jeux pour la vérification | 30 |
| 1.3.2 Jeux en économie | 32 |
| 1.3.3 Jeux inédits | 35 |
| 1.4 Des jeux à un joueur vers les jeux à deux joueurs | 38 |
| 1.5 Positionnalité des jeux à un joueur | 44 |
| 1.5.1 Une caractérisation de la positionnalité pour un joueur | 45 |
| 1.5.2 Un théorème utilisable en pratique | 55 |
| 1.6 Positionnalité des jeux — exemples | 58 |
| 1.6.1 Jeux pour la vérification | 59 |
| 1.6.2 Jeux du supremum, de l’infimum et du compromis | 59 |
| 1.6.3 Jeu total | 61 |
| 1.6.4 Jeu multi-escompté | 63 |
| 1.6.5 Jeu du paiement en moyenne | 64 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 1.7 | Génération de nouvelles fonctions de paiement positionnelles | 66 |
| 1.7.1 | Binarisation et approximation | 66 |
| 1.7.2 | Produit prioritaire | 67 |
| 1.7.3 | Une grande famille de fonctions de paiements positionnelles | 70 |
| 1.8 | Le jeu du paiement en moyenne prioritaire : un cas limite des jeux multi- escomptés | 70 |
| 1.8.1 | Fusion et généralisation de deux résultats classiques | 72 |
| 1.8.2 | Limites successives du jeu multi-escompté | 74 |
| 1.8.3 | Limites simultanées du jeu multi-escompté | 81 |
| 1.9 | Conclusion | 84 |
| 2 | Positionnalité des jeux sur les graphes infinis | 87 |
| 2.1 | Contexte et motivations | 87 |
| 2.2 | Conditions de victoires et stratégies gagnantes | 90 |
| 2.3 | Jeux d'exploration et jeux de parité | 92 |
| 2.3.1 | Jeu d'exploration | 92 |
| 2.3.2 | Jeu de parité avec un nombre infini de priorités | 93 |
| 2.3.3 | Le jeu $\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty$ | 94 |
| 2.3.4 | Le jeu Par_∞ | 99 |
| 2.3.5 | Le jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$ | 99 |
| 2.3.6 | Stratégies gagnantes du joueur Max au jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$ | 104 |
| 2.4 | Le cas des graphes d'automates à piles | 108 |
| 2.4.1 | Automates alternants à parité | 109 |
| 2.4.2 | Systèmes à piles | 111 |
| 2.4.3 | Calcul des stratégies positionnelles gagnantes | 112 |
| 2.4.4 | Calcul des ensembles d'états gagnants | 121 |
| 3 | Positionnalité des jeux stochastiques | 125 |
| 3.1 | Introduction | 126 |
| 3.2 | Processus de décision Markoviens | 127 |
| 3.2.1 | Arènes et parties | 127 |
| 3.2.2 | Stratégies et mesures associées | 128 |
| 3.2.3 | Fonctions de paiements, jeux et valeur d'un état | 130 |
| 3.3 | Chaînes de Markov | 130 |
| 3.4 | Fonctions de paiement séparantes et split d'une arène | 132 |
| 3.5 | Valeur des parties qui quittent définitivement un état | 137 |
| 3.6 | Valeurs des parties qui reviennent infiniment souvent dans leur état initial | 139 |
| 3.7 | Positionnalité des jeux à un joueur | 141 |
| 3.8 | Jeux stochastiques à deux joueurs et à somme nulle | 143 |
| 3.8.1 | Notations | 143 |
| 3.8.2 | Des jeux à deux joueurs vers les jeux à un joueur | 144 |
| 3.9 | Applications | 147 |
| 3.9.1 | Preuve unifiée de résultats connus | 147 |
| 3.9.2 | Génération de fonctions de paiement séparantes | 149 |

| | | |
|-------|---|------------|
| 3.9.3 | Génération de fonctions de paiement positionnelles pour les jeux stochastiques | 150 |
| 3.10 | Conclusion | 151 |
| | Bibliographie | 151 |

Remerciements

Au cours de mon doctorat, Wiesław Zielonka m’a patiemment guidé à travers différents domaines scientifiques, en particulier la théorie des jeux. Au long de ce parcours, il m’a transmis non seulement de nombreuses connaissances, mais également sa rigueur scientifique et son enthousiasme pour la recherche. Pour cet enrichissement scientifique et personnel, je le remercie sincèrement. Parallèlement, Anca Muscholl m’a apporté son soutien permanent sur les plans scientifiques, humains et matériels, et je la remercie chaleureusement pour cela.

Je suis doublement reconnaissant à Erich Grädel. D’une part pour avoir accepté d’être rapporteur de cette thèse et consacré du temps à examiner mon travail. D’autre part pour avoir créé et coordonné le projet européen “GAMES”, qui m’a permis d’effectuer ma thèse dans un environnement scientifique très stimulant.

Je remercie également doublement Igor Walukiewicz pour, d’une part, avoir accepté de prendre sur son temps pour rapporter cette thèse, et, d’autre part, des interactions stimulantes dans le cadre des projets “GAMES” et “Versydis”.

Jean-Éric Pin a accepté de présider ce jury, et je lui en suis reconnaissant, ainsi que de m’avoir aiguillé vers Wiesiek à l’époque où je cherchais un directeur de thèse.

Je suis extrêmement reconnaissant et honoré que Thierry Bousch, Daniel Krob, Jean Mairesse et Sylvain Sorin aient accepté de faire partie du jury et d’examiner cette thèse.

Lors des trois années passées au LIAFA, j’ai eu le plaisir de faire partie de l’équipe soudée de doctorants constituée par Anne, Claire, Ha, Laura, Antoine, Benjamin, Berke, Blaise, Florian, Mathias, Olivier et Pierre. Cette équipe aux intérêts scientifiques variés était fortifiée par des thématiques transversales, dont l’étude nous occupa parfois jusqu’à tard dans la nuit. Cette bonne ambiance a été renforcée par l’énergie communicative de Juliusz et Mikołaj, et la gentillesse de Noëlle Delgado.

La conception et l’écriture du dernier chapitre de cette thèse ont été achevées à l’université de Varsovie, lors de mon séjour dans l’équipe de Damian Niwinski et Mikołaj Bojanczyk, que je remercie pour leur accueil amical, enthousiaste et intellectuellement stimulant.

Enfin, je sors du cercle académique afin de remercier Denis Choimet pour m’avoir transmis son plaisir de faire des mathématiques.

Introduction

Résumé

La théorie des jeux est un domaine actif de la recherche contemporaine, qui a pour objet d'étude les situations dans lesquels des agents interagissent, chacun défendant ses propres intérêts. Cette théorie fournit des outils d'analyse puissants à d'autres disciplines scientifiques, en particulier l'informatique.

Il existe différents modèles de jeux, qui ont été obtenus en faisant varier la façon dont les joueurs interagissent d'une part, et la façon de calculer leurs gains d'autre part. Dans cette thèse, on s'intéresse à deux modes d'interaction en particulier : d'une part les jeux sur des graphes, qui constituent le cadre des deux premiers chapitres et d'autre part les jeux stochastiques à nombre fini d'états et information complète, cadre dans lequel s'inscrit le troisième chapitre. Selon la façon dont on calcule les gains des joueurs, on obtient par exemple les jeux de parité, escomptés, en moyenne, du total ou encore de la limite supérieure.

Nous nous intéressons à l'existence de stratégies optimales positionnelles dans ces jeux, c'est-à-dire aux cas où les joueurs peuvent jouer optimalement de manière déterministe et sans mémoriser d'information. L'étude de cette classe est motivée par les bonnes propriétés algorithmiques des jeux positionnels et par les applications potentielles en théorie du contrôle et en vérification.

Nous obtenons différents résultats de caractérisation des jeux positionnels, dans les cadres des jeux sur des graphes finis ou infinis et des jeux stochastiques. Ces résultats nous permettent de générer de nombreux nouveaux exemples de jeux positionnels.

Contexte

Tout le monde aime jouer. La théorie des jeux est un domaine actif de la recherche contemporaine. Chaque année voit la parution de plusieurs monographies¹ consacrées à la théorie des jeux, et plusieurs revues internationales sont consacrées uniquement à ce sujet. La popularité de la théorie des jeux s'explique en partie par sa pluridisciplinarité. D'une part, les résultats fondamentaux de cette théorie trouvent leurs racines dans les théories mathématiques les plus diverses (théorèmes de points fixes, géométrie différentielle, logique pure, probabilités, algorithmique,...) et d'autre part, le fort pouvoir de

¹12 en 2001, voir le site www.gametheorysociety.org.

modélisation des jeux fait que les applications de la théorie des jeux vont de la biologie à la validation de systèmes industriels en passant par l'économie et l'écologie.

Les précurseurs. Il est difficile de situer exactement le début de la théorie des jeux. Ses premières traces remontent à la correspondance entre le chevalier de Méré, Pascal et Fermat au XVII^{ème} siècle, la remarque de Waldegrave [Wal13] au XVIII^{ème}, ou les travaux de Cournot [Cou38] au XIX^{ème}. La théorie des jeux a pris son essor au début du XX^{ème} siècle, avec les travaux d'Ernst Zermelo [Zer13], Emile Borel [Bor21] et John von Neumann [vM44]. Ces trois mathématiciens ont été les premiers à aborder la notion de jeu de manière générale, sans se restreindre à l'étude d'un exemple en particulier : Zermelo s'intéressait en toute généralité à ce qu'on appelle aujourd'hui les jeux d'accessibilité sur des graphes finis, et Borel et Neumann posèrent les fondations de la théorie des jeux matriciels.

Zermelo et les jeux d'accessibilité. Zermelo étudiait les jeux du type jeu d'échecs, formalisés comme des jeux joués sur un graphe fini. Dans le cas du jeu d'échec, chaque sommet de ce graphe correspond à une configuration possible des pièces sur l'échiquier et les arêtes correspondent aux coups admissibles des joueurs. Les joueurs jouent à tour de rôle en déplaçant un jeton sur le graphe. Certains des sommets sont marqués gagnants pour un joueur ou pour l'autre et si le jeton arrive sur un de ces sommets, la partie s'arrête et le joueur correspondant gagne. Zermelo introduisit la notion d'attracteur et de position gagnante, et décrivit une construction des stratégies gagnantes [Sch01].

Borel et les jeux matriciels. Borel s'intéressa à un type de jeux très différents de ceux de Zermelo appelés les jeux matriciels. Ce sont des jeux du type "pierre-feuille-ciseaux", qui ne durent qu'un seul tour, au cours duquel deux joueurs choisissent chacun une action. Les joueurs se révèlent ensuite simultanément les actions qu'ils ont choisies, et une matrice détermine une quantité d'argent que le premier joueur doit verser au second. Borel introduisit la notion de stratégie mixte, qui spécifient des distributions de probabilités utilisées par les joueurs pour choisir leurs actions. Borel conjectura l'existence de couples de stratégies mixtes optimales dans tout jeu matriciel et von Neumann prouva ensuite ce théorème, maintenant connu sous le nom de théorème du min-max².

Les jeux de Borel sont très différents de ceux de Zermelo. En effet, contrairement aux jeux de Zermelo, les jeux matriciels modélisent des situations dans lesquelles les joueurs n'ont accès qu'à une information incomplète au moment de prendre leur décision : il ne connaissent pas le choix de leur adversaire. Seconde différence, les jeux de Zermelo ont une durée possiblement infinie, alors que les jeux de Borel ne durent qu'un tour.

Shapley et les jeux stochastiques à états. Shapley a fusionné les modèles de jeux de Zermelo et de Borel en un même modèle, celui des jeux stochastiques à états [Sha53]. Un jeu de Shapley a une durée infinie. A chaque tour de jeu, le jeu est dans un certain état et cet état détermine un jeu matriciel. Max et Min s'affrontent à ce jeu matriciel, dont l'issue détermine d'une part le nouvel état du jeu et d'autre part une somme d'argent que Min doit verser à Max.

²Il s'avéra par la suite que ce résultat était un corollaire de travaux déjà publiés sur les systèmes d'inégalités. Plus de détails à propos de la petite saga des jeux matriciels sont donnés dans [Kji01].

Comment jouer ? Les jeux de Zermelo, Borel et Shapley spécifient différents types d'interactions entre les joueurs. D'autres types d'interactions ont également été étudiés. Isaac s'est intéressé au modèle du temps continu, ce qui a donné naissance à la théorie des jeux différentiels, Harsanyi a posé les fondations d'une théorie des jeux à information incomplète, Nash a étudié les jeux à plusieurs joueurs et récemment est également apparue une théorie des jeux quantiques.

Dans cette thèse, nous considérons deux modèles d'interaction. D'une part les jeux de type Zermelo, de durée infinie, où les joueurs jouent à tour de rôle et l'état du jeu évolue de manière déterministe en fonction de leurs choix. D'autre part, le cadre un peu plus général des jeux stochastiques à information complète. Ce sont des jeux d'un type hybride entre les jeux de Zermelo et ceux de Shapley, où les joueurs jouent tour à tour, et l'état du jeu change de manière probabiliste, en fonction des choix des joueurs.

Rentier, grippe-sou, flambeur ou logicien, à chacun sa fonction de paiement. Les jeux de Zermelo et de Shapley se différencient par le mode d'interaction des joueurs, mais également par la façon de calculer leurs gains.

Dans les jeux d'accessibilité de Zermelo, il n'y a que trois issues possibles à une partie, c'est-à-dire trois types de gains : soit Max gagne, soit Min gagne, soit la partie est nulle. Dans un jeu de Shapley, chaque tour de jeu détermine une certaine somme d'argent, appelée un paiement quotidien, que le joueur Min doit verser au joueur Max. Shapley considère que ces paiements sont soumis à un taux d'escompte $0 \leq \lambda < 1$, si bien que Max cherche à faire de gros gains le plus rapidement possible. Précisément, si la suite des paiements est x_0, x_1, x_2, \dots alors Min verse à Max la somme :

$$\phi(x_0, x_1, x_2, \dots) = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \dots \quad (1)$$

Une telle fonction ϕ , qui spécifie la somme versée à Max par Min en fonction de la suite d'états vus au cours de la partie est appelée une *fonction de paiement*.

Consécutivement aux travaux de Shapley, d'autres fonctions de paiement ont été considérées, chacune modélisant un type d'objectif différent. Ainsi, Gillette [Gil57] a introduit le jeu du paiement en moyenne, dans lequel Max est un rentier dont le but est de maximiser la *moyenne* de ses paiements quotidiens. Par la suite, Thuijsman et Vrieze [TV87] ont considéré la classe des jeux à paiement total, dans lequel Max est un grippe-sou qui cherche à maximiser la *somme* de ses paiements quotidiens. Enfin Maitra et Sudderth [MS96] ont introduit les jeux de la *limite supérieure*, dans lesquels Max est un flambeur qui aime les fortes émotions, et dont l'objectif est de toucher de temps à autres de gros paiements quotidiens, quitte à subir de fortes pertes le reste du temps. Parallèlement, la classe des jeux de *parité* a été très étudiée, car ces jeux permettent de coder des problèmes de vérification et de contrôle de systèmes munis de spécifications logiques [GTW02].

Un aperçu du formalisme. Formellement, un jeu est composé d'une arène qui spécifie comment les joueurs jouent, et d'une fonction de paiement qui spécifie ce que les joueurs gagnent.

Dans les deux premiers chapitres, l'arène est un système de transitions (S, T) dont l'ensemble des états S est partitionné entre les états contrôlés par le joueur Max et

ceux contrôlés par le joueur Min. Au n -ième tour de jeu, le jeu est dans un certain état $s_n \in S$. Le joueur contrôlant s_n choisit dans T une transition de source s_n , et le nouvel état du jeu s_{n+1} est la cible de cette transition. Chaque transition est colorée par une couleur, et la suite des transitions traversées au cours de la partie génère une suite infinie $c_0 c_1 \dots$ de couleurs. La fonction de paiement associée à cette suite a une valeur réelle : le paiement que le joueur Min doit verser au joueur Max.

Dans le troisième chapitre, on considère des systèmes de transitions stochastiques. De nouveau, chaque état est contrôlé par un des joueurs. Dans chaque état s , le joueur contrôlant s a le choix entre un nombre fini d'actions disponibles. À chaque action a correspond une distribution de probabilités $\delta(\cdot|s, a) \in \mathcal{D}(S)$ sur l'ensemble des états. Si le joueur qui contrôle l'état s choisit l'action a alors le nouvel état du jeu est t avec la probabilité $\delta(t|s, a)$. Comme dans les deux premiers chapitres, chaque transition est colorée par une couleur et la fonction de paiement calcule, en fonction de la suite des couleurs vues pendant la partie, la somme que Min doit verser à Max. Le joueur Max cherche à maximiser l'espérance de la somme qu'il reçoit. Évidemment, le cadre des deux premiers chapitres correspond au cas où chaque distribution de probabilités charge un unique état avec probabilité 1.

Le cadre des jeux de Shapley est encore plus général. Dans ces jeux, également appelés jeux concurrents, chaque état est en quelque sorte contrôlé par les deux joueurs à la fois. Les deux joueurs choisissent chacun simultanément une action, et la donnée de ces deux actions a_{Max} et a_{Min} et de l'état courant s détermine les probabilités de transition $\delta(\cdot|s, a_{\text{Max}}, a_{\text{Min}})$ vers les autres états de l'arène. Très peu des résultats présentés dans cette thèse peuvent être étendus au cadre de Shapley. En effet, les jeux de Shapley sont des jeux à information partielle, ce qui contraste avec le cadre de cette thèse, où ne considérons que des jeux à information parfaite.

À la recherche des jeux positionnels.

Le fil conducteur des travaux présentés dans cette thèse est la recherche de jeux dans lesquels les joueurs ont des stratégies optimales positionnelles.

Les jeux d'accessibilité, escomptés, en moyenne, totaux, de la limite supérieure, et les jeux de parité constituent les exemples les plus classiques de jeux stochastiques. Étonnamment, tous ces jeux partagent une même propriété non-triviale : dans chacun de ces jeux, les joueurs Max et Min peuvent jouer optimalement de manière déterministe et sans mémoriser aucune information. Autrement dit, Max et Min ont des stratégies optimales *positionnelles* : à chaque tour de jeu, la stratégie du joueur dont c'est le tour de jouer ne lui propose qu'un seul coup, et ce coup ne dépend que de l'état courant du jeu, et pas de l'histoire des tours de jeu précédents. Par extension, on dit qu'un jeu lui-même est positionnel si les joueurs ont des stratégies optimales positionnelles à ce jeu, et on dit qu'une fonction de paiement elle-même est positionnelle, si *tous les jeux* munis de cette fonction de paiement sont positionnels.

Partant de l'observation que toutes les fonctions de paiement classiques sont positionnelles, nous nous sommes posé la question suivante : quels sont les points communs

entre les jeux escomptés, en moyenne, totaux, de la limite supérieure et de parité, qui permettent d’expliquer leur positionnalité? En d’autres termes, nous avons cherché à caractériser la classe des fonctions de paiement positionnelles.

Avant de présenter les résultats que nous avons obtenus, nous motivons davantage l’étude de cette question.

Motivations

Nos motivations se résument comme suit. La théorie des jeux a de nombreuses applications en informatique, en particulier dans le domaine du contrôle des systèmes réactifs. Dans ce cadre, le problème central est d’obtenir des algorithmes calculant la valeur d’un jeu et des stratégies optimales. Or il existe un algorithme générique permettant d’effectuer ces calculs, dès lors que l’on sait que le jeu considéré est positionnel. Les résultats de positionnalité présentés dans cette thèse ont donc des applications potentielles intéressantes en théorie du contrôle et de la vérification. En particulier, puisque nous considérons le cadre général des jeux stochastiques à paiement, nos résultats permettent de sortir du cadre des spécifications logiques et de résoudre des problèmes de contrôle où les spécifications sont quantitatives et où les systèmes sont modélisés de manière probabiliste.

Jeux et informatique théorique. La théorie des jeux a de nombreux liens avec divers domaines de l’informatique fondamentale. En logique par exemple, les jeux d’Ehrenfeucht–Fraïssé [EF95] permettent d’établir des hiérarchies strictes entre les fragments d’une logique. En théorie des ensembles, on utilise le théorème de Martin [Mar75] pour montrer l’existence d’une hiérarchie entre les langages de mots infinis, appelée la hiérarchie de Wadge [Wad83, Kec95]. En théorie des automates, la preuve de clôture par complément des langages reconnaissables d’arbres infinis est basée sur la positionnalité des jeux de parité [EJ91a, GH82, MS85, MS95, Zie98]. Enfin, de nombreuses notions de simulation ou bissimulation sont définissables en termes de jeux [ESTW01].

Contrôle et vérification des systèmes réactifs. Un autre domaine d’application de la théorie des jeux en informatique est la modélisation, le contrôle, et la vérification des systèmes réactifs. Par *système* on entend un objet ou un logiciel dont l’état évolue au cours du temps, et un système est *réactif* si il interagit avec son environnement. En contrôle et vérification des systèmes réactifs, on modélise l’interaction entre un système et son environnement comme un jeu à deux joueurs [Tho95, EJ91a], et on cherche à s’assurer que cette interaction vérifie certaines propriétés exprimées dans une logique temporelle. Ce problème de décision se réduit à calculer le joueur gagnant dans un jeu de parité [EJ91a, AN01, Wil01]. Plus de détails sur l’application de la théorie des jeux à la vérification des systèmes sont donnés dans [Tho02, Wal04, Grä04, dA03, dAHM01, GTW02].

Spécifications quantitatives et systèmes stochastiques. Ainsi, la résolution des jeux de parité sur les graphes est un problème central en théorie du contrôle. Considérer une classe plus large de jeux que les traditionnels jeux de parité sur les graphes permet d’aborder une classe plus large de problèmes de contrôle. En particulier, les résultats

de cette thèse permettent de considérer le cas des systèmes stochastiques munis de spécifications quantitatives.

Illustrons cela à partir d'un exemple classique où la spécification est la propriété d'accessibilité $\mathbf{P} = \text{ " Ne jamais atteindre un état d'erreur. "}$ et où le système \mathbf{S} est modélisé de manière classique sous forme d'un automate alternant. Alors il y a deux réponses possibles au problème du contrôle : soit l'on peut contrôler \mathbf{S} de manière à satisfaire \mathbf{P} , soit l'on ne peut pas. Si l'on veut prendre en compte des phénomènes tels que les probabilités de défaillance d'un composant, alors les transitions du système sont stochastiques [dA97]. Dans ce cadre, on cherche à contrôler le système de manière à *maximiser la probabilité* que \mathbf{P} soit vérifié. Il est également naturel de raffiner la spécification \mathbf{P} , par exemple en admettant qu'il y ait des erreurs mais en spécifiant qu'elles doivent arriver le plus tard ou le moins souvent possible. Pour cela, on peut utiliser un taux d'escompte à la Shapley [dAFH⁺04, CMH06], ou encore le paiement en moyenne de Gilette. Dans ce dernier cadre, on cherchera à contrôler \mathbf{S} de manière à maximiser le temps moyen avant la première erreur, ou encore à minimiser la fréquence moyenne de l'occurrence d'une erreur.

Dans tous les cas, la synthèse d'un contrôleur optimal se réduit à calculer les valeurs et stratégies optimales du jeu correspondant.

Les jeux positionnels sont calculables. Ainsi, le calcul des valeurs et des stratégies optimales est un problème central de la théorie du contrôle et de la vérification des systèmes. Or la positionnalité d'un jeu est un argument clé pour obtenir des algorithmes effectuant ces calculs.

En effet, si l'on sait qu'un jeu est positionnel, alors le calcul de ses valeurs est aisé, pour peu que l'on sache calculer les valeurs des jeux à 0 joueur munis de la même fonction de paiement. Les jeux à 0 joueur correspondent aux mots ultimement périodiques dans le cadre des jeux sur les graphes et aux chaînes de Markov dans le cadre stochastique.

Sous cette hypothèse de calculabilité des jeux à 0 joueur, il existe un algorithme naïf de calcul des valeurs, de complexité exponentielle. Cet algorithme consiste à énumérer les couples de stratégies positionnelles, qui sont en nombre exponentiel. Chacun de ces couples définit naturellement un jeu à 0 joueur. En calculant puis comparant les valeurs associés aux différents couples de stratégies, il est facile de sélectionner un couple optimal, et d'en déduire les valeurs du jeu.

Bien sûr, il existe des algorithmes plus élaborés pour calculer les valeurs des jeux, basés par exemple sur la programmation linéaire [FV97], les méthodes de point fixes [Jur00], ou encore des méthodes probabilistes [PV01]. Toutefois, les preuves de corrections de chacun de ces algorithmes utilisent toutes la propriété de positionnalité.

Enfin, remarquons que même dans le cas des jeux sur des graphes infinis, tels que les jeux sur des graphes d'automates à pile, la positionnalité est un ingrédient essentiel dans la preuve de leur calculabilité et la mise au point des algorithmes correspondants [Wal96, Wal01, BSW03, Gim04].

Contributions

Nous présentons maintenant les résultats originaux de cette thèse, obtenus grâce aux nombreux conseils, idées et directions donnés par mon directeur de thèse.

Chapitre 1. Positionnalité des jeux sur des graphes finis. Le chapitre 1 a pour cadre les jeux sur des graphes finis. Nous nous sommes intéressés à la positionnalité de ces jeux, en en cherchant une caractérisation. Nous avons obtenu les résultats suivants :

1. Nous avons défini un ensemble de conditions suffisantes pour qu'une fonction de paiement soit positionnelle (théorème 1.21 et corollaires).
2. Nous avons donné une caractérisation exacte des fonctions de paiement positionnelles. Pour cela, nous avons caractérisé la classe des fonctions de paiements positionnelles pour les jeux à un joueur (théorème 1.18 et corollaires) sur les graphes finis, et montré que la positionnalité dans les jeux à un joueur entraîne la positionnalité dans les jeux à deux joueurs (théorème 1.8).
3. Ces résultats ont plusieurs corollaires intéressants. Tout d'abord on peut donner une preuve unifiée de la positionnalité de toutes les fonctions de paiement classique (escomptées, moyenne, total, limsup, cf. section 1.6).
4. Ensuite, ces résultats permettent de définir de nouvelles fonctions de paiement positionnelles, comme le jeu de compromis ou le jeu du paiement en moyenne prioritaire (section 1.6). De plus on peut définir un produit entre fonction de paiements, appelé produit prioritaire, qui conserve la positionnalité (théorème 1.38).
5. Enfin, nous avons étendu un résultat classique. Ce résultat classique établit que les jeux du paiement en moyenne sont les limites des jeux de Shapley à une unique probabilité d'arrêt, quand cette probabilité tend vers 0. Nous avons étendu ce résultat au cas de plusieurs probabilités d'arrêt et montré que dans ce cas, les limites du jeu escompté sont des produits prioritaires de jeux du paiement en moyenne (théorèmes 1.43 et 1.52).

Ces résultats ont fait l'objet de trois publications dans des actes de conférences internationales [GZ04, GZ05, GZ06].

Chapitre 2. Jeux sur des graphes infinis. Ce chapitre a pour cadre les jeux sur des graphes infinis en général et sur des graphes d'automates à pile en particulier. J'ai commencé mes recherches sur ce sujet au début de ma thèse. I. Walukiewicz avait montré comment résoudre les jeux de parité sur les graphes d'automate à pile [Wal96], et T. Cachat, T. Duparc et W. Thomas avaient introduit une condition de gain spécifique aux jeux sur des graphes d'automate à pile [CDT02]. Je me suis penché plus particulièrement sur les jeux définis par des combinaisons booléennes de la condition de parité, notée Par_d et d'une condition proche de celle de [CDT02], appelée la condition d'exploration et notée Exp . J'ai élargi le cadre d'étude aux jeux sur des graphes de degré fini, ainsi qu'aux jeux de parité avec une infinité de priorités, notés Par_∞ . J'ai obtenu les résultats suivants.

1. Le jeu $\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty$ est positionnel (théorème 2.4),

2. Le jeu Par_∞ est positionnel dans le cas où un nombre fini d'états sont étiquetés par chaque priorité,
3. Le jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$ est positionnel pour le joueur Min, et une stratégie gagnante pour le joueur Max peut se décomposer en un nombre fini de stratégies positionnelles (théorème 2.13),
4. dans le cas des graphes d'automates à pile, on peut résoudre en temps exponentiel les jeux $\text{Exp} \cup \text{Par}_d$ et $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$, à l'aide d'automates d'arbres infinis.

Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans les actes d'une conférence internationale [Gim04].

Chapitre 3. Positionnalité des jeux stochastiques.

Ce chapitre a pour cadre les jeux stochastiques à information complète et à nombre fini d'états et d'actions.

1. Nous avons montré que la transférabilité de la positionnalité des jeux à un joueur vers les jeux à somme nulle (théorème 1.8) s'étend au cas des jeux stochastiques (théorème 3.19).
2. Dans le cas des jeux à un joueur, c'est à dire des processus de décision markoviens, nous avons prouvé que toute fonction de paiement préfixe-indépendante et vérifiant une condition dite de séparation est positionnelle pour les processus de décision markoviens (théorème 3.17).
3. Comme dans le cas des jeux sur des graphes finis, ces résultats permettent d'unifier des preuves classiques de positionnalité, et d'exhiber de nouveaux exemples de jeux positionnels.

Les résultats à propos des processus de décision Markoviens ont été acceptés pour présentation à une conférence internationale [Gim07]. Les autres résultats ne sont pas encore publiés. Le théorème 3.19 a été obtenu avec Wiesław Zielonka. J'ai récemment achevé la preuve du théorème 3.17 lors de mon séjour à l'université de Varsovie.

Plan

Dans le chapitre 1, nous considérons les jeux sur des graphes finis. La section 1.3 présente les exemples classiques de fonctions de paiement. Dans la section 1.4, nous montrons qu'une fonction de paiement est positionnelle pour les jeux à deux joueurs si et seulement si elle est positionnelle pour les jeux à un joueur. Dans la section 1.5.1, nous présentons une caractérisation exacte des fonctions de paiement positionnelles pour les jeux à un joueur. Cette caractérisation est difficile à tester sur des exemples, contrairement aux conditions suffisantes présentées dans la section 1.5.2. Dans la section 1.6, nous utilisons ces conditions afin de reprouver rapidement la positionnalité des jeux classiques, et exhibons de nouveaux exemples de jeux positionnels. Dans la section 1.7, nous montrons comment construire de nouveaux exemples de jeux positionnels, en utilisant plusieurs opérateurs entre fonctions de paiement. Enfin dans la section 1.8,

nous utilisons les résultats précédents afin de montrer les liens existants entre les jeux multi-escomptés de Shapley et les jeux du paiement en moyenne prioritaire.

Dans le chapitre 2, nous considérons les jeux joués sur des graphes infinis de degré fini. Dans la section 2.2 nous présentons le jeu de parité avec un nombre infini de priorités, noté Par_∞ et le jeu d'exploration, noté Exp , ainsi que leurs combinaisons booléennes, notées $\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty$ et $\text{Exp} \cap \text{Par}_\infty$. Dans la section 2.3, nous prouvons que les deux joueurs possèdent des stratégies gagnantes positionnelles au jeu Exp , au jeu $\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty$ et dans certains cas au jeu Par_∞ . Concernant le jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$, nous prouvons également que le joueur Min a des stratégies gagnantes positionnelles, et que certaines stratégies gagnantes du joueur Max se décomposent en un nombre fini de stratégies positionnelles. Dans la section 2.4, nous nous intéressons au cas particulier où le système de transition est un graphe d'automates à pile. En s'appuyant sur l'étude des stratégies gagnantes effectuée dans la section 2.3, nous montrons que les ensembles d'états gagnants aux jeux Exp , $\text{Exp} \cup \text{Par}_d$ et $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$ sont des ensembles reconnaissables de mots finis, et on construit des automates alternants reconnaissant ces ensembles.

Le chapitre 3 a pour cadre les jeux stochastiques à information complète et à nombre fini d'états. Dans la section 3.2, nous introduisons le formalisme des jeux stochastiques à un joueur, également appelés processus de décision markoviens. Notre résultat principal établit toute fonction de paiement préfixe-indépendante et vérifiant une propriété simple appelée propriété de séparation, est positionnelle pour les jeux à un joueur. Ce résultat est énoncé dans le théorème 3.17, section 3.7. Les sections précédentes établissent les propriétés des jeux stochastiques nous permettant d'aboutir à ce théorème. Ces résultats sont ensuite transférés dans la section 3.8 au cadre plus général des jeux à deux joueurs (théorème 3.19) : on montre que si une fonction et son opposée sont positionnelles pour les jeux à un joueur, elles le sont pour les jeux à deux joueurs. Des applications de ces résultats sont présentées dans la section 3.9. D'une part, on reprouve simplement et de manière unifiée plusieurs preuves connues de positionnalité, et d'autre part on génère de nouveaux exemples de fonctions de paiement positionnelles pour les jeux stochastiques à deux joueurs ou les processus de décision markoviens.

Chapitre 1

Positionnalité des jeux sur les graphes finis

Résumé. Ce chapitre a pour cadre les jeux sur des graphes finis. Nous nous intéressons plus particulièrement aux jeux dans lesquels il existe des stratégies optimales indépendantes de l'histoire de la partie, c'est-à-dire *positionnelles*. Nos motivations sont d'ordre aussi bien théorique que pratique (section 1.1).

Un jeu est composé de l'arène dans laquelle les joueurs jouent d'une part et de la fonction de paiement qui calcule les gains des joueurs d'autre part (section 1.2). Il existe de nombreux exemples de jeux : classiques comme les jeux de parité, les jeux escomptés ou les jeux du paiement en moyenne, ou encore inédits comme le jeu du compromis ou du paiement en moyenne prioritaire (section 1.3).

Ces jeux ont un point commun : ils admettent des stratégies optimales positionnelles. Ceci est vrai indépendamment de l'arène considérée, et on dit donc que les fonctions de paiement de ces jeux sont elles-mêmes positionnelles.

Pour qu'une fonction de paiement soit positionnelle pour les jeux à deux joueurs à somme nulle, il suffit qu'elle le soit pour les jeux à un joueur (théorème 1.8, section 1.4). On peut caractériser exactement la classe des fonctions de paiement positionnelles pour les jeux à un joueur (théorème 1.18, section 1.5.1). Cette caractérisation est difficilement utilisable en pratique. Toutefois, il existe des conditions qui sont aisément testables, et suffisantes pour qu'une fonction de paiement soit positionnelle (théorème 1.21, section 1.5.2).

Ces résultats ont plusieurs conséquences. Premièrement, on peut prouver ou re-prouver facilement la positionnalité des différents jeux classiques ou inédits présentés dans la section 1.3 (section 1.6). Deuxièmement, il existe une opération binaire entre fonctions de paiements, appelée le produit prioritaire, grâce à laquelle on génère toute une classe inédite de fonctions de paiements positionnelles (section 1.7). Enfin, on peut mettre à jour des relations intéressantes entre les jeux multi-escomptés de Shapley et les jeux du paiement en moyenne prioritaire (section 1.8).

1.1 Introduction

1.1.1 Cadre et problématique

Ce chapitre a pour cadre les jeux sur des systèmes des graphes finis. Dans ce type de jeu, deux joueurs appelés Max et Min interagissent au cours d'une suite infinie de tours de jeux. A chaque tour le jeu est dans un certain état. Chaque état est contrôlé par un des joueurs, et le joueur contrôlant l'état courant choisit une transition qui détermine le nouvel état du jeu. Le déroulement d'une partie est décrit par la suite des transitions qui ont été choisies. On dispose d'une fonction de paiement qui détermine, en fonction de cette suite, une somme que le joueur Min doit verser au joueur Max. On suppose que le joueur Min cherche à minimiser cette somme, alors que le joueur Max cherche à la maximiser, et les intérêts des deux joueurs sont donc totalement opposés.

Pour maximiser leurs gains, les joueurs ont intérêt à utiliser des stratégies optimales. Selon la façon dont les gains sont calculés, c'est-à-dire selon la fonction de paiement utilisée, les stratégies optimales de Max et Min peuvent être d'un type plus ou moins complexe.

Nous nous intéressons à un type particulièrement simple de stratégies optimales : les stratégies optimales positionnelles. Une stratégie est dite positionnelle si les coups qu'elle conseille de jouer ne dépendent que de l'état courant du jeu, et pas de l'histoire de la partie.

De façon étonnante, les jeux les plus étudiés, tels que les jeux de parité, escomptés, de la limite supérieure ou du paiement en moyenne partagent une propriété non-triviale : ils admettent tous des stratégies optimales positionnelles.

Une question naturelle est la suivante : quels sont les points communs entre ces différents jeux qui permettent d'expliquer pourquoi ils admettent tous des stratégies optimales positionnelles ? Dans ce chapitre, nous répondons à cette question et en tirons plusieurs applications.

Avant de donner le plan détaillé de ce chapitre à la fin de cette section, donnons plus de détails sur nos motivations.

1.1.2 Motivations

Nos motivations pour étudier la classe des jeux positionnels peuvent être résumées comme suit. Tout d'abord notre intérêt pour la classe des jeux positionnels a été éveillé par le fait que les jeux les plus populaires sont tous positionnels. De plus, les jeux positionnels ont de bonnes propriétés algorithmiques : on peut calculer facilement leurs valeurs. Par conséquent, en théorie du contrôle, découvrir de nouveaux jeux positionnels permet d'agrandir la famille des spécifications quantitatives pour lesquelles on peut synthétiser un contrôleur optimal.

Nos motivations pour étudier les jeux positionnels sont donc à la fois théoriques, algorithmiques et ampliatives. Nous détaillons maintenant successivement ces trois aspects.

Les jeux les plus populaires sont positionnels. Parmi les jeux les plus étudiés en modélisation économique, on trouve les jeux escomptés de Shapley [Sha53], les jeux du paiement en moyenne de Gillette [Gil57], les jeux du paiement total de Thuijsman et Vrieze [TV87] et les jeux de la limite supérieure de Maitra et Sudderth [MS96]. Parallèlement, les jeux d'accessibilité de Zermelo [Zer13] et les jeux de parité ont attiré beaucoup d'attention dans la communauté de l'informatique théorique [GH82, EJ91a, Kla92, Zie98, GTW02, Tho02]. Or dans tout ces jeux on est assuré de l'existence de stratégies optimales positionnelles. En d'autre terme les *fonctions de paiement* associées à ces jeux sont *positionnelles*. Il est naturel de se demander ce que ces différentes fonctions de paiement ont en commun.

Des questions proches ont reçu beaucoup d'attention récemment : d'une part Vorobyov et al. ont étudié les points communs entre le jeu de parité et le jeu du paiement en moyenne [BSV04] et d'autre part le cas des jeux avec un nombre infini d'états a donné lieu à de nombreux travaux [Grä04, CN05, Kop06], sur lesquels nous reviendront dans le chapitre suivant.

Les jeux positionnels sont calculables. Une seconde raison vient renforcer notre intérêt théorique pour les jeux positionnels : cette classe de jeu a en effet de bonnes propriétés algorithmiques.

Le problème algorithmique central en théorie des jeux est le calcul de la valeur d'un jeu, c'est-à-dire de la somme maximale que Max peut être assuré de gagner, quelque soit la stratégie que Min emploie. Il n'y a pas d'algorithme général pour ce calcul, car les stratégies sont des objets infinis, qui n'admettent en général pas de description finie. Toutefois, quand on sait qu'un jeu admet des stratégies optimales positionnelles, et sous la simple hypothèse que les valeurs des parties ultimement périodiques sont calculables¹, alors la valeur du jeu elle-même est calculable.

Pour cela, un algorithme naïf consiste à énumérer l'ensemble fini des couples de stratégies positionnelles, et à calculer pour chacun de ces couples la valeur de la partie ultimement périodique correspondante. Il suffit ensuite de sélectionner parmi ces couples un couple $(\sigma^\#, \tau^\#)$ de stratégies optimales, c'est-à-dire tels que la partie conforme à $\sigma^\#$ et $\tau^\#$ est de valeur maximale parmi les parties conformes à $\tau^\#$ et minimale parmi les parties conformes à $\sigma^\#$. Dans tous les exemples que nous connaissons, la valeur d'une partie ultimement périodique se calcul en temps linéaire. Comme le nombre de stratégies positionnelles est exponentiel en la taille du jeu, la complexité de cet algorithme naïf est exponentielle.

Dans la plupart des cas, on ne connaît pas d'algorithmes dont la complexité théorique soit meilleure que celle de cet algorithme naïf. Deux exceptions notables sont les jeux d'accessibilité et les jeux de parité à nombre de priorités fixées. Les jeux de parité ont été très étudiés algorithmiquement et de nombreux algorithmes ont été proposés mais aucun n'a été prouvé être de complexité meilleure que sous-exponentielle [JPZ06], si l'on ne fixe pas le nombre de priorités. Pour les jeux du paiement en moyenne, le

¹C'est-à-dire que pour toutes parties finies p et q , avec q un cycle, on peut calculer la valeur de la partie pq^ω .

meilleur algorithme connu est pseudo-polynomial [EM79].

Les complexités s'améliorent si l'on se restreint à considérer les jeux à un joueur. En effet, pour tous les exemples de fonctions de paiement que nous connaissons, les valeurs des jeux à un joueur correspondant sont calculables en temps polynomial. Par exemple, les valeurs des jeux du paiement en moyenne et escomptés, sont calculables par un programme linéaire [FV97]. Dans le cas des jeux de parité ou de la limite supérieure, ce problème se réduit à une décomposition topologique du graphe de jeu [Jur98].

Les preuves de corrections de ces différents algorithmes sont basées sur l'existence de stratégies optimales positionnelles.

Pour conclure sur ces considérations algorithmiques, remarquons qu'il n'y a pas que dans le cadre des jeux à nombre d'états finis que la positionnalité entraîne la calculabilité. En effet, on montrera dans le chapitre 2 comment résoudre des jeux joués sur des graphes d'automates à pile. L'ingrédient essentiel des techniques utilisées consiste à prouver l'existence de stratégies optimales positionnelles.

Synthèse de contrôleur. La découverte de nouveaux types de jeux positionnels a des applications potentielles intéressantes en théorie du contrôle.

La théorie du contrôle a attiré beaucoup d'attention dans la communauté de l'informatique théorique, depuis l'article séminal de Ramadge et Wonham [RW89]. Un problème standard en théorie du contrôle est le suivant. On se donne d'une part un système à événements discrets, qui interagit avec son environnement, et dont on peut contrôler certaines actions. D'autre part on a une spécification qui décrit l'ensemble des exécutions correctes de ce système. En général cette spécification est exprimée dans une logique temporelle comme CTL* ou LTL. On veut savoir si il existe un contrôleur qui assure que l'exécution du système soit correcte, quelque soit le comportement de l'environnement. Essentiellement, ce problème se réduit à calculer la valeur d'un jeu de parité.

Ainsi le cadre classique de la théorie du contrôle est celui des jeux à deux valeurs, c'est-à-dire des jeux dont chaque partie est gagnée par l'un des joueurs et perdue par l'autre [Tho95]. Toutefois, dans certaines situations il est naturel de chercher à contrôler une ressource de manière à *optimiser* certains critères, ce qui dépasse le cadre de la vérification de propriétés logiques. On considère alors des jeux dont l'issue est quantitative : chacun des joueurs reçoit une certaine somme à l'issue d'une partie.

Prenons par exemple le cas d'une chaîne de fabrication de voitures. Le directeur de l'usine peut modifier le comportement en programmant les machines outils et en passant des commandes. Il y a des paramètres que le directeur ne contrôle pas, comme les comportements des fournisseurs, les pannes d'électricité.

Le directeur de l'usine peut chercher à optimiser différentes propriétés. Par exemple, il peut vouloir maximiser le nombre de voitures produites en moyenne chaque jour ou encore maximiser les bénéfices trimestriels de l'entreprise.

Cette situation peut être modélisée comme un jeu à deux joueurs : l'un des joueurs est le directeur, l'autre joueur est l'environnement et la fonction de paiement calcule la cadence de production ou les bénéfices trimestriels. Synthétiser un contrôleur optimal équivaut à calculer une stratégie optimale dans ce jeu à deux joueurs.

Chaque nouvelle fonction de paiement pour lesquelles des stratégies optimales sont calculables permet donc d'agrandir la famille des spécifications pour lesquelles on peut synthétiser un contrôleur optimal. C'est une motivation supplémentaire pour chercher de nouveaux exemples de fonctions de paiement, qui ont comme on l'a vu de bonnes propriétés algorithmiques.

1.1.3 Plan du chapitre

Dans la section 1.2, on introduit formellement les notions essentielles de système de transition, d'arène, de fonction de paiement, de jeu et de stratégie optimale. On donne ensuite dans la section 1.3 quelques exemples classiques de jeux, ainsi que des exemples inédits, tels que le jeu du compromis ou le jeu du paiement en moyenne prioritaire.

Dans la section 1.4, on montre qu'une fonction de paiement positionnelle pour les jeux à un joueur l'est également pour les jeux à deux joueurs (théorème 1.8).

Ainsi pour caractériser la classe des fonctions de paiement positionnelles, il suffit de s'intéresser aux jeux à un joueur. C'est ce que nous faisons dans la section 1.5.1, où l'on caractérise exactement la classe des fonctions de paiement positionnelles pour les jeux à un joueur (théorème 1.18).

Quand on considère un exemple concret de fonction de paiement et qu'on veut déterminer si elle est positionnelle ou non, cette caractérisation est difficile à utiliser. A la place, on dispose d'un ensemble de conditions suffisantes et faciles à vérifier (théorème 1.21, section 1.5.2).

Dans les sections suivantes on applique les résultats des sections 1.4 et 1.5. Dans la section 1.6, on prouve ou reprouve la positionnalité des fonctions de paiement classiques et inédites introduites dans la section 1.3. Dans la section 1.7, on montre comment générer à volonté de nouveaux exemples de fonctions de paiements positionnelles. Enfin l'application la plus intéressante de ces résultats est donnée dans la section 1.8, où l'on montre comment étendre un des résultats classiques de la théorie des jeux (théorèmes 1.43 et 1.52).

1.2 Jeux sur les graphes finis

Nous introduisons dans cette section les notions de système de transitions et de jeu sur un système de transitions.

1.2.1 Systèmes de transitions

Les jeux que nous considérons dans ce chapitre et le suivant sont couramment appelés des jeux sur des graphes. Toutefois, nous avons cherché à unifier le plus possible les formalismes des jeux sur des graphes et des jeux stochastiques. On parlera donc d'états, de transitions et de système de transitions plutôt que de parler de sommet, d'arêtes et de graphes.

Soit C un ensemble quelconque, qu'on appelle ensemble des *couleurs*.

Un système de transitions coloré par C est un couple

$$\mathcal{A} = (S, T)$$

où S est l'ensemble des états et

$$T \subseteq S \times C \times S$$

est l'ensemble des transitions.

Dans ce chapitre nous ne considérons que les systèmes de transitions finis, c'est-à-dire dont les ensembles des couleurs, des états et des transitions sont finis.

Pour simplifier, jusqu'à la fin de ce chapitre, "système de transition" signifie toujours "système de transition fini".

Pour toute transition $e = (s, c, t) \in T$, l'état s , noté $\text{source}(e)$, est appelé la *source* de e , la couleur c , notée $\text{col}(e)$, est appelée la *couleur* de e et l'état t , noté $\text{but}(e)$, est appelé le *but* de e .

Un *chemin* dans \mathcal{A} est une suite finie ou infinie

$$p = e_0 e_1 e_2 \cdots \in T^\infty$$

de transitions telle que pour tout i , $\text{but}(e_i) = \text{source}(e_{i+1})$.

L'état source de la première transition de p est appelé la source de p et notée $\text{source}(p)$. Si p est fini, le but de la dernière transition de p est appelé le but de p et est noté $\text{but}(p)$. Enfin, la suite $\text{col}(e_0)\text{col}(e_1)\cdots$ de couleurs rencontrées en parcourant p est appelé la couleur de p et noté $\text{col}(p)$.

Pour chaque état $s \in \mathcal{A}$, il existe un chemin vide dont la source et le but sont s , ce chemin sera noté $\mathbf{1}_s$. La couleur du chemin vide $\mathbf{1}_s$ est $\text{col}(\mathbf{1}_s) = \epsilon$, le mot vide sur C .

1.2.2 Déroulement d'une partie

Nous nous intéressons ici à des jeux joués par deux joueurs, appelés Max et Min, sur un système de transitions.

Les joueurs jouent tour à tour, un à la fois. A chaque tour, le jeu est dans un certain état $s \in S$ d'un système de transitions $\mathcal{A} = (S, T)$. Chaque état est contrôlé par un des deux joueurs, et le joueur contrôlant s choisit une des transitions e dont s est la source. Après ce choix, l'état $\text{but}(e)$ devient le nouvel état courant et un nouveau tour de jeu commence. On suppose qu'il n'y a pas de cul-de-sac dans \mathcal{A} , c'est à dire que chaque état est la source d'au moins une transition. Ainsi le joueur contrôlant l'état courant n'est jamais "bloqué" puisque qu'il a toujours au moins une transition disponible.

On se place dans le cadre des jeux à durée infinie, c'est-à-dire dont le déroulement est constitué d'une suite infinie de tours de jeu. En jouant, les joueurs tracent ainsi un chemin infini p dans \mathcal{A} , qu'on appelle une *partie*.

La donnée d'un système de transitions coloré par C et de la partition des états entre les états du joueur Min et ceux du joueur Max est appelée une *arène*. Formellement :

Définition 1.1. Une arène est un quadruplet $(S, S_{\text{Max}}, S_{\text{Min}}, T)$, où $(S_{\text{Max}}, S_{\text{Min}})$ est une partition de S et (S, T) est un système de transitions dont chaque état est la source d'au moins une transition. **Dans tout ce chapitre le terme “arène” signifie toujours “arène finie”.**

À la fin d'une partie infinie, chacun des joueurs reçoit un paiement.

Ce paiement est déterminé uniquement par la suite infinie des couleurs vues au long de la partie. En général pour chaque joueur \mathcal{J} on dispose d'une *fonction de paiement* qui associe à chaque suite infinie de couleurs un réel, éventuellement infini, et qui détermine la somme reçue par \mathcal{J} à la fin de la partie. Une fonction de paiement est donc une fonction

$$\phi : C^\omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} , \quad (1.1)$$

où $\overline{\mathbb{R}}$ désigne $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Après une partie p , le joueur \mathcal{J} dont la fonction de paiement est ϕ reçoit la somme

$$\phi(\text{col}(p)) .$$

Dans la suite, pour simplifier la notation, nous allons écrire

$$\phi(p)$$

à la place de

$$\phi(\text{col}(p))$$

pour désigner le paiement associé à la partie p .

La donnée d'une arène et d'une fonction de paiement pour chaque joueur est un *jeu*. L'objectif d'un joueur dans un jeu est de maximiser le paiement qu'il reçoit à la fin de la partie. Dans cette thèse nous nous intéressons uniquement aux *jeux à somme nulle*, c'est-à-dire aux jeux où les objectifs des deux joueurs sont strictement opposés.

Soit ϕ la fonction de paiement du joueur Max. Dans un jeu à somme nulle, après une partie p , le joueur Min paie au joueur Max la somme $\phi(p)$. Si $\phi(p)$ est négatif alors intuitivement c'est le joueur Max qui paie à Min la somme $|\phi(p)|$. Autrement dit, dans un jeu à somme nulle, la fonction de paiement du joueur Min est $-\phi$. Le gain $\phi(p)$ du joueur Max est une perte pour le joueur Min et, tandis que le joueur Max veut maximiser son gain, le joueur Min veut minimiser sa perte.

Formellement, un jeu à somme nulle ou simplement un jeu, puisque on ne considère pas d'autres jeux ici, est un couple (\mathcal{A}, ϕ) , où \mathcal{A} est une arène colorée par un ensemble de couleurs C et ϕ une fonction de paiement sur C^ω utilisée pour déterminer le paiement reçu par Max de la part de Min.

En jouant chaque joueur suit un certain plan, formalisé par la notion de stratégie. Lorsque l'état courant du jeu est contrôlé par un joueur \mathcal{J} , sa stratégie lui indique la transition à choisir en fonction de l'histoire de la partie jusqu'à ce moment, c'est-à-dire en fonction du chemin fini déjà parcouru dans le système de transitions.

Soit \mathcal{J} un joueur et $\mathbf{P}_{\mathcal{J}}^*$ l'ensemble des chemins finis (parties finies) dans une arène \mathcal{A} qui se terminent dans un état contrôlé par \mathcal{J} , c'est-à-dire l'ensemble des suites finies

$p = e_0 \cdots e_k$ de transitions telles que $\text{but}(e_i) = \text{source}(e_{i+1})$, $0 \leq i < k$, et $\text{but}(e_k) \in S_{\mathcal{J}}$. Une *stratégie* pour le joueur \mathcal{J} dans un jeu sur une arène \mathcal{A} est une fonction

$$\sigma_{\mathcal{J}} : \mathbf{P}_{\mathcal{J}}^* \rightarrow T$$

telle que pour toute partie finie $p \in \mathbf{P}_{\mathcal{J}}^*$,

$$\text{source}(\sigma_{\mathcal{J}}(p)) = \text{but}(p) .$$

L'ensemble des stratégies du joueur \mathcal{J} dans l'arène \mathcal{A} est noté $\Sigma_{\mathcal{J}}^{\mathcal{A}}$.

Quand un joueur \mathcal{J} joue une partie en respectant les transitions conseillées par sa stratégie $\sigma_{\mathcal{J}}$, on dit que la partie est conforme à $\sigma_{\mathcal{J}}$. Formellement, une partie finie ou infinie $p = e_0 e_1 e_2 \cdots$ est dite *conforme* à une stratégie $\sigma_{\mathcal{J}}$ du joueur \mathcal{J} si pour tout i tel que $\text{but}(e_i) \in S_{\mathcal{J}}$, $e_{i+1} = \sigma_{\mathcal{J}}(e_0 \cdots e_i)$. De plus si $s = \text{source}(e_0) \in S_{\mathcal{J}}$ alors $e_0 = \sigma_{\mathcal{J}}(\mathbf{1}_s)$.

Étant donné un état initial $s \in S$ et deux stratégies σ et τ pour les joueurs Max et Min dans l'arène \mathcal{A} , il existe une seule partie infinie dans \mathcal{A} de source s et conforme à σ et τ , qu'on note $p_{\mathcal{A}}(s, \sigma, \tau)$.

Dans cette thèse, on s'intéresse tout particulièrement à un type de stratégie : les stratégies positionnelles. Quand un joueur emploie une stratégie de ce type, la transition choisie ne dépend que de l'état courant.

Le joueur qui utilise une stratégie quelconque doit garder en mémoire l'histoire entière de la partie ainsi que la description de sa stratégie. Cette description est a priori infinie car le domaine d'une stratégie est $\mathbf{P}_{\mathcal{J}}^*$, qui est infini. Au contraire, un joueur qui utilise une stratégie positionnelle ne doit mémoriser que l'état courant, ainsi que la liste des transitions autorisées par sa stratégie. Quand le joueur contrôle l'état courant, il choisit l'unique transition de cette liste dont la source est l'état courant.

Une telle stratégie $\sigma_{\mathcal{J}}$ est totalement décrite par une fonction $\sigma_{\mathcal{J}} : S_{\mathcal{J}} \rightarrow T$ telle que $\text{source}(\sigma_{\mathcal{J}}(s)) = s$ pour chaque $s \in S_{\mathcal{J}}$ ou encore plus simplement par l'image $\sigma_{\mathcal{J}}(S_{\mathcal{J}})$. C'est cette description qu'on retient pour la définition formelle d'une stratégie positionnelle :

Définition 1.2. Une *stratégie positionnelle* pour le joueur \mathcal{J} dans l'arène \mathcal{A} est un ensemble $\sigma_{\mathcal{J}} \subseteq T$ de transitions tel que :

- pour tout état $s \in S_{\mathcal{J}}$, il existe une unique transition de source s dans $\sigma_{\mathcal{J}}$,
- pour tout état $s \notin S_{\mathcal{J}}$, il n'existe aucune transition de source s dans $\sigma_{\mathcal{J}}$.

1.2.3 Valeur d'un jeu et stratégies optimales

Comment un joueur doit-il jouer pour maximiser ses gains ou minimiser ses pertes ? Existe-t'il toujours une stratégie optimale ? Ce sont les questions que nous allons étudier dans cette section.

Commençons par la définition de deux valeurs que nous pouvons associer à chaque état d'un jeu. Soit $G = (\mathcal{A}, \phi)$ un jeu sur une arène \mathcal{A} . La *valeur inf* d'un état s d'un jeu G est :

$$\underline{\text{val}}(G)(s) = \inf_{\tau \in \Sigma_{\text{Min}}^{\mathcal{A}}} \sup_{\sigma \in \Sigma_{\text{Max}}^{\mathcal{A}}} \phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma, \tau)) .$$

Symétriquement, la valeur sup est donnée par

$$\overline{\text{val}}(G)(s) = \sup_{\sigma \in \Sigma_{\text{Max}}^{\mathcal{A}}} \inf_{\tau \in \Sigma_{\text{Min}}^{\mathcal{A}}} \phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma, \tau)) .$$

De la définition nous pouvons directement déduire que pour chaque $\epsilon > 0$, pour toute partie qui commence dans un état s , le joueur Max possède une stratégie qui lui permet de gagner au moins $\underline{\text{val}}(G)(s) - \epsilon$ contre n'importe quelle stratégie du joueur Min .

Inversement, le joueur Min possède une stratégie qui lui garantit que ses pertes ne dépasseront pas $\overline{\text{val}}(G)(s) + \epsilon$ contre toute stratégie possible du joueur Max .

Notons que pour tout état s , l'inégalité

$$\underline{\text{val}}(G)(s) \leq \overline{\text{val}}(G)(s)$$

est toujours valide.

Si ces deux valeurs coïncident, on appelle la valeur commune $\text{val}(G)(s) = \underline{\text{val}}(G)(s) = \overline{\text{val}}(G)(s)$ la valeur de l'état s dans le jeu G .

La discussion précédente montre que l'existence de la valeur d'un état s implique pour chaque $\epsilon > 0$ l'existence de stratégies ϵ -optimales pour chaque joueur. Par définition ce sont des stratégies $\sigma_{\text{Max}}^{\#}$ et $\sigma_{\text{Min}}^{\#}$ telles que

$$\forall \sigma_{\text{Min}} \in \Sigma_{\text{Min}}^{\mathcal{A}}, \quad p_{\mathcal{A}}(s, \sigma_{\text{Max}}^{\#}, \sigma_{\text{Min}}) \geq \text{val}(G)(s) - \epsilon$$

et

$$\forall \sigma_{\text{Max}} \in \Sigma_{\text{Max}}^{\mathcal{A}}, \quad p_{\mathcal{A}}(s, \sigma_{\text{Max}}, \sigma_{\text{Min}}^{\#}) \leq \text{val}(G)(s) + \epsilon .$$

Le célèbre résultat de Martin [Mar75] qui montre que les jeux boréliens sont déterminés implique facilement comme corollaire :

Théorème 1.3. *Soit $\phi : C^{\omega} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction de paiement mesurable pour les tribus boréliennes sur C^{ω} et sur $\overline{\mathbb{R}}$, \mathcal{A} une arène colorée par C et s un état de \mathcal{A} . Alors tout état d'un jeu $G = (\mathcal{A}, \phi)$ a une valeur.*

Notons que ce théorème reste vrai pour les arènes infinies et il résout donc positivement la question d'existence de valeur pour une classe très large de jeux. Toutefois dans cette thèse nous nous intéressons au problème de l'existence de stratégies optimales positionnelles et le théorème 1.3 qui garantit uniquement l'existence de stratégies ϵ -optimales ne nous sera d'aucune utilité. De plus la démonstration de ce théorème est non-constructive et ne donne aucune information sur ces stratégies.

Contrairement aux stratégies ϵ -optimales, les stratégies optimales, qui jouent un rôle central dans cette thèse, peuvent être définies sans aucun recours à la notion de valeur de jeu.

Définition 1.4. Soit (\mathcal{A}, ϕ) un jeu et $\sigma^{\#}$ et $\tau^{\#}$ des stratégies pour les joueurs Max et Min . Elles forment un couple de stratégies *optimales* si pour tout état initial $s \in S$ et pour toutes stratégies $\sigma \in \Sigma_{\text{Max}}^{\mathcal{A}}$ et $\tau \in \Sigma_{\text{Min}}^{\mathcal{A}}$,

$$\phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma, \tau^{\#})) \leq \phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma^{\#}, \tau^{\#})) \leq \phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma^{\#}, \tau)) .$$

En d'autres termes, lorsque Max et Min utilisent leurs stratégies $\sigma^\#$ et $\tau^\#$, aucun des deux n'a intérêt à en changer unilatéralement.

Il est évident que si $\sigma^\#$ et $\tau^\#$ sont des stratégies optimales dans un jeu G alors pour chaque état s la valeur de s dans G existe et

$$\text{val}(G)(s) = \phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma^\#, \tau^\#)),$$

c'est-à-dire que si les joueurs jouent optimalement, la valeur de la partie obtenue est la valeur de l'état initial s .

La proposition suivante, dont la démonstration est triviale, indique qu'on peut remplacer une stratégie optimale par une autre.

Proposition 1.5. *Soit $(\sigma_1^\#, \tau_1^\#)$ et $(\sigma_2^\#, \tau_2^\#)$ deux couples de stratégies optimales dans un jeu G . Alors $(\sigma_1^\#, \tau_2^\#)$ et $(\sigma_2^\#, \tau_1^\#)$ forment aussi des couples de stratégies optimales dans le jeu G .*

La notion clé de cette thèse est donnée par la définition suivante.

Définition 1.6. Un jeu $G = (\mathcal{A}, \phi)$ est dit *positionnel* s'il admet un couple de stratégies optimales positionnelles. Une fonction de paiement ϕ est *positionnelle* si pour toute arène finie \mathcal{A} le jeu (\mathcal{A}, ϕ) est positionnel.

1.3 Quelques exemples de fonctions de paiement

Dans cette section, nous présentons plusieurs exemples de jeux.

Nous commençons par les jeux de parité et leurs cousins : jeux d'accessibilité, jeux de Büchi et jeux de piège. Tous ces jeux sont des outils essentiels en vérification et théorie des automates. Nous continuons ensuite avec les jeux escomptés et du paiement en moyenne. Ces jeux ont été initialement introduits comme des outils de modélisation économique, mais peuvent être également utilisés en théorie du contrôle. Enfin on termine avec quelques jeux moins connus ou même inédits.

1.3.1 Jeux pour la vérification

L'intérêt de l'étude des jeux de parité a deux raisons principales. Tout d'abord, la plupart des logiques temporelles de spécification des systèmes réactifs, comme LTL ou CTL, sont exprimables en μ -calcul. Or le model-checking d'une formule du μ -calcul sur un système de transition est équivalent au calcul du gagnant dans un jeu de parité joué sur le "produit" synchronisé du système de transition et de la formule à satisfaire. D'autre part, les jeux de parité sont également au coeur des preuves de fermeture par complément des langages reconnaissables d'arbres infinis [GH82, EJ91a, Kla92, Zie98]. Le lecteur intéressé par davantage de détails sur ces sujets peut consulter la référence [GTW02].

Les propriétés d'accessibilité ou de réactivité ont été particulièrement étudiées en vérification, ce qui conduit à définir des versions plus simples du jeu de parité, à savoir les jeux d'accessibilité et de Büchi.

Pour les jeux de parité et consorts la fonction de paiement ne prend que deux valeurs : 0 ou 1. Cette valeur peut s'interpréter comme une information qui indique quel joueur a gagné : si la valeur est 1 alors c'est Max qui a gagné alors que la valeur 0 indique que c'est son adversaire, le joueur Min, qui a gagné. L'origine logique de ces jeux explique pourquoi ils ne peuvent prendre que deux valeurs : la valeur d'une partie indique si oui ou non l'exécution correspondante du système de transitions vérifie une certaine spécification logique.

1.3.1.1 Jeu d'accessibilité

Dans le jeu d'accessibilité les transitions de l'arène sont colorées avec deux couleurs : $C = \{0, 1\}$. Le but du joueur Max est que la partie franchisse au moins une fois une transition colorée par 1. La fonction de paiement $\phi_{\text{acc}} : \{0, 1\}^\omega \rightarrow \{0, 1\}$ est donc définie simplement par :

$$\text{pour } u = c_0c_1 \cdots \in C^\omega, \quad \phi_{\text{acc}}(u) = \sup_i c_i .$$

Le jeu dual est le jeu de non-accessibilité avec la fonction de paiement $\phi_{\text{nonacc}}(p) = 1 - \phi_{\text{acc}}$. Ici l'objectif du joueur Max est d'éviter tout passage par une transition colorée par 1.

1.3.1.2 Jeu de Büchi et jeu de piège

Comme pour les jeux d'accessibilité nous colorions les transitions avec deux couleurs, $C = \{0, 1\}$. Au jeu de Büchi, le but du joueur Max est de passer infiniment souvent par des transitions colorées 1, ce qui s'exprime par la fonction de paiement suivante :

$$\text{pour } u = c_0c_1 \cdots \in C^\omega, \quad \phi_{\text{Büchi}}(u) = \limsup_i c_i$$

Le jeu dual est le jeu de piège, équipé de la fonction de paiement $1 - \phi_{\text{Büchi}}$. Au jeu de piège, le joueur Max veut que la partie reste piégée ultimement dans l'ensemble des transitions colorées par 0.

1.3.1.3 Jeu de parité

Ici les transitions sont colorées par des entiers naturels appelés priorités :

$$C = \{0, \dots, d\} .$$

La fonction de paiement ϕ_{parite} est définie par :

$$\text{pour } u = c_0c_1 \cdots \in C^\omega, \quad \phi_{\text{parite}}(u) = (\limsup_n c_n) \bmod 2 .$$

Le joueur Max gagne si la priorité maximal visitée infiniment souvent dans la partie est une priorité impaire. Par symétrie, le jeu dual du jeu de parité est encore un jeu de parité.

1.3.1.4 Jeu de Müller

Au jeu de Müller, le but du joueur Max est que l'ensemble des couleurs visitées infiniment souvent soit dans une collection $\mathcal{F} = \{F_0, \dots, F_k\}$ où, pour chaque i , $F_i \subseteq C$ est un sous-ensemble des couleurs. Ce jeu n'est pas positionnel, sauf pour certaines familles \mathcal{F} , [McN93, Zie98].

1.3.2 Jeux en économie

Les jeux suivants ont été inspirés par la modélisation économique et ont été initialement considérés en théorie classique des jeux et également dans le cadre des processus markoviens stochastiques, c'est-à-dire des jeux à 0 joueurs. Ces jeux sont le jeu escompté, le jeu du paiement en moyenne, le jeu total et le jeu de la limite supérieure. Pour tous ces jeux, les transitions sont colorées par des nombres réels,

$$C \subseteq \mathbb{R} .$$

1.3.2.1 Jeu du paiement en moyenne

Dans le jeu du paiement en moyenne, nous interprétons les valeurs réelles ($C \subset \mathbb{R}$) qui étiquettent les transitions comme le capital du joueur Max. Étant donnée une partie infinie colorée par $u = c_0 c_1 \dots \in C^\omega$, la valeur $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n c_i$ s'interprète naturellement comme le capital moyen du joueur Max au cours de la partie. Malheureusement cette limite n'existe pas toujours, ce qui nous oblige à définir deux fonctions de paiement différentes : pour $u = c_0 c_1 \dots \in C^\omega$,

$$\phi_{\overline{\text{mean}}}(u) = \limsup_n \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n c_i ,$$

ou

$$\phi_{\underline{\text{mean}}}(u) = \liminf_n \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n c_i .$$

En général, ces deux fonctions de paiement donnent des valeurs différentes pour une suite infinie donnée, mais pour les suites ultimement périodiques uv^ω avec $u, v \in C^*$, $v \neq \epsilon$, on a $\phi_{\overline{\text{mean}}}(uv^\omega) = \phi_{\underline{\text{mean}}}(uv^\omega)$ et cette valeur est égale à la moyenne de la suite finie v de réels.

On verra avec la proposition 1.33, que ces deux fonctions $\phi_{\overline{\text{mean}}}$ et $\phi_{\underline{\text{mean}}}$ sont positionnelles, qu'elles possèdent donc les mêmes stratégies positionnelles optimales, et que les jeux correspondants ont même valeur.

1.3.2.2 Jeu escompté

Le jeu escompté a été introduit dans un article séminal de Shapley [Sha53]. On fixe un réel $0 \leq \lambda < 1$, appelé le taux d'escompte. Les transitions sont colorées par un ensemble fini de nombres réels $C \subset \mathbb{R}$, appelés les paiements quotidiens. A une suite $u = c_0 c_1 \dots \in C^\omega$ de paiements quotidiens, on associe le paiement

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n c_n . \quad (1.2)$$

La somme 1.2 peut être considérée comme une accumulation de paiements quotidiens qui sont soumis à un taux d'escompte λ .

La positionnalité des jeux escomptés a été montrée par Shapley [Sha53] dans le cadre plus général des jeux concurrents stochastiques. Nous la redémontrons dans la proposition 1.32, en utilisant nos propres techniques, dans le cadre des jeux sur des graphes.

Un des sujets les plus étudiés de la théorie des jeux est le comportement des valeurs du jeu escompté quand le taux d'escompte λ tend vers 1. Pour étudier ce comportement, il convient de normaliser la valeur (1.2) afin d'éviter que cette série diverge quand λ tend vers 1. Pour cette raison, de nombreux auteurs utilisent la définition suivante pour la fonction de paiement du jeu escompté :

$$\text{pour } c_0 c_1 \cdots \in C^\omega, \phi_{\text{esc}}^{(\lambda)}(u) = (1 - \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n c_n . \quad (1.3)$$

Le détail des liens entre les valeurs du jeu escompté et celle du jeu du paiement en moyenne est donné dans la section 1.8.

Le point de vue de Shapley [Sha53] à propos de la quantité (1.2) est différent du nôtre. Pour lui, il n'y a pas de phénomène d'escompte et le gain du joueur Max est la somme des paiements quotidiens vus au cours de la partie. Par contre, à chaque franchissement d'une transition, le jeu s'arrête avec la probabilité $1 - \lambda$. Cela implique qu'avec probabilité 1 la partie s'arrête après un nombre fini de tours de jeu, et la somme (1.2) donne l'espérance de gain du joueur Max.

La quantité (1.3) peut également s'interpréter comme une espérance de gain dans un jeu avec probabilité d'arrêt. Pour cela il faut considérer les nombres réels étiquetant les transitions de l'arène non comme des paiements quotidiens mais comme le capital du joueur. A chaque franchissement d'une transition, le jeu s'arrête avec probabilité $1 - \lambda$ et dans ce cas le joueur touche le capital étiquetant la transition. La quantité (1.3) apparaît comme l'espérance de gain du joueur Max, avec cette interprétation.

La définition (1.3) a été utilisée dans la plupart des travaux postérieurs à [Sha53] sur les jeux escomptés. Or, quand Shapley a introduit ces jeux dans son article [Sha53], il a utilisé une définition un peu plus générale, en faisant varier le taux d'escompte λ en fonction de la transition traversée. Cette fonction est présentée un peu plus loin, dans la sous-section 1.3.3.2.

1.3.2.3 Jeu total

Ici aussi, l'ensemble de couleurs est un ensemble fini de nombres réels : $C \subseteq \mathbb{R}$. A la fin de la partie, le joueur Max gagne la somme des valeurs vues au cours de la partie. Comme cette somme infinie n'est pas nécessairement définie, on utilise plutôt une des deux fonctions suivantes :

$$\overline{\phi_{\text{total}}}(c_0 c_1 \cdots) = \limsup_n \sum_{i=0}^n c_i ,$$

et

$$\underline{\phi_{\text{total}}}(c_0 c_1 \cdots) = \liminf_n \sum_{i=0}^n c_i .$$

Les paiements $\overline{\phi_{\text{total}}}$ et $\underline{\phi_{\text{total}}}$ définissent deux jeux différents : si l'on considère la suite infinie $u = +1, -1, +1, -1, \dots$ alors $\overline{\phi_{\text{total}}}(u) = 1$ alors que $\underline{\phi_{\text{total}}}(u) = 0$.

Initialement, le jeu total a été introduit dans [TV87] afin d'étudier les jeux stochastiques du paiement en moyenne dont tous les états sont de valeur nulle.

Le jeu total avec le paiement $\overline{\phi_{\text{total}}}$ peut être utilisé pour raffiner le jeu d'accessibilité de la section 1.3.1.1. Considérons une arène \mathcal{A} dont les transitions sont colorées par $C = \{0, 1\}$, et le jeu d'accessibilité $G = (\mathcal{A}, \phi_{\text{acc}})$.

En utilisant la fonction $\overline{\phi_{\text{total}}}$, on peut calculer le temps que met une partie avant de franchir une transition colorée par 1. Pour cela, on transforme \mathcal{A} de la manière suivante. On ajoute un état puits s_0 et une transition $(s_0, 0, s_0)$ de source et de cible s_0 . De plus, toutes les transitions de \mathcal{A} colorées par 1 sont recolorées par 0 et dirigées vers l'état puits s_0 . Enfin toutes les transitions de \mathcal{A} qui étaient colorées par 0 sont colorées par -1 .

Soit \mathcal{B} la nouvelle arène construite de cette façon et considérons le jeu $(\mathcal{B}, \overline{\phi_{\text{total}}})$. Alors un état s est gagnant pour le joueur Max dans le jeu d'accessibilité $(\mathcal{A}, \phi_{\text{acc}})$ si et seulement si la valeur de cet état dans le jeu $(\mathcal{B}, \overline{\phi_{\text{total}}})$ est finie. De plus, cette valeur exprime, après changement de signe, le temps maximal que met le joueur Max pour atteindre les transitions colorées 1 dans \mathcal{A} .

1.3.2.4 Jeux du supremum et de l'infimum

Ces jeux se jouent dans une arène où les transitions sont colorées par des paiements quotidiens réels : $C \subseteq \mathbb{R}$.

Aux jeux du supremum (de l'infimum) le joueur Max gagne la plus grande (la plus petite) valeur vue au cours de la partie. Les fonction de paiement sont donc définies pour $u = c_0 c_1 \cdots \in C^\omega$ par :

$$\phi_{\text{sup}}(u) = \sup_i c_i ,$$

et

$$\phi_{\text{inf}}(u) = \inf_i c_i .$$

Notons que dans le cas particulier où l'arène est colorée avec deux couleurs 0 et 1 le jeu du supremum correspond au jeu d'accessibilité de la section 1.3.1.1.

1.3.2.5 Jeux lim sup et lim inf

De nouveau, on considère des arènes dont les transitions sont colorées par un ensemble fini de nombres réels, $C \subset \mathbb{R}$. Nous allons considérer deux fonctions de paiement : pour $u = c_0c_1 \cdots \in C^\omega$,

$$\phi_{\text{lsup}}(u) = \limsup_i c_i,$$

et

$$\phi_{\text{linf}}(u) = \liminf_i c_i .$$

Si on interprète c_i comme la fortune du joueur Max le jour i alors la fonction ϕ_{lsup} évalue ses meilleures performances à long terme. Les baisses de performances, même très importantes et prolongées, ne sont pas du tout prises en compte. Si cette fonction reflète le degré de “satisfaction” du joueur Max alors ce joueur préfère la situation où il est pauvre presque tout le temps mais devient tous les 100 ans millionnaire pour un jour à la situation où il mène en permanence une vie aisée sans jamais devenir très riche.

Un joueur dont les intérêts sont donnés par la fonction lim sup ressemble donc aux flambeurs de casino qui recherchent l’émotion des gros gains plutôt que de s’assurer une rente régulière. Au contraire, un joueur qui utilise la fonction ϕ_{linf} est un joueur qui veut éviter les pertes à long terme, même occasionnelles.

Notons que la fonction ϕ_{lsup} généralise la fonction de paiement de jeux de Büchi.

La monographie [MS96] est consacrée à l’étude des jeux stochastiques concurrents munis de la fonction de paiement ϕ_{lsup} .

1.3.3 Jeux inédits

Nous présentons maintenant quelques fonctions de paiement inédites, que nous avons introduites dans [GZ04] et [GZ05].

1.3.3.1 Jeu du compromis

Le jeu suivant est un compromis entre le jeu de la limite supérieure qui incite à prendre des risques exagérés et le jeu de la limite inférieure où l’on évite de prendre un quelconque risque, même raisonnable.

Les transitions sont étiquetées par un ensemble fini de réels $C \subseteq \mathbb{R}$ représentant le capital du joueur Max. Intuitivement, dans ce jeu, le joueur Max essaye simultanément de maximiser ses plus grands et plus petits paiements quotidiens. On fixe deux réels non-négatifs α, β et le paiement est donné par :

$$\text{pour } u = c_0c_1 \cdots \in C^\omega, \phi_{\text{comp}}^{\alpha, \beta}(u) = \alpha \cdot \limsup_i c_i + \beta \cdot \liminf_i c_i .$$

Si $\alpha + \beta = 1$ alors le paiement du jeu de compromis est une combinaison convexe des paiements ϕ_{lsup} et ϕ_{linf} .

Dans le cas où $\alpha = \beta = 1$, le jeu de compromis généralise le jeu de parité. En effet, considérons une arène \mathcal{A} colorée par des priorités $\{0, \dots, d\}$ et la fonction de paiement

ϕ_{parite} . Considérons l'arène \mathcal{A}' obtenu en modifiant les étiquettes des transitions de \mathcal{A} de la façon suivante. Chaque priorité c est laissée inchangée si c est paire et remplacée par $-c$ sinon. Dans ce cas, il y a une correspondance naturelle entre les parties jouées dans \mathcal{A} et les parties jouées dans \mathcal{A}' , et une partie p dans \mathcal{A} est gagnée par Max au jeu $(\mathcal{A}, \phi_{\text{parite}})$ si et seulement si le gain de Max au jeu $(\mathcal{A}', \phi_{\text{comp}}^{1,1})$ est positif. Ce dernier jeu peut donc être considéré comme une version quantitative du jeu de parité. En fait le jeu $(\mathcal{A}', \phi_{\text{comp}}^{1,1})$ est équivalent à un jeu joué sur l'arène \mathcal{A} où le gain du joueur Max est mesuré de façon suivante : soit c_0 et c_1 les plus grandes priorités paires et impaires visitées infiniment souvent. Alors le gain du joueur Max est égale à $c_1 - c_0$, c'est-à-dire on mesure ici la distance entre les plus grandes priorités paires et impaires visitées infiniment souvent.

1.3.3.2 Jeu multi-escompté

Le jeu escompté défini par (1.2) modélise une accumulation de paiements quotidiens soumis à un taux d'escompte fixé λ . En introduisant le jeu escompté, Shapley a considéré le cas plus général des jeux multi-escomptés, où ce taux d'escompte n'est pas fixé mais dépend de l'état courant. Dans notre formalisme, ce jeu correspond à la fonction de paiement suivante. Chaque transition est colorée par un taux d'escompte λ , $0 \leq \lambda < 1$, et par un paiement quotidien $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit, l'ensemble fini des couleurs C vérifie

$$C \subset [0, 1[\times \mathbb{R} ,$$

et à une suite $u = (\lambda_0, x_0)(\lambda_1, x_1) \cdots$ on associe le paiement :

$$x_0 + \lambda_0 x_0 + \lambda_0 \lambda_1 x_1 + \cdots . \quad (1.4)$$

Dans la section 1.8, nous allons nous intéresser au comportement des valeurs du jeu multi-escomptés, quand les différents taux d'escompte tendent vers 1. Pour cela, il convient de normaliser (1.4) de la manière suivante. Pour tout $u = (\lambda_0, x_0)(\lambda_1, x_1) \cdots \in C^\omega$,

$$\phi_{\text{mesc}}(u) = (1 - \lambda_0)x_0 + \lambda_0(1 - \lambda_1)x_1 + \lambda_0\lambda_1(1 - \lambda_2)x_2 + \cdots \quad (1.5)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_0 \cdots \lambda_{i-1} (1 - \lambda_i) x_i . \quad (1.6)$$

La convergence de la série qui apparaît dans cette définition est assurée car C est fini.

Les deux valeurs (1.4) et (1.5) admettent la même interprétation en terme de jeu avec probabilité d'arrêt que les valeurs (1.2) et (1.3).

La différence est que la probabilité d'arrêt du jeu n'est pas fixe égale à $1 - \lambda$ mais dépend de la transition traversée : si une transition est étiquetée par (λ_n, x_n) , le jeu s'arrête avec probabilité λ_n . Avec probabilité 1, le jeu s'arrête après un nombre fini de tours. On a les interprétations suivantes des quantités (1.4) et (1.5). En supposant que le joueur Max touche la somme des paiements quotidiens x_0, x_1, \dots, x_n rencontrés au cours de la partie, la quantité (1.4) représente son espérance de gain. Si l'on interprète

le réel étiquetant la n -ième transition non comme un paiement quotidien mais comme le capital du joueur Max au n -ième tour de jeu, alors la quantité (1.5) représente le capital espéré du joueur Max quand la partie s'arrête.

1.3.3.3 Le jeu du paiement en moyenne prioritaire

On présente maintenant le jeu du paiement en moyenne prioritaire qui constitue une généralisation à la fois du jeu de parité et du jeu du paiement en moyenne. Même si à première vue sa définition peut paraître alambiquée il s'avère que le jeu du paiement en moyenne prioritaire est, d'une certaine façon, un limite du jeu multi-escomptés obtenu quand on fait tendre les différents taux d'escompte vers 1. Ce lien entre le jeu du paiement en moyenne prioritaire et le jeu multi-escomptés sera détaillé dans la section 1.8.

Le jeu du paiement en moyenne prioritaire se joue sur une arène colorée par des couples :

$$C \subseteq \{0, \dots, d\} \times \mathbb{R} .$$

Pour chaque couleur $c = (e, x) \in C$ nous appelons la première composante e la *priorité* de c et x le *paiement* quotidien associé à c .

Considérons une partie colorée par $u = (e_0, x_0)(e_1, x_1) \dots$. Le gain du joueur Max s'exprime en fonction de la *priorité* de u .

La *priorité* $\text{priorite}(u)$ d'une suite $u = (e_0, x_0)(e_1, x_1) \dots \in C^\omega$ de couleurs est la plus grande priorité apparaissant infiniment souvent dans u , c'est-à-dire

$$\text{priorite}(u) = \limsup_n e_n .$$

Pour toute priorité $e \in \{0, \dots, d\}$, on note $\pi_e : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\epsilon\}$ la fonction telle que pour $(f, x) \in C$,

$$\pi_e((f, x)) = \begin{cases} x & \text{si } e = f, \\ \epsilon & \text{si } e \neq f. \end{cases}$$

où ϵ est le mot vide. La fonction π_e s'étend naturellement en une projection $\pi_e : C^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ qui associe à des suite finies ou infinies de couleurs des suites finies ou infinies de nombres réels.

Définition 1.7. Pour toute suite de couleurs $u = (e_0, x_0)(e_1, x_1) \dots$ de priorité $e = \limsup_n e_n$, le gain du joueur Max au jeu du paiement en moyenne prioritaire est :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{meanp}}(u) &= \phi_{\text{mean}}(\pi_e(u)) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\{i \leq n \mid e_i = e\}|} \sum_{\substack{i \leq n \\ e_i = e}} x_i. \end{aligned}$$

Symétriquement, on définit le paiement ϕ_{meanp} en utilisant le paiement ϕ_{mean} et une limite inférieure. En général, on désigne l'une ou l'autre de ces fonctions de paiement par ϕ_{meanp} .

Le jeu du paiement en moyenne prioritaire est bien à la fois une généralisation du jeu de parité et du jeu du paiement en moyenne. En effet, dans une arène où n'apparaît qu'une seule priorité, le jeu du paiement en moyenne prioritaire se réduit au jeu du paiement en moyenne. D'autre part, supposons que pour toute priorité $e \in \{0, \dots, d\}$, il existe une seule couleur du type (e, x) apparaissant dans l'arène, et cette couleur est $(e, 1)$ si la priorité e est impair et $(e, 0)$ si e est paire. Dans ce cas, le jeu obtenu est exactement le jeu de parité : le joueur Max gagne 1 si la priorité de la partie est impaire et 0 sinon.

Dans la section 1.7, on introduira une opération binaire entre fonctions de paiement, appelée le produit prioritaire, et on verra que le jeu du paiement en moyenne prioritaire est obtenu en effectuant le produit prioritaire de plusieurs fonctions de paiement en moyenne.

Une autre tentative de fusion des jeux de parité et du jeu du paiement en moyenne a été présentée dans [CHJ05]. Ce jeu présente de mauvaises propriétés algorithmiques car il admet des stratégies optimales, mais ces stratégies ne sont pas positionnelles, et nécessite même une mémoire infinie.

1.4 Des jeux à un joueur vers les jeux à deux joueurs

Dans cette section, on donne un premier résultat d'existence de stratégies optimales positionnelles dans les jeux à deux joueurs. Fixons un ensemble fini de couleurs C et une fonction de paiement ϕ sur C^ω . Notre résultat énonce que l'existence de stratégies optimales positionnelles est assurée dans tout jeu à deux joueurs dès lors qu'elle est assurée dans les jeux à un joueur.

Rappelons que, d'après la définition 1.6, un jeu $G = (\mathcal{A}, \phi)$ dans lequel chacun des joueurs possède une stratégie optimale positionnelle est dit *positionnel*. Une fonction de paiement ϕ telle que pour toute arène finie \mathcal{A} , le jeu (\mathcal{A}, ϕ) est positionnel, est dite *positionnelle pour les jeux à deux joueurs*, ou plus simplement *positionnelle*.

On aura également besoin des notions de jeu à un joueur. Une *arène à un joueur* est une arène $\mathcal{A} = (S, S_{\text{Max}}, S_{\text{Min}}, T)$ dans laquelle le joueur Max joue tout seul, c'est-à-dire telle que $S_{\text{Min}} = \emptyset$. Un jeu $G = (\mathcal{A}, \phi)$ tel que \mathcal{A} est une arène à un joueur est appelé un *jeu à un joueur*. Notons qu'on supposera toujours que dans un jeu à un joueur c'est le joueur Max, celui qui maximise le paiement, qui joue. Il est inutile de considérer séparément les jeux à un joueur où seul le joueur Min joue car cela reviendrait à considérer les jeux à un joueur où la fonction ϕ remplacée par son opposée $-\phi$.

Enfin, la fonction de paiement ϕ est dite *positionnelle pour les jeux à un joueur*, si pour toute arène \mathcal{A} à un joueur colorée par C , le jeu (\mathcal{A}, ϕ) est positionnel.

On peut maintenant énoncer notre théorème.

Théorème 1.8. *Soit ϕ une fonction de paiement. Alors ϕ est positionnelle pour les jeux à deux joueurs si et seulement si ϕ et son opposée $-\phi$ sont positionnelles pour les jeux à un joueur.*

Bien que ce résultat ne soit pas très compliqué à démontrer, c'est un instrument de preuve puissant, qui présente un intérêt certain. D'une part il permet de simplifier

énormément les différentes preuves de positionnalité qu'on trouve dans la littérature, que ce soit pour les jeux de parité, du paiement en moyenne ou escompté. D'autre part, ce résultat se généralise au cas des jeux stochastiques ², cadre dans lequel il devient encore plus utile. Enfin, il constitue une des étapes aboutissant à la caractérisation complète des fonctions de paiement positionnelles données dans ce chapitre.

Démonstration du théorème 1.8. On doit prouver que les deux énoncés suivant sont équivalents :

- (A) Pour toute arène à deux joueurs $\mathcal{A} = (S, S_{\text{Max}}, S_{\text{Min}}, T)$, chaque joueur possède une stratégie optimale positionnelle pour le jeu (\mathcal{A}, ϕ) .
- (B) Pour toute arène à un joueur $\mathcal{A} = (S_{\text{Max}}, T)$, le joueur Max possède une stratégie optimale positionnelle dans les jeux (\mathcal{A}, ϕ) et $(\mathcal{A}, -\phi)$.

Soit C un ensemble de couleurs et ϕ une fonction de paiement sur C^ω . Supposons tout d'abord que la condition (A) soit vérifiée. Soit $\mathcal{A} = (S_{\text{Max}}, T)$ une arène à un joueur colorée par C . Comme une arène à un joueur est un cas particulier d'arène à deux joueurs, la condition (A) implique immédiatement que le joueur Max a une stratégie optimale positionnelle pour le jeu (\mathcal{A}, ϕ) . Pour montrer que c'est également le cas pour le jeu $(\mathcal{A}, -\phi)$, il suffit d'appliquer la remarque suivante :

Remarque. Soit $\mathcal{A} = (S, S_{\text{Max}}, S_{\text{Min}}, T)$ une arène colorée par C et $\bar{\mathcal{A}} = (S, S_{\text{Min}}, S_{\text{Max}}, T)$ l'arène duale, dans laquelle on a inversé les sommets des deux joueurs³. Alors une stratégie pour le joueur Max dans \mathcal{A} est une stratégie pour le joueur Min dans $\bar{\mathcal{A}}$ et elle est optimale pour Max dans (\mathcal{A}, ϕ) si et seulement si elle est optimale pour Min dans $(\bar{\mathcal{A}}, -\phi)$.

Réciproquement, supposons que la condition (B) soit vraie et soit $\mathcal{A} = (S, S_{\text{Max}}, S_{\text{Min}}, T)$ une arène à deux joueurs. On définit *le rang* de \mathcal{A} comme

$$n_{\mathcal{A}} = |T| - |S_{\text{Max}}| - |S_{\text{Min}}| = |T| - |S|$$

et on montre par induction sur le rang que chaque joueur possède une stratégie positionnelle optimale pour le jeu (\mathcal{A}, ϕ) .

Notons $n_{\mathcal{A}} \geq 0$ puisque chaque état est la source d'au moins une transition sortante. De plus, si $n_{\mathcal{A}} = 0$ alors tous les états sont la source d'une unique transition et chaque joueur possède une unique stratégie, qui est nécessairement positionnelle et optimale.

Le pas inductif est basé sur le lemme suivant :

Lemme 1.9. *Soit ϕ une fonction de paiement telle que ϕ et $-\phi$ sont positionnelles pour les jeux à un joueur. Soit $\mathcal{A} = (S, S_{\text{Max}}, S_{\text{Min}}, T)$ une arène à deux joueurs telle que $n_{\mathcal{A}} > 0$, et supposons que dans toute arène à deux joueurs \mathcal{B} telle que $n_{\mathcal{B}} < n_{\mathcal{A}}$, chaque joueur possède une stratégie optimale positionnelle pour le jeu (\mathcal{B}, ϕ) . Alors le joueur Max possède une stratégie optimale positionnelle pour le jeu (\mathcal{A}, ϕ) .*

²Théorème 3.19. Même si les preuves dans les cas déterministe et stochastique sont basées sur les mêmes idées il est difficile de trouver une présentation compréhensible et uniforme qui englobe les deux cas.

³C'est-à-dire les sommets qui étaient contrôlés par le joueur Max sont contrôlés par le joueur Min et vice versa.

Démonstration. On peut déjà éliminer un cas trivial, celui où chaque état de S_{Max} est la source d'une unique transition. Dans ce cas, Max possède une unique stratégie, qui est nécessairement optimale et positionnelle. On s'est ainsi ramené au cas où il existe un état $t \in S_{\text{Max}}$ tel que l'ensemble

$$T(t) = \{a \in T \mid \text{source}(a) = t\} \quad (1.7)$$

contient au moins deux transitions. Nous fixons par la suite un tel état t et nous l'appelons *l'état pivot*. Soit

$$(T_0(t), T_1(t))$$

une partition de $T(t)$, telle que ni $T_0(t)$ ni $T_1(t)$ ne soit vide.

Nous allons construire un couple de stratégies optimales $(\sigma^\#, \tau^\#)$ dans (\mathcal{A}, ϕ) , où $\sigma^\#$ est positionnelle et $\tau^\#$ utilise un bit de mémoire.

Avant d'expliciter les détails de cette construction, on en présente les grandes lignes. On commence par considérer les deux arènes obtenues en effaçant de \mathcal{A} respectivement toutes les transitions de $T_1(t)$ ou toutes les transitions de $T_0(t)$. Les deux arènes obtenues sont appelées respectivement \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 . On considère également l'arène obtenue en recollant deux copies de \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 sur l'état t . L'arène obtenue, notée \mathcal{A}_{01} , est en quelque sorte un dédoublement de l'arène \mathcal{A} , où seul l'état t est conservé intact, voir figure 1.1.

Par hypothèse d'induction, on sait qu'il existe des couples de stratégies optimales $(\sigma_0^\#, \tau_0^\#)$ et $(\sigma_1^\#, \tau_1^\#)$ pour les jeux (\mathcal{A}_0, ϕ) et (\mathcal{A}_1, ϕ) . La stratégie $\sigma^\#$ sera tout simplement une des deux stratégies $\sigma_0^\#$ ou $\sigma_1^\#$. Comment décider laquelle des deux stratégies $\sigma_0^\#$ ou $\sigma_1^\#$ est optimale dans le jeu initial (\mathcal{A}, ϕ) ? C'est l'arène auxiliaire \mathcal{A}_{01} qui nous permet de faire ce choix.

En ce qui concerne le joueur Min la situation est différente : il est facile de trouver des exemples montrant que ni la stratégie $\tau_0^\#$ ni la stratégie $\tau_1^\#$ ne sont pas optimales dans le jeu (\mathcal{A}, ϕ) . En fait il s'avère que le joueur Min peut jouer optimalement dans (\mathcal{A}, ϕ) en utilisant alternativement ses stratégies $\tau_0^\#$ et $\tau_1^\#$ en fonction des actions prises par le joueur Max lors du dernier passage par l'état pivot t . Pour mémoriser l'information nécessaire relative au comportement de son adversaire Max dans l'état pivot, et décider ainsi si il doit utiliser sa stratégie $\tau_0^\#$ ou $\tau_1^\#$, le joueur Min a besoin d'un bit d'information : il utilise une stratégie avec un bit de mémoire.

Construction des arènes \mathcal{A}_0 , \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_{01} . Les arènes \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 sont obtenues à partir d'une copie de \mathcal{A} dont on efface les transitions de $T_1(t)$ et $T_0(t)$ respectivement. Formellement, pour $i \in \{0, 1\}$, $\mathcal{A}_i = (\{i\} \times S, \{i\} \times S_{\text{Max}}, \{i\} \times S_{\text{Min}}, T_i)$, c'est-à-dire à tout état q de \mathcal{A} correspond un état (i, q) de \mathcal{A}_i . L'ensemble T_i des transitions de \mathcal{A}_i est construit comme suit. Pour toute transition (q, a, r) de \mathcal{A} telle que $q \neq t$, on ajoute une transition $((i, q), a, (i, r))$ dans T_i . De plus, pour toute transition $(t, a, r) \in T_i(t)$, on ajoute une transition $((i, t), a, (i, r))$ dans T_i .

L'arène \mathcal{A}_{01} est obtenue en considérant l'union des arènes \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 et en fusionnant les états $(0, t)$ et $(1, t)$. Nous noterons t_{01} l'état quotient $\{(0, t), (1, t)\}$ de \mathcal{A}_{01} . La figure 1.1 présente la construction décrite ci-dessus.

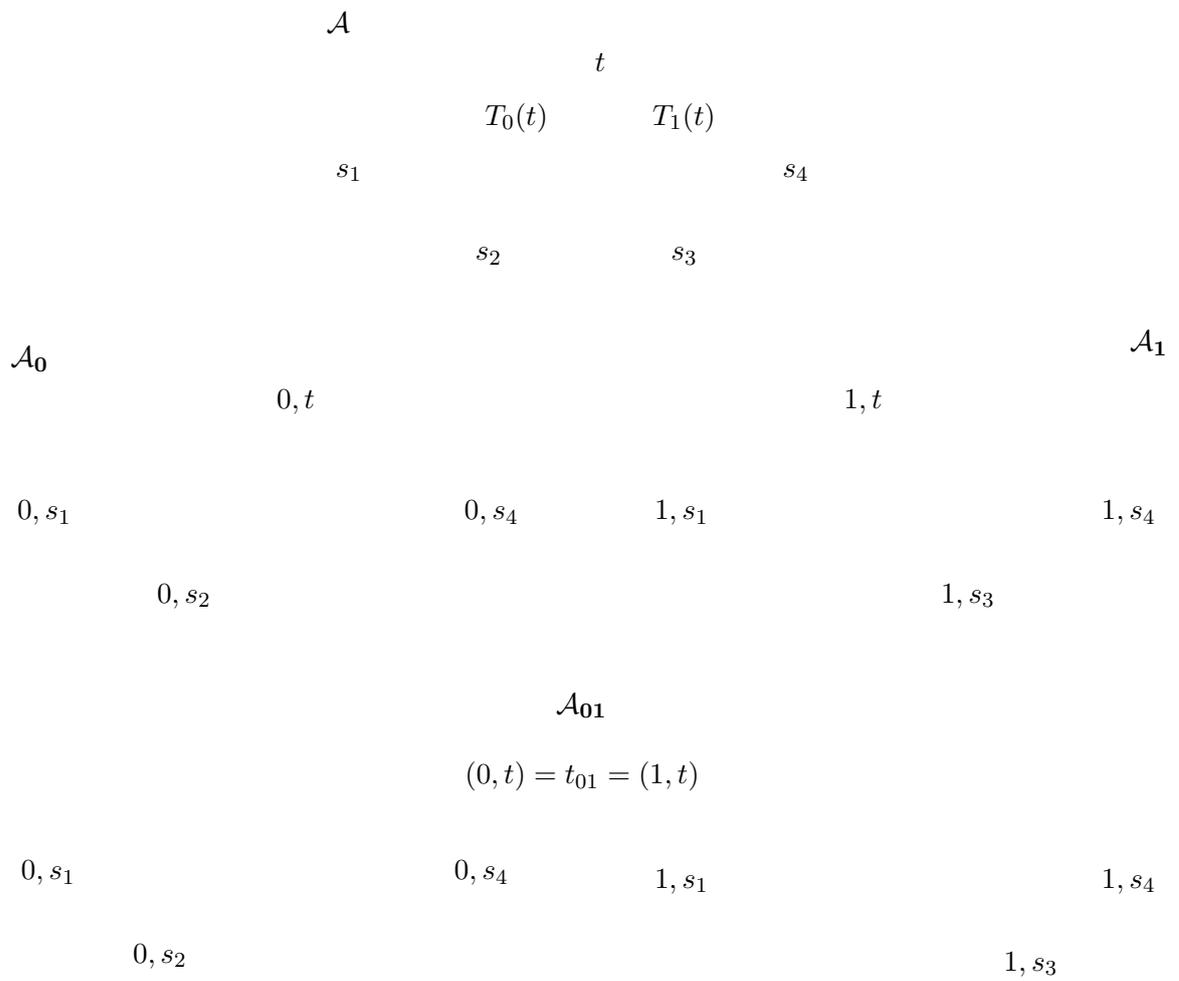


FIG. 1.1 – Les quatre arènes \mathcal{A} , \mathcal{A}_0 , \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_{01} .

Par construction, les arènes \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 ont chacune les mêmes états et strictement moins de transitions que \mathcal{A} . L'hypothèse d'induction implique qu'il existe des couples de stratégies optimales positionnelles $(\sigma_0^\#, \tau_0^\#)$ et $(\sigma_1^\#, \tau_1^\#)$ aux jeux (\mathcal{A}_0, ϕ) et (\mathcal{A}_1, ϕ) respectivement.

A partir de $\tau_0^\#$ et $\tau_1^\#$, nous allons construire une stratégie τ_{01} pour le joueur Min au jeu (\mathcal{A}_{01}, ϕ) . Dans l'arène \mathcal{A}_{01} l'ensemble des états contrôlés par le joueur Min est $\{0, 1\} \times S_{\text{Min}}$. Quand l'état courant dans \mathcal{A}_{01} est un état $(i, q) \in \{0, 1\} \times S_{\text{Min}}$, la stratégie τ_{01} du joueur Min consiste à appliquer $\tau_0^\#$ si $i = 0$ et $\tau_1^\#$ si $i = 1$. Formellement, si le but de la transition $\tau_i^\#((i, q))$ n'est pas l'état pivot (i, t) alors Min choisit la transition $\tau_i^\#((i, q))$. Si le but de la transition $\tau_i^\#((i, q))$ est l'état pivot (i, t) alors Min choisit la transition $((i, q), \text{col}(\tau_i^\#((i, q))), t_{01})$. Intuitivement donc, le joueur Min utilise dans \mathcal{A}_{01} la stratégie $\tau_0^\#$ si l'état courant appartient à \mathcal{A}_0 et il utilise la stratégie $\tau_1^\#$ si l'état courant appartient à \mathcal{A}_1 . Notons que la stratégie τ_{01} est positionnelle.

Une fois fixée la stratégie τ_{01} pour le joueur Min, l'arène \mathcal{A}_{01} peut être vue comme une arène à un joueur. Nous allons noter \mathcal{B}_{01} l'arène qui est obtenue à partir de \mathcal{A}_{01} en supprimant toutes les transitions dont la source est contrôlée par le joueur Min et qui ne sont pas conformes à τ_{01} . Par hypothèse, la condition (B) est vérifiée et Max possède donc une stratégie optimale positionnelle σ_{01} dans le jeu (\mathcal{B}_{01}, ϕ) . Évidemment σ_{01} est également une stratégie positionnelle pour Max dans l'arène \mathcal{A}_{01} . Maintenant qu'on a construit τ_{01} et σ_{01} , on peut passer à la définition de $\sigma^\#$ et $\tau^\#$.

Le choix de la stratégie $\sigma^\#$. Dans l'arène \mathcal{B}_{01} , l'état t_{01} est contrôlé par Max, donc il existe une unique transition e de source t_{01} et conforme à σ_{01} . Sans perte de généralité, quitte à intervertir les arènes \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 , on peut supposer que

- ♣ la stratégie σ_{01} choisit dans l'état pivot t_{01} de \mathcal{A}_{01} une transition de \mathcal{A}_0 .

Sous la condition ♣ ci-dessus on va montrer que la stratégie $\sigma_0^\#$ est optimale non seulement dans le jeu (\mathcal{A}_0, ϕ) mais également dans le jeu (\mathcal{A}, ϕ) . En fait, \mathcal{A}_0 et \mathcal{A} n'ont pas le même ensemble d'états donc $\sigma_0^\#$ n'est pas à proprement parler une stratégie dans \mathcal{A} . Pour cela, on pose :

$$\sigma^\# := \{(s, c, s') \in T \mid ((0, s), c, (0, s')) \in \sigma_0^\#\}. \quad (1.8)$$

Comme nous l'avons indiqué auparavant, l'arène \mathcal{A}_{01} (ou plus exactement l'arène \mathcal{B}_{01}) nous a servi à choisir entre les stratégies $\sigma_0^\#$ et $\sigma_1^\#$.

Construction de $\tau^\#$. La stratégie $\tau^\#$ pour le joueur Min consiste à alterner entre les stratégies $\tau_0^\#$ et $\tau_1^\#$. Contrairement à la stratégie $\sigma^\#$, qui est positionnelle, $\tau^\#$ nécessite un bit de mémoire. Pour utiliser sa stratégie $\tau^\#$ dans l'arène \mathcal{A} , le joueur Min doit se souvenir si lors du dernier passage par t la transition choisie par le joueur Max était une transition de $T_0(t)$, ou une transition de $T_1(t)$. Dans le premier cas il joue conformément à la stratégie $\tau_0^\#$ et dans le deuxième cas il joue conformément à $\tau_1^\#$. De plus on suppose qu'au début, avant le premier passage par t , il joue selon $\tau_0^\#$.

Pour définir $\tau^\#$ formellement on commence par définir une application $h : \mathbf{P}^* \rightarrow \{0, 1\}$ qui associe à chaque partie finie p dans \mathcal{A} la valeur 0 ou 1 :

$$h(p) = \begin{cases} 0 & \text{si soit } p \text{ ne contient aucune transition de source } t \text{ ou} \\ & \text{la dernière transition de } p \text{ de source } t \text{ appartient à } T_0(t), \\ 1 & \text{si la dernière transition de } p \text{ de source } t \text{ appartient à } T_1(t). \end{cases}$$

La stratégie $\tau^\#$ de Min dans \mathcal{A} est définie comme suit. Pour chaque partie finie p dont le but est dans S_{Min} ,

$$\tau^\#(p) = (s, c, s') \text{ tel que } \begin{cases} \tau_0^\#((0, \text{but}(p))) = ((0, s), c, (0, s')) & \text{si } h(p) = 0, \\ \tau_1^\#((1, \text{but}(p))) = ((1, s), c, (1, s')) & \text{si } h(p) = 1. \end{cases}$$

En d'autres termes, quand il joue dans \mathcal{A} , le joueur Min applique soit sa stratégie optimale $\tau_0^\#$ du jeu (\mathcal{A}_0, ϕ) soit sa stratégie optimale $\tau_1^\#$ du jeu (\mathcal{A}_1, ϕ) selon la valeur de $h(p)$. Initialement, avant la première visite à l'état pivot t , Min utilise $\tau_0^\#$. Après la première visite à t le choix de Min se porte sur $\tau_0^\#$ si lors du dernier passage dans t son adversaire a choisi une transition de $T_0(t)$ et porte son choix sur $\tau_1^\#$ si cette transition était dans $T_1(t)$. Intuitivement, selon que la partie en cours est semblable à une partie dans \mathcal{A}_0 ou \mathcal{A}_1 , Min réplique avec sa stratégie optimale dans (\mathcal{A}_0, ϕ) ou (\mathcal{A}_1, ϕ) .

Il est clair que la stratégie $\tau^\#$ est une stratégie utilisant une mémoire finie $\{0, 1\}$, qui permet à Min de se souvenir si après le dernier passage dans t , la transition choisie par Max était dans $T_0(t)$ ou $T_1(t)$. Cette mémoire est initialisée à 0 et mise à jour uniquement quand l'état t est visité.

Montrons maintenant que $(\sigma^\#, \tau^\#)$ est un couple de stratégies optimales pour le jeu (\mathcal{A}, ϕ) . Soit $s \in S$. On pose $p^\# = p_G(s, \sigma^\#, \tau^\#) = s_0 c_0 s_1 \cdots$ l'unique partie de source s conforme à $\sigma^\#$ et $\tau^\#$. Par définition de $\sigma^\#$ et $\tau^\#$, quand $p^\#$ atteint l'état pivot, la transition suivante est toujours une transition de $T_0(t)$. Ainsi, pour tout préfixe p de $p^\#$, on a $h(p) = 0$ donc et Min joue conformément à $\tau_0^\#$. On en déduit :

$$p_{\mathcal{A}_0}(s, \sigma_0^\#, \tau_0^\#) = (0, s_0)c_0(0, s_1)c_1 \cdots ,$$

et

$$\text{col}(p^\#) = \text{col}(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma^\#, \tau^\#)). \quad (1.9)$$

Prouvons que $\tau^\#$ est une réponse optimale à $\sigma^\#$ pour le jeu (\mathcal{A}, u) . Soit q une partie dans \mathcal{A} de source s et conforme à $\sigma^\#$ et montrons que

$$\phi(\text{col}(q)) \geq \phi(\text{col}(p^\#)) . \quad (1.10)$$

Puisque q est conforme à $\sigma^\#$, et par définition de $\sigma^\#$, il existe une partie q_0 dans \mathcal{A}_0 , issue de $(0, s)$, conforme à $\sigma_0^\#$, et telle que $\text{col}(q) = \text{col}(q_0)$. Or $(\sigma_0^\#, \tau_0^\#)$ est un couple de stratégies optimales pour le jeu (\mathcal{A}_0, ϕ) donc $\phi(\text{col}(q)) = \phi(\text{col}(q_0)) \geq \phi(\text{col}(p_{\mathcal{A}_0}(s, \sigma_0^\#, \tau_0^\#)))$. D'après (1.9), on obtient bien (1.10).

Prouvons que $\sigma^\#$ est une réponse optimale à $\tau^\#$ pour le jeu (\mathcal{A}, u) . Soit p une partie dans \mathcal{A} de source s et conforme à $\tau^\#$. Montrons que

$$\phi(\text{col}(p^\#)) \geq \phi(\text{col}(p)). \quad (1.11)$$

Si $s \neq t$, on pose $s_{01} = (0, s)$ et si $s = t$, on pose $s_{01} = t_{01}$. Comme p est conforme à $\tau^\#$, et par construction de $\tau^\#$, il existe une partie p' dans \mathcal{A}_{01} , conforme à τ_{01} , issue de s_{01} , telle que

$$\text{col}(p) = \text{col}(p'). \quad (1.12)$$

Soit $p_{01} = p_{\mathcal{A}_{01}}((0, s), \sigma_{01}, \tau_{01})$ l'unique partie dans l'arène \mathcal{A}_{01} issue de s_{01} et conforme à σ_{01} et τ_{01} . Puisque p' est conforme à τ_{01} et que σ_{01} est une réponse optimale de Max à τ_{01} ,

$$\phi(\text{col}(p')) \leq \phi(\text{col}(p_{01})). \quad (1.13)$$

D'après la condition \clubsuit la partie p_{01} reste incluse dans $(\{0\} \times S) \cup \{t_{01}\}$. Par construction de τ_{01} , il existe une partie p'' dans \mathcal{A} , de source s et conforme à $\tau_0^\#$, telle que

$$\text{col}(p_{01}) = \text{col}(p''). \quad (1.14)$$

Comme p'' est conforme à $\tau_0^\#$ et que $(\sigma_0^\#, \tau_0^\#)$ est un couple de stratégie optimales dans (\mathcal{A}_0, ϕ) , $\phi(\text{col}(p'')) \leq \phi(\text{col}(p_{\mathcal{A}_0}(s, \sigma_0^\#, \tau_0^\#)))$. Cette inégalité et les équations (1.9), (1.12), (1.13) et (1.14), prouvent que

$$\phi(\text{col}(p)) = \phi(\text{col}(p')) \leq \phi(\text{col}(p_{01})) = \phi(\text{col}(p'')) \leq \phi(\text{col}(p_{\mathcal{A}_0}(s, \sigma_0^\#, \tau_0^\#))) = \phi(\text{col}(p^\#)),$$

et on obtient bien (1.11).

On a bien prouvé que $(\sigma^\#, \tau^\#)$ est un couple de stratégies optimales positionnelles pour le jeu (\mathcal{A}, ϕ) . Cela termine la preuve du lemme 1.9. \square

Par symétrie, on déduit du lemme 1.9 que sous les même hypothèses, les deux joueurs ont une stratégie optimale positionnelle. Par induction sur le rang de l'arène, cela prouve le théorème 1.8. \square

1.5 Positionnalité des jeux à un joueur

Dans le chapitre précédent, nous avons démontré (cf. théorème 1.8) qu'une fonction de paiement ϕ est positionnelle pour les jeux à deux joueurs si et seulement si les fonctions de paiement ϕ et $-\phi$ sont toutes deux positionnelles pour les jeux à un joueur. Nous poursuivons donc notre recherche des fonctions de paiement positionnelles en cherchant à caractériser la classe des fonctions de paiement positionnelles pour les jeux à un joueur. Nous obtenons plusieurs réponses à cette question.

Tout d'abord, nous exhibons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction de paiement soit positionnelle pour les jeux à un joueur, ces conditions sont présentées dans le théorème 1.18. Ce résultat nous sera utile pour montrer qu'un certain type de produit entre fonction de paiement, appelé *produit prioritaire*, préserve la positionnalité (cf. théorème 1.38).

Un inconvénient du théorème 1.18 est qu'il n'est pas facilement utilisable en pratique : étant donnée une fonction de paiement particulière, par exemple une condition de Müller, il n'est pas évident à première vue de vérifier si elle vérifie les conditions du théorème 1.18. Pour cela, dans la sous-section 1.5.2, on donne dans le théorème 1.21 des conditions qui sont beaucoup plus facilement vérifiables. Ces conditions sont seulement suffisantes : elles garantissent qu'une fonction de paiement est positionnelle pour les jeux à un joueur mais ne sont pas nécessairement vérifiées par une telle fonction de paiement.

Sous certaines hypothèses supplémentaires, on peut simplifier le théorème 1.21. En effet, parmi les fonctions de paiement les plus populaires, beaucoup ont la propriété d'être préfixe-indépendantes, c'est à dire que le gain des joueurs ne dépend d'aucun préfixe fini de la partie, mais uniquement du comportement à long terme de la partie. C'est le cas par exemple des fonctions du jeu du paiement en moyenne, du jeu de parité et du jeu de la limite supérieure. A l'inverse, pour d'autres fonctions de paiement, le gain des joueurs dépend plus des premiers coups joués que du comportement à long terme. C'est le cas quand la fonction de paiement est continue, comme dans les jeux d'accessibilité ou escomptés. Dans ces deux cas particuliers, les conditions suffisantes données dans le théorème 1.21 se simplifient, et l'on obtient les corollaires 1.25 et 1.26

Les différents résultats de cette section seront mis en application dans les sections suivantes. La caractérisation exacte donnée par le théorème 1.18 est utilisée pour prouver que le produit prioritaire conserve la positionnalité. Les conditions suffisantes données par le théorème 1.21 seront utilisées à de nombreuses reprises : d'une part dans la section suivante pour démontrer ou redémontrer la positionnalité de chacune des fonctions de paiement introduites dans la section 1.3, et d'autre part dans la section 1.8 pour l'étude des jeux multi-escomptés et de leurs limites.

1.5.1 Une caractérisation de la positionnalité pour un joueur

Notre caractérisation des fonctions de paiement positionnelles pour les jeux à un joueur est énoncée dans le théorème 1.18 : pour être positionnelle, une fonction de paiement ϕ doit être *monotone*, *sélective* et *séparante*.

Essentiellement, ces trois propriétés expriment des conditions sur les valeurs maximales atteintes par ϕ sur les fermetures topologiques de certains ensembles reconnaissables de mots finis. Dans les deux sous-sections suivantes, on rappelle brièvement les notions d'automates fini, on introduit un opérateur $[[\cdot]]$ sur les langages de mots finis, et on définit un préordre \sqsubseteq_ϕ sur les langages.

1.5.1.1 L'opérateur $[[\cdot]]$

Afin de caractériser les fonctions de paiement positionnelles pour les jeux à un joueur, nous introduisons un opérateur $[[\cdot]]$ sur les langages de mots finis, à valeur dans les langages de mots infinis.

Définition 1.10. Soit C un ensemble fini et $L \subset C^*$ un langage de mots finis sur C . On définit

$$\llbracket L \rrbracket = \{u \in C^\omega \mid \text{chaque préfixe de } u \text{ est un préfixe d'un mot de } L\}.$$

Le lecteur intéressé par les topologies sur les mots finis et/ou infinis pourra consulter avec profit le troisième chapitre du livre [PP04] de Dominique Perrin et Jean-Éric Pin. Dans cet ouvrage, les auteurs démontrent que la famille des langages de mots infinis exprimables comme le crochet $\llbracket L \rrbracket$ d'un langage de mots finis L est très exactement la famille des langages fermés, au sens de la topologie sur C^ω .

Les remarques suivantes à propos de l'opérateur $\llbracket \cdot \rrbracket$ nous seront très utiles par la suite.

Lemme 1.11. Soit $M, N \subseteq C^*$, $u \in C^*$. Alors

1. $\llbracket uM \rrbracket = u\llbracket M \rrbracket$,
2. $\llbracket M \cup N \rrbracket = \llbracket M \rrbracket \cup \llbracket N \rrbracket$,
3. $\llbracket MN \rrbracket = \llbracket M \rrbracket \cup M\llbracket N \rrbracket$,
4. $\llbracket M^* \rrbracket = M^\omega \cup M^*\llbracket M \rrbracket$.

Démonstration. Pour tout langage de mots finis $L \subseteq C^*$, on note $\text{Pref}(L) \subseteq C^*$ l'ensemble des préfixes des mots de L . Prouvons que $\llbracket M \cup N \rrbracket = \llbracket M \rrbracket \cup \llbracket N \rrbracket$. L'inclusion \supseteq est triviale. De plus, puisque $\text{Pref}(M \cup N) = \text{Pref}(M) \cup \text{Pref}(N)$, alors un mot de C^ω ayant tous ses préfixes dans $\text{Pref}(M \cup N)$ a une infinité de préfixes soit dans $\text{Pref}(M)$ soit dans $\text{Pref}(N)$, ce qui prouve 1. De même, $\llbracket MN \rrbracket = \llbracket M \rrbracket \cup M\llbracket N \rrbracket$ car $\text{Pref}(MN) = \text{Pref}(M) \cup M\text{Pref}(N)$, ce qui prouve 2. Prouvons que $\llbracket M^* \rrbracket = M^\omega \cup M^*\llbracket M \rrbracket$. L'inclusion \supseteq est claire. Réciproquement, soit $u \in \llbracket M^* \rrbracket$. On montre tout d'abord que

$$\begin{cases} \text{soit } \exists v \in M \setminus \{\epsilon\} \text{ et } w \in \llbracket M^* \rrbracket \text{ tel que } u = vw, \\ \text{soit } u \in \llbracket M \rrbracket. \end{cases} \quad (1.15)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons u_n le préfixe de u de taille n . Par définition de $\llbracket M^* \rrbracket$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists v^{(n)} \in M^* \text{ tel que } u_n \in \text{Pref}(v^{(n)}).$$

On en déduit, par définition de M^* ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists v_0^{(n)}, \dots, v_{i(n)}^{(n)} \in M \text{ tel que } u_n \in \text{Pref}(v_0^{(n)} \dots v_{i(n)}^{(n)}). \quad (1.16)$$

En choisissant $i(n)$ minimal pour chaque n , on peut supposer que pour chaque n , soit $i(n) = 0$ et $u_n \in \text{Pref}(v_0^{(n)})$, soit $i(n) \geq 1$ et $v_0^{(n)} \dots v_{i(n)-1}^{(n)} \in \text{Pref}(u_n)$.

On distingue deux cas, et on montre que dans chaque cas (1.15) est vérifiée.

Le premier cas est celui où la longueur des mots $\{v_0^{(0)}, v_0^{(1)}, \dots\}$ est bornée. Dans ce cas, il existe $v \in M$ tel que $v = v_0^{(n)}$ pour une infinité de valeurs de n . Soit $w \in C^*$ tel que $u = vw$. D'après (1.16), w a une infinité de préfixes dans $\text{Pref}(M^*)$, ce qui implique $w \in \llbracket M^* \rrbracket$. Donc $u \in (M \setminus \{\epsilon\})\llbracket M^* \rrbracket$ et (1.15) est vérifiée.

Si la longueur des mots $\{v_{(0)}^0, v_{(0)}^1, \dots\}$ n'est pas bornée, il existe une suite d'entiers $s(0), s(1), \dots$ telle que la longueur des mots de la suite $v_0^{(s(n))}$ est strictement croissante. Alors d'après (1.16), u est égale à la limite de la suite $v_0^{(s(0))}, v_0^{(s(1))}, \dots$ donc $u \in \llbracket M \rrbracket$, ce qui prouve (1.15).

En utilisant (1.15), on peut construire soit une suite infinie de mots $v_0, v_1, \dots \in M$ telle que $u = v_0 v_1 \dots \in M^\omega$, soit une suite finie $v_0, v_1, \dots, v_n \in M$ et un mot $v \in \llbracket M \rrbracket$ tel que $u = v_0 \dots v_n v \in M^* \llbracket M \rrbracket$. Finalement, on a prouvé que $u \in M^\omega \cup M^* \llbracket M \rrbracket$, ce qui termine la preuve du lemme 1.11. \square

1.5.1.2 Automates et langages reconnaissables de mots finis

Un *automate* sur l'alphabet C est un quadruplet $\mathcal{A} = (S, I, F, T)$, où (S, T) est un système de transitions coloré par C , et $I, F \subseteq S$ sont des sous-ensembles des états, appelés respectivement ensemble des états initiaux et ensemble des états finaux.

On appelle chemin dans \mathcal{A} un chemin dans le système de transitions sous-jacent, en conservant les notions de source, de but et de couleur. On dit qu'un mot fini $u \in C^*$ est *reconnu* par \mathcal{A} si il existe un chemin fini dans \mathcal{A} dont la couleur est u , dont la source est un état initial et dont le but est un état final. Le langage de \mathcal{A} est l'ensemble des mots reconnus par \mathcal{A} et est noté $L(\mathcal{A})$. On dit qu'un langage $L \subseteq C^*$ est *reconnaisable* si il existe un automate dont L est le langage. On note $\text{Rec}(C)$ l'ensemble des langages reconnaissables de mots finis sur l'alphabet C .

Par abus de notation, on confondra souvent un automate $\mathcal{A} = (S, I, F, T)$ avec l'arène à un joueur (S, T) sous-jacente.

Un automate \mathcal{A} est dit *co-accessible* si à partir de chacun des états de \mathcal{A} il existe un chemin vers un état final. Le lemme suivant nous sera souvent utile :

Lemme 1.12. *Soit $\mathcal{A} = (Q, i, F, T)$ un automate co-accessible sur les mots finis qui reconnaît un langage $L \subseteq C^*$. Alors*

$$\llbracket L \rrbracket = \{\text{col}(p) \mid p \text{ est un chemin infini dans } \mathcal{A} \text{ tel que } \text{source}(p) = i\}.$$

Démonstration. Soit $p = e_0 e_1 e_2 \dots \in T^\omega$ un chemin infini dans \mathcal{A} dont la source est l'état initial i . Puisque \mathcal{A} est co-accessible, pour chaque n il existe un chemin de source $\text{but}(e_n)$ et dont la cible est un état final. Cela implique que le mot fini $\text{col}(e_0) \dots \text{col}(e_n) \in C^*$ est un préfixe d'un mot reconnu par \mathcal{A} . Finalement, $\text{col}(p) \in \llbracket L \rrbracket$.

Réciproquement, soit $u = c_0 c_1 c_2 \dots \in \llbracket L \rrbracket$. Soit \mathcal{T} l'arbre orienté défini comme suit. Les sommets de \mathcal{T} sont les chemins finis p dans \mathcal{A} tels que $\text{col}(p)$ est un préfixe de u et $\text{source}(p) = i$. On ajoute une arête d'un sommet p de \mathcal{T} vers un état p' si il existe une transition $e \in T$ dans \mathcal{A} telle que $p' = pe$. La racine de \mathcal{T} est le chemin vide $\mathbf{1}_i$ dont la source et la cible est i . Clairement, \mathcal{T} est infini puisque u est un mot infini et d'autre part, le degré de \mathcal{T} est borné par le cardinal de T . Donc, par le lemme de Koenig, il existe un chemin infini dans \mathcal{T} dont la source est $\mathbf{1}_i$, la racine de \mathcal{T} . Ce chemin infini correspond à un chemin infini dans \mathcal{A} coloré par u . \square

On utilisera en particulier des automates sous forme normalisé, au sens suivant :

Définition 1.13. Un automate $\mathcal{A} = (Q, i, f, T)$ est dit normalisé si

- \mathcal{A} possède un unique état initial i , qui n'est le but d'aucune transition,
- \mathcal{A} possède un unique état final f , qui n'est la source d'aucune transition.

On a le lemme suivant à propos des automates normalisés.

Lemme 1.14. Soit $L \subseteq C^*$ un langage reconnaissable de mots finis. Supposons que $\epsilon \notin L$. Alors L est reconnu par un automate normalisé.

1.5.1.3 Le préordre \sqsubseteq_ϕ

Dans la suite de ce chapitre, étant donné un ensemble $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, la notation $\sup A$ désigne la borne supérieure de A . En particulier, pour $L \subseteq C^\omega$ un ensemble de mots infinis et ϕ une fonction de paiement sur C^ω , $\sup \phi(L)$ désigne $\sup\{\phi(u) \mid u \in L\}$. Si $L = \emptyset$, on pose $\sup(\phi(L)) = -\infty$.

Afin d'exprimer de façon concise notre caractérisation des fonctions de paiement positionnelles pour les jeux à un joueur, on associe à chaque paiement ϕ sur C^ω une relation \sqsubseteq_ϕ sur les langages de C^* . Pour $L, M \subseteq C^*$, cette relation est définie par :

$$L \sqsubseteq_\phi M \quad \text{si et seulement si} \quad \forall u \in C^*, \sup \phi(\llbracket uL \rrbracket) \leq \sup \phi(\llbracket uM \rrbracket).$$

Dans cette définition, intuitivement, les langages uL et uM sont des langages de préfixes finis de parties. Le langage $\llbracket uL \rrbracket$ est l'ensemble des parties infinies générées à partir de ces parties finies, et $\sup \phi(\llbracket uL \rrbracket)$ est la valeur maximale atteinte par ϕ sur ces parties infinies. Un langage L de mots finis est \sqsubseteq_ϕ -inférieur à un autre langage M de mots finis si et seulement si la valeur maximale atteinte par ϕ sur l'ensemble des parties infinies engendrées par L est inférieure à la valeur maximale atteinte par ϕ sur l'ensemble des parties infinies engendrées par M .

Il est facile de vérifier que la relation binaire \sqsubseteq_ϕ est réflexive et transitive et c'est donc une relation de préordre partiel sur les langages de mots finis.

1.5.1.4 Fonctions de paiements monotones, sélectives et séparantes

Pour qu'une fonction de paiement induise des stratégies optimales positionnelles dans les jeux à un joueur, il est nécessaire qu'elle vérifie trois propriétés élémentaires : elle doit être monotone, sélective et séparante.

Définition 1.15. Soit C un ensemble fini de couleurs et ϕ une fonction de paiement sur C^ω . La fonction ϕ est dite :

- *monotone* si la relation \sqsubseteq_ϕ est totale sur $\text{Rec}(C)$: pour tous langages reconnaissables $M, N \in \text{Rec}(C)$,

$$M \sqsubseteq_\phi N \text{ ou } N \sqsubseteq_\phi M, \quad (1.17)$$

- *sélective* si pour tous langages reconnaissables $M, N \in \text{Rec}(C)$,

$$MN \sqsubseteq_\phi M^* \cup N, \quad (1.18)$$

$a \quad b \quad b \quad a \quad b$

FIG. 1.2 – L’automate canonique reconnaissant le langage $\{abbab\}$.

- *séparante* si pour tous langages reconnaissables $M, N \in \text{Rec}(C)$,

$$(M \cup N)^* \sqsubseteq_{\phi} M^* \cup N^*. \quad (1.19)$$

La propriété de monotonie exprime le fait que l’ajout d’un préfixe à deux ensembles de parties ne modifie pas les préférences du joueur pour un ensemble ou l’autre. La propriété de sélectivité exprime le fait que si un joueur a la possibilité de choisir de jouer des parties dans un langage M avant de continuer à jouer avec un langage N , alors il peut choisir de jouer uniquement avec M ou N . La propriété de séparation exprime le fait que si un joueur peut choisir de jouer alternativement des parties dans M et N , il peut choisir de jouer uniquement dans M ou uniquement dans N .

1.5.1.5 Le théorème de caractérisation

En utilisant les notions introduites dans la sous-section précédente, on peut maintenant caractériser les paiements positionnels pour les jeux à un joueur.

Proposition 1.16. *Soit C un ensemble de couleurs et ϕ une fonction de paiement sur C^ω . Supposons que ϕ est positionnelle pour les jeux à un joueur. Alors ϕ est monotone, sélective et séparante.*

Nous verrons par la suite que la réciproque de cette proposition est également vraie (cf. proposition 1.17).

Démonstration. Supposons que ϕ est positionnelle pour les jeux à un joueur. Soit deux langages reconnaissables $M, N \in \text{Rec}(C^*)$. On doit montrer que M et N vérifient les équations (1.17), (1.18) et (1.19). Le lemme suivant montre qu’on peut se ramener au cas où ni M ni N ne contiennent le mot vide :

Remarque. Soit $L \subseteq C^*$. Alors $\llbracket L \rrbracket = \llbracket L \setminus \{\epsilon\} \rrbracket$.

Pour un mot $u \in C^*$, nous notons \mathcal{A}_u l’automate fini déterministe canonique qui reconnaît le langage $\{u\}$ composé uniquement du mot u . Par exemple, si $C = \{a, b\}$ et $u = abbab$, l’automate \mathcal{A}_u est représenté sur la figure 1.5.1.5. On suppose que \mathcal{A}_u aura toujours cette forme, c’est-à-dire avec un seul état initial et un seul état final et avec tous les états accessibles et co-accessibles.

Comme ni M ni N ne contiennent le mot vide, le lemme 1.14 indique qu’on peut choisir deux automates normalisés \mathcal{A}_M et \mathcal{A}_N qui reconnaissent les langages M et N .

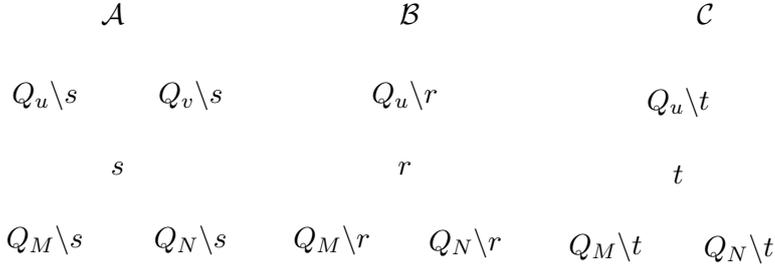


FIG. 1.3 – L’arène \mathcal{A} utilisée pour prouver que ϕ est monotone est obtenu en fusionnant quatre états : les états finaux de \mathcal{A}_u et \mathcal{A}_v et les états initiaux de \mathcal{A}_M et \mathcal{A}_N . Les ensembles Q_u, Q_v, Q_M et Q_N sont les états des automates correspondant. L’arène \mathcal{B} est utilisée pour prouver que ϕ est sélective. Dans ce cas c’est l’état final de \mathcal{A}_u qui est fusionné avec les états initiaux et finaux de \mathcal{A}_M et l’état initial de \mathcal{A}_N . Enfin l’arène \mathcal{C} est utilisée pour prouver que ϕ est séparante, en fusionnant l’état final de \mathcal{A}_u avec les états initiaux et finaux de \mathcal{A}_M et \mathcal{A}_N .

ϕ est monotone. Pour montrer que ϕ est monotone, il suffit de prouver que

$$\begin{aligned} \forall M, N \in \text{Rec}(C), \\ (\exists u \in C^*, \sup \phi(u \llbracket M \rrbracket) < \sup \phi(u \llbracket N \rrbracket)) \\ \implies (\forall v \in C^*, \sup \phi(v \llbracket M \rrbracket) \leq \sup \phi(v \llbracket N \rrbracket)). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Supposons donc que pour un mot $u \in C^*$

$$\sup \phi(u \llbracket M \rrbracket) < \sup \phi(u \llbracket N \rrbracket), \quad (1.21)$$

et prouvons que dans ce cas

$$\sup \phi(v \llbracket M \rrbracket) \leq \sup \phi(v \llbracket N \rrbracket). \quad (1.22)$$

À partir des automates $\mathcal{A}_u, \mathcal{A}_v, \mathcal{A}_M$ et \mathcal{A}_N , on obtient un nouvel automate \mathcal{A} en fusionnant quatre états : les états finaux de \mathcal{A}_u et \mathcal{A}_v et les états initiaux de \mathcal{A}_M et \mathcal{A}_N , sans modifier les transitions. On appelle s le nouvel état ainsi obtenu. L’automate \mathcal{A} possède un seul état initial, c’est l’état initial de \mathcal{A}_u , et possède deux états finaux, ce sont les états finaux de \mathcal{A}_M et \mathcal{A}_N . Il est évident que \mathcal{A} est co-accessible et reconnaît le langage $u(M \cup N)$.

Par abus de notation, on note également \mathcal{A} l’arène à un joueur composée des mêmes états et transitions que \mathcal{A} , et où tous les états sont contrôlés par le joueur Max. Cette arène est représentée sur la figure 1.3. Par hypothèse, Max possède une stratégie optimale positionnelle $\sigma^\#$ dans le jeu (\mathcal{A}, ϕ) .

Le lemme 1.12 appliqué à l'automate \mathcal{A} implique que l'ensemble des étiquettes de parties dans \mathcal{A} dont la source est l'état initial de \mathcal{A} est $\llbracket u(M \cup N) \rrbracket$, qui est égal à $\llbracket uM \rrbracket \cup \llbracket uN \rrbracket$ par le lemme 1.11. Soit p l'unique partie infinie dans \mathcal{A} , de source l'état initial de \mathcal{A} , et conforme à $\sigma^\#$. Par optimalité de $\sigma^\#$, $\phi(\text{col}(p)) = \sup \phi(\llbracket uM \rrbracket \cup \llbracket uN \rrbracket)$ et l'hypothèse (1.21) implique que $\text{col}(p) \notin \llbracket uM \rrbracket$.

Ainsi, lorsque la partie p atteint l'état s , elle emprunte une transition dont le but est un état de \mathcal{A}_N (Fig. 1.3), et reste ensuite piégée dans l'ensemble des états de \mathcal{A}_N . Autrement dit, on en déduit que $\sigma^\#(s)$ est une transition de \mathcal{A}_N .

Examinons maintenant l'unique partie q dans \mathcal{A} dont la source est l'état initial de \mathcal{A}_v et qui est conforme à $\sigma^\#$. Puisque q est conforme à $\sigma^\#$, une fois l'état s atteint elle emprunte elle aussi une transition de \mathcal{A}_N , et reste dans l'ensemble des états de \mathcal{A}_N après avoir traversé les états de l'automate \mathcal{A}_v . En appliquant le lemme 1.12 à l'automate co-accessible obtenu à partir de \mathcal{A}_v et \mathcal{A}_N en fusionnant l'état final de \mathcal{A}_v avec l'état initial de \mathcal{A}_N , on en déduit que

$$\text{col}(q) \in \llbracket vN \rrbracket. \quad (1.23)$$

D'autre part, si l'on choisit comme état initial de \mathcal{A} non pas l'état initial de \mathcal{A}_u mais celui de \mathcal{A}_v , on obtient comme précédemment que $\phi(\text{col}(q)) = \sup \phi(\llbracket vM \rrbracket \cup \llbracket vN \rrbracket)$. Avec (1.23), on en déduit immédiatement (1.22).

ϕ est sélective. Pour cela, on montre que

$$\sup \phi(u\llbracket M^*N \rrbracket) \leq \sup \phi(u\llbracket M^* \rrbracket \cup u\llbracket N \rrbracket). \quad (1.24)$$

Pour cela, on construit un automate \mathcal{B} en fusionnant quatre états : l'état final de \mathcal{A}_u , l'état initial et l'état final de \mathcal{A}_M et l'état initial de \mathcal{A}_N . On appelle r l'état ainsi obtenu, cf. figure 1.3. L'automate \mathcal{B} possède un unique état initial, qui est celui de \mathcal{A}_u , et un unique état final, celui de \mathcal{A}_N . Il est co-accessible et reconnaît le langage uM^*N . De nouveau, par abus de notation, on note également \mathcal{B} l'arène à un joueur sous-jacente à l'automate \mathcal{B} , qui a les mêmes états et les mêmes transitions que \mathcal{B} , et dont tous les états sont contrôlés par Max. Par hypothèse, Max possède une stratégie optimale positionnelle $\sigma^\#$ pour le jeu (\mathcal{B}, ϕ) .

Soit p l'unique partie dans \mathcal{B} issue de l'état initial de \mathcal{A}_u et conforme à $\sigma^\#$. Puisque l'automate co-accessible \mathcal{B} reconnaît le langage uM^*N et puisque la stratégie $\sigma^\#$ est optimale, le lemme 1.12 implique

$$\phi(\text{col}(p)) = \sup \phi(\llbracket uM^*N \rrbracket). \quad (1.25)$$

D'autre part $\sigma^\#$ est positionnelle et, comme précédemment, la partie p emprunte la même transition à chaque fois qu'elle passe dans r . La partie p est donc un chemin dans un des deux automates \mathcal{B}_M et \mathcal{B}_N représentés sur la figure 1.4, et qui reconnaissent respectivement les langages uM^* et uN . Par le lemme 1.12, on en déduit que $\text{col}(p) \in \llbracket uM^* \rrbracket \cup \llbracket uN \rrbracket$. D'après l'équation (1.25), cela implique bien (1.24).

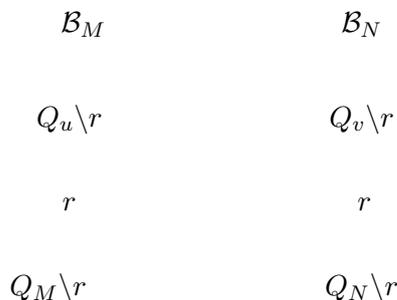


FIG. 1.4 – Les automates \mathcal{B}_M et \mathcal{B}_N .

ϕ est séparante. Enfin, il reste à montrer que ϕ est séparante, c'est à dire que :

$$\sup \phi(\llbracket u(M \cup N)^* \rrbracket) \leq \sup \phi(\llbracket uM^* \rrbracket \cup \llbracket uN^* \rrbracket). \quad (1.26)$$

Pour cela, on construit un automate \mathcal{C} en fusionnant l'état final de \mathcal{A}_u et les états initiaux et finaux de \mathcal{A}_N et \mathcal{A}_M (voir figure 1.3). L'état quotient est appelé t . L'automate \mathcal{C} possède un unique état initial, celui de \mathcal{A}_u , et un unique état final, l'état t . En considérant l'unique partie issue de l'état initial, jouée dans \mathcal{C} et conforme à une stratégie optimale positionnelle de Max, on obtient (1.26).

Cela achève la preuve de la proposition 1.16. □

Ainsi, on a prouvé que toute fonction de paiement positionnelle pour les jeux à un joueur est monotone, sélective et séparante. Comme annoncé précédemment, la réciproque est également vraie :

Proposition 1.17. *Soit C un ensemble de couleurs et ϕ une fonction de paiement sur C^ω . Supposons que ϕ est monotone, sélective et séparante. Alors ϕ est positionnelle pour les jeux à un joueur.*

Démonstration. A toute arène à un joueur $\mathcal{A} = (S_{\text{Max}}, T)$, on associe, comme dans la section 1.4, le rang $n_{\mathcal{A}} = |T| - |S_{\text{Max}}|$. On effectue la preuve de la proposition 1.17 par induction sur $n_{\mathcal{A}}$.

Rappelons que par définition, chaque état d'une arène est la source d'au moins une transition. Dans une arène \mathcal{A} telle que $n_{\mathcal{A}} = 0$, chaque état est donc nécessairement la source d'une unique transition. Le joueur Max n'a aucun choix à faire quand il joue : il existe une unique stratégie pour lui, qui est nécessairement positionnelle et optimale.

Fixons maintenant une arène à un joueur $\mathcal{A} = (S_{\text{Max}}, T)$ telle que $n_{\mathcal{A}} > 0$ et supposons que dans toute arène à un joueur \mathcal{B} telle que $n_{\mathcal{B}} < n_{\mathcal{A}}$, le joueur Max possède une stratégie optimale et positionnelle. On va montrer qu'il en possède également une dans \mathcal{A} .

Puisque $n_{\mathcal{A}} > 0$, il existe un état $t \in S_{\text{Max}}$ qui est la source d'au moins deux transitions. On note $T(t)$ l'ensemble des transitions de source t . Fixons une partition

de $T(t)$ en deux ensemble non vides $T_0(t)$ et $T_1(t)$. On définit deux nouvelles arènes à un joueur \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 en posant pour $i = 0, 1$, $\mathcal{A}_i = (S, T_i)$, où $T_i = T \setminus T_{1-i}(t)$, c'est-à-dire \mathcal{A}_i est l'arène obtenue à partir de \mathcal{A} en supprimant toutes les transitions sortant de t qui ne sont pas dans $T_i(t)$. Alors $n_{\mathcal{A}_i} < n_{\mathcal{A}}$ et, par hypothèse d'induction, le joueur Max possède une stratégie optimale positionnelle $\sigma_i^\#$ pour le jeu (\mathcal{A}_i, ϕ) .

On va montrer qu'une des deux stratégies $\sigma_0^\#$ et $\sigma_1^\#$ est en fait une stratégie optimale pour le jeu (\mathcal{A}, ϕ) . Pour choisir entre $\sigma_0^\#$ et $\sigma_1^\#$, on utilise la monotonie de ϕ . Pour $i \in \{0, 1\}$, considérons $u_i = \text{col}(p_{\mathcal{A}_i}(t, \sigma_i^\#))$, la couleur de l'unique partie infinie dans \mathcal{A}_i de source t et conforme à $\sigma_i^\#$. Soit $L_{0,t}$ et $L_{1,t}$ les ensembles des couleurs des parties issues de t et conformes respectivement à $\sigma_0^\#$ et $\sigma_1^\#$. Puisque ϕ est monotone, on sait que

$$\text{soit } L_{1,t} \sqsubseteq_\phi L_{0,t}, \quad (1.27)$$

$$\text{soit } L_{0,t} \sqsubseteq_\phi L_{1,t}. \quad (1.28)$$

Sans perte de généralité, on suppose que (1.27) est vérifiée. On va montrer que dans ce cas, la stratégie positionnelle optimale $\sigma_0^\#$ pour le jeu (\mathcal{A}_0, ϕ) est également une stratégie positionnelle optimale pour le jeu (\mathcal{A}, ϕ) .

Tout d'abord, par définition d'une stratégie positionnelle, il est clair que $\sigma_0^\#$ est une stratégie positionnelle non seulement dans l'arène \mathcal{A}_0 mais également dans l'arène \mathcal{A} . Pour prouver que $\sigma_0^\#$ est optimale pour le jeu (\mathcal{A}, ϕ) , choisissons un état quelconque $s \in S$ et une partie p issue de s , et montrons que

$$\phi(\text{col}(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma_0^\#))) \geq \phi(\text{col}(p)). \quad (1.29)$$

On définit plusieurs langages reconnaissables de C^* :

| | | |
|-------------|------------------------|--------------------------|
| $L_{0,s,t}$ | le langage reconnu par | $(S, \{s\}, \{t\}, T_0)$ |
| $L_{0,s}$ | " | $(S, \{s\}, S, T_0)$ |
| L_s | " | $(S, \{s\}, S, T)$ |
| $L_{0,t,t}$ | " | $(S, \{t\}, \{t\}, T_0)$ |
| $L_{1,t,t}$ | " | $(S, \{t\}, \{t\}, T_1)$ |
| $L_{0,t}$ | " | $(S, \{t\}, S, T_0)$ |
| $L_{1,t}$ | " | $(S, \{t\}, S, T_1)$. |

Alors

$$L_s = L_{0,s,t}(L_{0,t,t} \cup L_{1,t,t})^*(L_{0,t} \cup L_{1,t}) \cup L_{0,s}. \quad (1.30)$$

Pour voir que l'égalité ci-dessus est correcte notons que $L_{0,s,t}(L_{0,t,t} \cup L_{1,t,t})^*(L_{0,t} \cup L_{1,t})$ nous donne tous les mots de L_s qu'on peut reconnaître en passant par l'état t . On ajoute à cela $L_{0,s}$ car ce langage contient, entre autre, tous les mots de L_s qui sont reconnus sans passer par t . Comme d'autre part $L_{0,s} \subseteq L_s$, les parties gauche et droite de (1.30) sont égales.

D'après le lemme 1.12 appliqué à l'automate $(S, \{s\}, S, T)$, $\text{col}(p) \in \llbracket L_s \rrbracket$. Du lemme 1.11, de l'équation (1.30) et de l'inclusion $L_{0,s,t} \subseteq L_{0,s}$ on en déduit

$$\begin{aligned} \text{col}(p) &\in \llbracket L_{0,s,t} \rrbracket \cup L_{0,s,t} \llbracket (L_{0,t,t} \cup L_{1,t,t})^* (L_{0,t} \cup L_{1,t}) \rrbracket \cup \llbracket L_{0,s} \rrbracket \\ &= L_{0,s,t} \llbracket (L_{0,t,t} \cup L_{1,t,t})^* (L_{0,t} \cup L_{1,t}) \rrbracket \cup \llbracket L_{0,s} \rrbracket . \end{aligned} \quad (1.31)$$

Supposons tout d'abord $\text{col}(p) \in \llbracket L_{0,s} \rrbracket$. D'après le lemme 1.12 appliqué à l'automate $(S, \{s\}, S, T_0)$, on en déduit que p a la même couleur qu'une partie infinie de source s jouée dans l'arène \mathcal{A}_0 . Par optimalité de $\sigma_0^\#$ dans (\mathcal{A}_0, ϕ) , on en déduit (1.29).

Si $\text{col}(p) \notin \llbracket L_{0,s} \rrbracket$ alors d'après (1.31),

$$\exists u \in L_{0,s,t} \text{ tel que } \text{col}(p) \in u \llbracket (L_{0,t,t} \cup L_{1,t,t})^* (L_{0,t} \cup L_{1,t}) \rrbracket . \quad (1.32)$$

Mais

$$\begin{aligned} &(L_{0,t,t} \cup L_{1,t,t})^* (L_{0,t} \cup L_{1,t}) \\ &\sqsubseteq_\phi (L_{0,t,t} \cup L_{1,t,t})^* \cup L_{0,t} \cup L_{1,t} && \text{car } \phi \text{ est sélective} \\ &\sqsubseteq_\phi L_{0,t,t}^* \cup L_{1,t,t}^* \cup L_{0,t} \cup L_{1,t} && \text{car } \phi \text{ est séparante} \\ &\sqsubseteq_\phi L_{0,t} \cup L_{1,t} && \text{car } L_{i,t,t}^* \subseteq L_{i,t} \\ &\sqsubseteq_\phi L_{0,t} && \text{d'après (1.27).} \end{aligned}$$

Donc $\phi(\text{col}(p)) \leq \sup \phi(u \llbracket L_{0,t} \rrbracket) = \phi(\llbracket u L_{0,t} \rrbracket)$. Or $u \in L_{0,s,t}$ donc $u L_{0,t} \subseteq L_{0,s}$ donc $\phi(\text{col}(p)) \leq \sup \phi(\llbracket L_{0,s} \rrbracket)$. Or, d'après le lemme 1.12 et la définition de $L_{0,s}$, tout mot de $L_{0,s}$ est la couleur d'une partie infinie dans \mathcal{A}_0 issue de s . Par optimalité de $\sigma_0^\#$ dans (\mathcal{A}_0, ϕ) , on obtient (1.29). \square

Nous pouvons maintenant regrouper les résultats des propositions 1.16 et 1.17 :

Théorème 1.18. *Une fonction de paiement est positionnelle pour les jeux à un joueur si et seulement si elle est monotone, sélective et séparante.*

1.5.1.6 Fonctions préfixe-indépendantes

Parmi les fonctions de paiement les plus populaires, beaucoup sont préfixe-indépendantes au sens suivant.

Définition 1.19. Une fonction de paiement $\phi : C^\omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite préfixe-indépendante si pour tout mot fini $u \in C^*$ et pour tout mot infini $v \in C^\omega$, $\phi(uv) = \phi(v)$.

C'est le cas par exemple des fonctions de paiement correspondant aux jeux du paiement en moyenne, de parité, de la limite supérieure. Dans le cas où la fonction de paiement est préfixe-indépendante, le théorème 1.18 s'énonce plus simplement :

Corollaire 1.20. *Soit ϕ une fonction de paiement préfixe-indépendante. Alors ϕ est positionnelle pour les jeux à un joueur si et seulement si pour tous langages réguliers $M, N \in \text{Rec}(C)$,*

$$\sup \phi((M \cup N)^\omega) \leq \sup \phi(\llbracket M \rrbracket \cup \llbracket N \rrbracket \cup M^\omega \cup N^\omega). \quad (1.33)$$

Démonstration. Il est facile de voir qu'une fonction de paiement préfixe-indépendante est nécessairement monotone et sélective. D'après le théorème 1.18, ϕ est donc positionnelle pour les jeux à un joueur si et seulement si elle est séparante, c'est-à-dire si et seulement si, pour tous langages reconnaissables $M, N \in \text{Rec}(C)$,

$$(M \cup N)^* \sqsubseteq_{\phi} M^* \cup N^* . \quad (1.34)$$

Mais pour tout mot $u \in C^*$ nous avons

$$\begin{aligned} \phi(u \llbracket (M \cup N)^* \rrbracket) &= \phi(\llbracket (M \cup N)^* \rrbracket) = \\ &= \phi((M \cup N)^{\omega} \cup (M \cup N)^*(\llbracket M \rrbracket \cup \llbracket N \rrbracket)) = \\ &= \phi((M \cup N)^{\omega} \cup \llbracket M \rrbracket \cup \llbracket N \rrbracket) . \end{aligned} \quad (1.35)$$

où la première et la troisième égalités sont des conséquences de la préfixe-indépendance de ϕ et pour la seconde on applique le lemme 1.11.

D'autre part, en appliquant le lemme 1.11 et en utilisant la préfixe-indépendance de ϕ on obtient :

$$\begin{aligned} \phi(u \llbracket M^* \cup N^* \rrbracket) &= \phi(\llbracket M^* \cup N^* \rrbracket) = \\ &= \phi(M^{\omega} \cup N^{\omega} \cup M^* \llbracket M \rrbracket \cup N^* \llbracket N \rrbracket) = \phi(M^{\omega} \cup N^{\omega} \cup \llbracket M \rrbracket \cup \llbracket N \rrbracket) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Cette dernière équation et (1.34) montrent que (1.35) et (1.33) sont équivalentes, ce qui termine la preuve du corollaire. \square

1.5.2 Un théorème utilisable en pratique

Quand on se donne une fonction de paiement particulière, il n'est pas évident de tester si les conditions du théorème 1.18 sont vérifiées ou non. C'est pourquoi nous présentons maintenant un ensemble de conditions qui sont plus à faciles à tester et qui sont suffisantes pour qu'une fonction de paiement soit positionnelle.

Le théorème 1.21 donne explicitement des conditions qu'il suffit à une fonction de paiement de vérifier pour être positionnelle. Les corollaires 1.25 et 1.26 explicitent ces conditions dans le cas où la fonction de paiement est préfixe-indépendante ou continue. Ces deux corollaires nous serviront à plusieurs reprises, car il apparaît que la plupart des fonctions de paiement que nous serons amenés à considérer sont soit préfixe-indépendantes, soit continues.

1.5.2.1 Des conditions suffisantes

Théorème 1.21. *Soit ϕ une fonction de paiement sur C^{ω} . Supposons que ϕ vérifie les conditions suivantes :*

- (A) $\forall u \in C^*, \forall v_0, v_1 \in C^{\omega}, \quad \phi(v_0) \leq \phi(v_1) \implies \phi(uv_0) \leq \phi(uv_1),$
- (B) $\forall u \in C^+, \forall v \in C^{\omega}, \quad \phi(uv) \leq \max\{\phi(u^{\omega}), \phi(v)\},$
- (C) $\forall u_0, u_1, u_2, \dots \in C^+, \quad \phi(u_0u_1u_2 \dots) \leq \sup \phi(\{u_0, u_2, \dots\}^{\omega} \cup \{u_1, u_3, \dots\}^{\omega}).$

Alors ϕ est positionnelle pour les jeux à un joueur.

Nous allons d'abord démontrer quelques lemmes auxiliaires.

Lemme 1.22. Soit ϕ une fonction de paiement sur C^ω et $M, N \subseteq C^*$ deux langages sur C . Supposons que ϕ vérifie la condition (A) du théorème 1.21 et que $\sup \phi(\llbracket M \rrbracket) \leq \sup \phi(\llbracket N \rrbracket)$. Alors pour tout mot $u \in C^*$, $\sup \phi(u \llbracket M \rrbracket) \leq \sup \phi(u \llbracket N \rrbracket)$.

Démonstration. $\sup(\phi(\llbracket M \rrbracket)) \leq \sup(\phi(\llbracket N \rrbracket))$ si et seulement si

$$\forall w \in \llbracket M \rrbracket, \exists v \in \llbracket N \rrbracket, \quad \phi(w) \leq \phi(v) .$$

Mais la condition (A) du théorème 1.21 implique dans ce cas là que pour chaque $u \in C^*$,

$$\forall w \in \llbracket M \rrbracket, \exists v \in \llbracket N \rrbracket, \quad \phi(uw) \leq \phi(uv) ,$$

c'est-à-dire $\sup \phi(u \llbracket M \rrbracket) \leq \sup \phi(u \llbracket N \rrbracket)$. \square

Lemme 1.23. Soit ϕ une fonction de paiement vérifiant la condition (B) du théorème 1.21. Alors pour tous langages $M, K \subseteq C^*$ et $N \subseteq C^\omega$

$$\sup \phi((M \cup K)^* N) \leq \sup \phi(M^\omega \cup K^\omega \cup N) . \quad (1.37)$$

En particulier, (pour $K = \emptyset$) la condition (B) implique

$$\sup \phi(M^* N) \leq \sup \phi(M^\omega \cup N) .$$

Démonstration. Soit $u \in (M \cup K)^* N$. Alors il existe $v_0, \dots, v_k \in M \cup K$ et $w \in N$ tels que $u = v_0 \dots v_k w$. La condition (B) du théorème 1.21 implique que

$$\phi(u) \leq \max\{\phi(v_0^\omega), \dots, \phi(v_k^\omega), \phi(w)\} \leq \sup \phi(M^\omega \cup K^\omega \cup N) , \quad (1.38)$$

où la dernière inégalité est la conséquence du fait que $v_i^\omega \in M^\omega \cup K^\omega$ pour tout $0 \leq i \leq k$ et $w \in N$. Puisque (1.38) est vrai pour tout $u \in (M \cup K)^* N$, cela implique (1.37). \square

Lemme 1.24. Soit ϕ une fonction de paiement vérifiant les conditions (B) et (C) du théorème 1.21. Alors pour tous langages $M, N \subseteq C^*$,

$$\sup \phi((M \cup N)^\omega) \leq \sup \phi(M^\omega \cup N^\omega) .$$

Démonstration. Soit $u \in (M \cup N)^\omega$. Trois cas sont possibles :

- (1) $u \in (M \cup N)^*(M^\omega \cup N^\omega)$ ou
- (2) $u = v_0 v_1 v_2 \dots$, où $v_0, v_2, v_4, \dots \in M$ et $v_1, v_3, v_5, \dots \in N$
- (3) $u = v_0 v_1 v_2 \dots$, où $v_0, v_2, v_4, \dots \in N$ et $v_1, v_3, v_5, \dots \in M$.

Dans le premier cas $\phi(u) \leq \sup \phi(M^\omega \cup N^\omega)$ par le lemme 1.23. Dans le deuxième et troisième cas $\phi(u) \leq \sup \phi(M^\omega \cup N^\omega)$ par la condition (C) du théorème 1.21. \square

Démonstration du théorème 1.21. D'après le théorème 1.18 il suffit de démontrer qu'une fonction ϕ vérifiant les conditions (A)-(C) est monotone, sélective et séparante.

ϕ est monotone : Soit $M, N \in \text{Rec}(C)$. Sans perte de généralité on peut supposer que $\sup(\phi(\llbracket M \rrbracket)) \leq \sup(\phi(\llbracket N \rrbracket))$. Par le lemme 1.22 cela implique que $\sup(\phi(u\llbracket M \rrbracket)) \leq \sup(\phi(u\llbracket N \rrbracket))$ pour chaque $u \in C^*$, donc ϕ est monotone.

ϕ est sélective : D'après le lemme 1.23 $\sup(\phi(M^*\llbracket N \rrbracket)) \leq \sup(\phi(M^\omega \cup \llbracket N \rrbracket))$, ce qui implique par le lemme 1.22 que pour tout mot $u \in C^*$, $\sup(\phi(uM^*\llbracket N \rrbracket)) \leq \sup(\phi(u(M^\omega \cup \llbracket N \rrbracket)))$, c'est-à-dire $M^*\llbracket N \rrbracket \sqsubseteq_\phi M^\omega \cup \llbracket N \rrbracket$.

ϕ est séparante : D'après le lemme 1.11,

$$\llbracket (M \cup N)^* \rrbracket = (M \cup N)^\omega \cup (M \cup N)^*\llbracket M \rrbracket \cup (M \cup N)^*\llbracket N \rrbracket. \quad (1.39)$$

Or d'après le lemme 1.23,

$$\begin{aligned} \sup \phi((M \cup N)^*\llbracket M \rrbracket) &\leq \sup \phi(M^\omega \cup N^\omega \cup \llbracket M \rrbracket) \quad \text{et} \\ \sup \phi((M \cup N)^*\llbracket N \rrbracket) &\leq \sup \phi(M^\omega \cup N^\omega \cup \llbracket N \rrbracket), \end{aligned}$$

ce qui, avec (1.39) implique :

$$\sup \phi(\llbracket (M \cup N)^* \rrbracket) \leq \sup \phi((M \cup N)^\omega \cup \llbracket M \rrbracket \cup \llbracket N \rrbracket). \quad (1.40)$$

Or d'après le lemme 1.24,

$$\sup \phi((M \cup N)^\omega) \leq \sup \phi(M^\omega \cup N^\omega) .$$

Avec (1.40), cette dernière inégalité entraîne

$$\begin{aligned} \sup \phi(\llbracket (M \cup N)^* \rrbracket) &\leq \sup \phi(M^\omega \cup N^\omega \cup \llbracket M \rrbracket \cup \llbracket N \rrbracket) \\ &\leq \sup \phi(\llbracket M^* \rrbracket \cup \llbracket N^* \rrbracket) , \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du fait que $K^\omega \cup \llbracket K \rrbracket \subseteq \llbracket K^* \rrbracket$ pour chaque langage $K \subseteq C^*$. On en déduit par le lemme 1.22 que ϕ est séparante. \square

1.5.2.2 Fonctions de paiement préfixe-indépendantes

Dans le cas où la fonction de paiement est préfixe-indépendante les conditions (A) et (B) du théorème 1.21 sont toujours vérifiées et ce théorème se réduit au corollaire :

Corollaire 1.25. *Soit ϕ une fonction de paiement. Supposons que ϕ est préfixe-indépendante et qu'elle vérifie*

$$\forall u_0, u_1, \dots \in C^+, \quad \phi(u_0 u_1 \dots) \leq \sup \phi(\{u_0, u_2, \dots\}^\omega \cup \{u_1, u_3, \dots\}^\omega) . \quad (1.41)$$

Alors ϕ est positionnelle pour les jeux à un joueur.

Dans le troisième chapitre de cette thèse, on se penchera en particulier sur la classe des fonctions de paiements qui vérifie la condition proche de (1.41), et appelée condition de séparation :

$$\forall u_0, u_1, \dots \in C^+, \quad \phi(u_0 u_1 \dots) \leq \max \{ \phi(u_0 u_2 \dots), \phi(u_1 u_3 \dots) \} . \quad (1.42)$$

Le troisième chapitre a pour cadre les jeux stochastiques, et on montre dans ce cadre un résultat proche du corollaire 1.25 : le théorème 3.17 établit que toute fonction de paiement préfixe–indépendante et séparante est positionnelle pour les jeux stochastiques à un joueur. Nous postulons que ce résultat reste vrai sous les hypothèses plus faibles du corollaire 1.25.

1.5.2.3 Fonctions de paiement continues

L'ensemble C^ω peut être muni d'une structure d'espace métrique. La distance est définie par $\forall u = (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^\omega$ et $v = (d_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^\omega$,

$$d(u, v) = 2^{-\min\{n \in \mathbb{N} \mid c_n \neq d_n\}},$$

avec la convention $\min(\emptyset) = +\infty$. Dans le cas où $\phi : C^\omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est continue pour cette métrique, le théorème 1.21 se simplifie également :

Corollaire 1.26. *Soit ϕ une fonction de paiement. Supposons que ϕ est continue et qu'elle vérifie les conditions (A) et (B) du théorème 1.21, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} \forall u \in C^*, \forall v_0, v_1 \in C^\omega, \quad \phi(v_0) \leq \phi(v_1) &\implies \phi(uv_0) \leq \phi(uv_1). \\ \forall u \in C^+, \forall v \in C^\omega, \quad \phi(uv) &\leq \max\{\phi(u^\omega), \phi(v)\}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Alors ϕ est positionnelle pour les jeux à un joueur. De plus, pour toute suite $u_0, u_1, \dots \in C^+$, $\phi(u_0 u_1 \dots) \leq \sup\{\phi(u_n^\omega) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Démonstration. On montre que sous les hypothèses du corollaire 1.26,

$$\forall u_0, u_1, \dots \in C^*, \phi(u_0 u_1 \dots) \leq \sup\{\phi(u_0^\omega), \phi(u_1^\omega), \dots\}, \quad (1.44)$$

ce qui entraîne la condition (C) du théorème 1.21. Pour prouver (1.44), il suffit de noter que $u_0 u_1 \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} u_0 \dots u_n u_{n+1}^\omega$ et que d'après (1.43),

$$\phi(u_0 \dots u_n u_{n+1}^\omega) \leq \max\{\phi(u_0^\omega), \dots, \phi(u_n^\omega), \phi(u_{n+1}^\omega)\}.$$

□

1.6 Positionnalité des jeux — exemples

Dans cette section nous appliquons les résultats de la section précédente pour étudier la positionnalité des jeux introduits dans la section 1.3. Il apparaît que dans chaque cas où un de ces jeux est positionnel, il est facile de prouver qu'il vérifie soit les critères du théorème 1.21 soit les corollaires 1.25 et 1.26.

1.6.1 Jeux pour la vérification

Le jeu d'accessibilité est un cas particulier du jeu ϕ_{sup} , et le jeu de Büchi est cas particulier du jeu ϕ_{lsup} . Leur positionnalité sera établie dans la sous-sections suivantes. La positionnalité du jeu de parité est une conséquence des résultats de la section 1.7, toutefois nous en donnons ici une démonstration élémentaire. Rappelons la définition de ϕ_{parite} :

$$\text{pour } c_0c_1 \cdots \in \{0, \dots, d\}^\omega, \quad \sup \phi_{\text{parite}}(c_0c_1 \cdots) = (\limsup_n c_n) \bmod 2 .$$

Proposition 1.27. [Mos91, EJ91a, McN93] *Tout jeu de parité est positionnel.*

Démonstration. La fonction de paiement ϕ_{parite} est préfixe-indépendante, donc on peut utiliser le corollaire 1.25 pour prouver sa positionnalité pour les jeux à un joueur. On doit montrer que pour $u_0, u_1, \dots \in \{0, \dots, d\}^+$,

$$\phi_{\text{parite}}(u_0u_1 \cdots) \leq \phi_{\text{parite}}(\{u_0, u_2, \dots\}^\omega \cup \{u_1, u_3, \dots\}^\omega). \quad (1.45)$$

Si $u_0u_1 \cdots$ est de priorité paire, alors $\phi_{\text{parite}}(u_0u_1 \cdots) = 0$ et il n'y a rien à prouver. Si $u_0u_1 \cdots$ est de priorité impaire, alors à fortiori une des parties u_n^ω est de priorité impaire, et $\phi_{\text{parite}}(u_n^\omega) = 1 = \phi_{\text{parite}}(u_0u_1 \cdots)$, ce qui donne (1.45). D'après le théorème 1.8 et d'après la symétrie de la définition de ϕ_{parite} , cela implique que le jeu de parité est positionnel pour les jeux à deux joueurs. \square

Proposition 1.28. *Il existe un jeu de Müller à un joueur qui n'est pas positionnel.*

Donnons un exemple simple d'un jeu de Müller non positionnel. Considérons une arène composée d'un seul état sur lequel bouclent deux transitions, l'une étiquetée par 0 et l'autre par 1. Équipons cette arène de la condition de victoire $\mathcal{F} = \{\{0, 1\}\}$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$: pour gagner, le joueur Max doit voir une infinité de 0 et une infinité de 1. D'une part, Max possède une stratégie gagnante qui consiste à alterner entre les deux transitions disponibles, et d'autre part il existe seulement deux stratégies positionnelles, qui sont toutes deux perdantes, car elles engendrent des parties colorées soit par 0^ω soit par 1^ω .

Puisque d'après le théorème 1.21 une fonction de paiement est positionnelle si et seulement si elle est monotone, sélective et séparante, on sait que la condition de Müller ne vérifie pas une de ces propriétés. Il s'avère qu'elle n'est pas séparante : choisissons $M = \{0\}$ et $N = \{1\}$. Alors d'une part, $\llbracket M^* \rrbracket = 0^\omega$, $\llbracket N \rrbracket = 1^\omega$, donc toutes les parties de $\llbracket M^* \cup N^* \rrbracket$ sont perdantes, mais d'autre part $010101010 \cdots \in \llbracket (M \cup N)^* \rrbracket$ et cette suite est gagnante, ce qui prouve bien que la condition de Müller n'est pas séparante.

1.6.2 Jeux du supremum, de l'infimum et du compromis

Au chapitre 1.3, on a introduit les jeux du supremum, de l'infimum et du compromis. Rappelons que les fonctions de paiement sont définies comme suit. On fixe un ensemble

fini $C \subseteq \mathbb{R}$ et pour $c_0 c_1 \dots \in C^\omega$ et $\alpha, \beta \geq 0$,

$$\begin{aligned}\phi_{\text{sup}}(c_0 c_1 \dots) &= \sup_n c_n, \\ \phi_{\text{inf}}(c_0 c_1 \dots) &= \inf_n c_n, \\ \phi_{\text{lsup}}(c_0 c_1 \dots) &= \limsup_n c_n, \\ \phi_{\text{linf}}(c_0 c_1 \dots) &= \liminf_n c_n, \\ \phi_{\text{comp}}^{\alpha, \beta}(c_0 c_1 \dots) &= \alpha \cdot \limsup_n c_n + \beta \cdot \liminf_n c_n.\end{aligned}$$

Proposition 1.29. *Les fonctions de paiement $\phi_{\text{sup}}, \phi_{\text{inf}}, \phi_{\text{lsup}}, \phi_{\text{linf}}, \phi_{\text{comp}}$ sont positionnelles pour les jeux à deux joueurs.*

Démonstration. On prouve tout d'abord que les fonctions de paiements ϕ_{sup} et ϕ_{inf} sont positionnelles pour les jeux à un joueur. Pour cela, on prouve que ces fonctions vérifient les trois conditions du théorème 1.21. Remarquons que ces fonctions ne sont ni préfixe-indépendantes, ni continues, on ne peut donc pas utiliser les corollaires du théorème 1.21. Les conditions (A) et (B) sont directement impliquées par les égalités suivantes, valables pour tout $u \in C^+$ et $v \in C^\omega$,

$$\begin{aligned}\phi_{\text{sup}}(uv) &= \max\{\phi_{\text{sup}}(u^\omega), \phi_{\text{sup}}(v)\} \\ \phi_{\text{inf}}(uv) &= \min\{\phi_{\text{inf}}(u^\omega), \phi_{\text{inf}}(v)\}.\end{aligned}$$

Pour prouver (C), on remarque que pour $u_0, u_1, \dots \in C^+$,

$$\begin{aligned}\phi_{\text{sup}}(u_0 u_1 \dots) &= \max\{\phi_{\text{sup}}(u_0 u_2 \dots), \phi_{\text{sup}}(u_1 u_3 \dots)\} \\ \phi_{\text{inf}}(u_0 u_1 \dots) &= \min\{\phi_{\text{inf}}(u_0 u_2 \dots), \phi_{\text{inf}}(u_1 u_3 \dots)\}.\end{aligned}$$

Les fonctions ϕ_{sup} et ϕ_{inf} sont donc positionnelles pour les jeux à un joueur. Comme pour le jeu de parité, la symétrie de ces fonctions de paiement et le théorème 1.8 impliquent qu'elles sont également positionnelles pour les jeux à deux joueurs.

Prouvons maintenant que les fonctions de paiements $\phi_{\text{lsup}}, \phi_{\text{linf}}$ et $\phi_{\text{comp}}^{\alpha, \beta}$ sont positionnelles pour les jeux à un joueur. Puisque qu'elles sont préfixe-indépendantes, on peut utiliser le corollaire 1.25. La condition (1.41) est une conséquence directe des égalités suivantes, valables pour tout $u_0, u_1, \dots \in C^+$:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{lsup}}(u_0 u_1 u_2 \dots) &= \max\{\phi_{\text{lsup}}(u_0 u_2 \dots), \phi_{\text{lsup}}(u_1 u_3 \dots)\} \\ \phi_{\text{linf}}(u_0 u_1 u_2 \dots) &= \min\{\phi_{\text{linf}}(u_0 u_2 \dots), \phi_{\text{linf}}(u_1 u_3 \dots)\}\end{aligned}$$

□

Il existe une autre version du jeu de compromis, obtenu par combinaison linéaire des fonctions de paiement ϕ_{sup} et ϕ_{inf} :

$$\phi_{\text{comp}2} = \alpha \cdot \phi_{\text{sup}} + \beta \cdot \phi_{\text{inf}} .$$

| | | |
|----|-----|---|
| | s | |
| | 5 | |
| | t | |
| 5 | | 1 |
| | 0 | |
| -1 | | 0 |

FIG. 1.5 – Si l’origine de la partie est l’état s , la meilleure stratégie du joueur Max au jeu $\phi_{\text{comp2}}^{1,1}$ est de choisir la boucle de droite, pour gagner $5+0=5$, alors que si la partie débute en t , le joueur Max devrait choisir la boucle gauche, pour gagner $5-1=4$.

Proposition 1.30. *Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors la fonction de paiement $\phi_{\text{comp2}}^{\alpha,\beta}$ n’est pas positionnelle pour les jeux à un joueur.*

Démonstration. Nous allons montrer que la fonction $\phi = \phi_{\text{comp2}}^{1,1}$ n’est pas monotone. (Il est facile d’adapter cette démonstration pour d’autres valeurs α, β supérieures à zéro.)

Examinons l’arène donné par la figure 1.5. et choisissons $M = 5 \cdot -1 \cdot 0^*$ et $N = 1 \cdot 0 \cdot 0^*$. Alors d’une part $\sup \phi(\llbracket M \rrbracket) = \sup \phi(5 \cdot -1 \cdot 0^\omega) = 4 > 1 = \sup \phi(1 \cdot 0 \cdot 0^\omega) = \sup \phi(\llbracket N \rrbracket)$ mais d’autre part $\sup \phi(5 \cdot \llbracket M \rrbracket) = \sup \phi(5 \cdot 5 \cdot -1 \cdot 0^\omega) = 4 < 5 = \phi(5 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0^\omega) = \sup \phi(5 \cdot \llbracket N \rrbracket)$, ce qui prouve que ϕ n’est pas monotone. \square

1.6.3 Jeu total

Rappelons que ce jeu est joué sur une arène dont les transitions sont étiquetées par des réels $C \subseteq \mathbb{R}$, et que le joueur Max gagne la somme des valeurs vues pendant la partie. La fonction de paiement, dont les valeurs sont dans $\overline{\mathbb{R}}$ peut être définie comme :

$$\phi_{\text{total}}^{\overline{}}(c_0 c_1 \cdots) = \limsup_n \sum_{i=0}^n c_i$$

ou encore

$$\phi_{\text{total}}^{\underline{}}(c_0 c_1 \cdots) = \liminf_n \sum_{i=0}^n c_i .$$

Lemme 1.31. *Les fonctions $\phi_{\text{total}}^{\overline{}}$ et $\phi_{\text{total}}^{\underline{}}$ sont positionnelles pour les jeux à deux joueurs.*

Démonstration. On montre d'abord que ces deux fonctions sont positionnelles pour les jeux à un joueur. Dans ce qui suit ϕ désignera une des deux fonctions $\phi_{\overline{\text{total}}}$ ou $\phi_{\underline{\text{total}}}$. Pour tout mot $u \in C^+$, on note $\Sigma(u)$ la somme des éléments de la suite finie de réels u et $\Sigma(u[1, i])$ la somme des i premiers éléments de u . On veut montrer que ϕ vérifie les trois conditions (A), (B) et (C) du théorème 1.21. La remarque suivante est très utile : $\forall u \in C^+$ et $v \in C^\omega$,

$$\phi(uv) = \Sigma(u) + \phi(v) . \quad (1.46)$$

L'équation (1.46) montre que la condition (A) est vérifiée. D'autre part,

$$\begin{cases} \text{si } \Sigma(u) > 0 \text{ alors } \phi(u^\omega) = +\infty \text{ donc } \phi(uv) \leq \phi(u^\omega) \\ \text{si } \Sigma(u) = 0 \text{ alors } \phi(uv) = \phi(v) \text{ par (1.46)} \\ \text{si } \Sigma(u) < 0 \text{ alors } \phi(uv) \leq \phi(v) \text{ par (1.46),} \end{cases} \quad (1.47)$$

ce qui prouve que la condition (B) est également vérifiée. Enfin il reste à prouver la condition (C). Soit $u_0, u_1, u_2, \dots \in C^+$. Si $\sup_n \phi(u_n^\omega) = +\infty$ alors (C) est évidente. Seul le cas où $\sup_n \phi(u_n^\omega) < +\infty$ est intéressant. Dans ce cas

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Sigma(u_n) \leq 0 . \quad (1.48)$$

Supposons $\phi = \phi_{\overline{\text{total}}}$. Alors en groupant les termes dans la définition de $\phi_{\overline{\text{total}}}$,

$$\phi_{\overline{\text{total}}}(u_0 u_1 u_2 \dots) = \limsup_n \left(\Sigma(u_0) + \dots + \Sigma(u_{n-1}) + \max_{i \in \{1, \dots, |u_n|\}} \Sigma(u_n[1, i]) \right), \quad (1.49)$$

et d'après (1.48) cela implique,

$$\begin{aligned} \phi_{\overline{\text{total}}}(u_0 u_1 u_2 \dots) &\leq \limsup_n a_n \text{ où} \\ a_n &= \begin{cases} \Sigma(u_0) + \Sigma(u_2) + \dots + \Sigma(u_n) + \max_{i \in \{1, \dots, |u_{n+2}|\}} \Sigma(u_{n+2}[1, i]) \text{ si } n \text{ est pair,} \\ \Sigma(u_1) + \Sigma(u_3) + \dots + \Sigma(u_n) + \max_{i \in \{1, \dots, |u_{n+2}|\}} \Sigma(u_{n+2}[1, i]) \text{ si } n \text{ est impair,} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit bien la condition (C) du théorème 1.21 :

$$\begin{aligned} \phi_{\overline{\text{total}}}(u_0 u_1 u_2 \dots) &\leq \limsup_n a_n = \max \left\{ \limsup_n a_{2n}, \limsup_n a_{2n+1} \right\} \\ &= \max \left\{ \phi_{\overline{\text{total}}}(u_0 u_2 \dots), \phi_{\overline{\text{total}}}(u_1 u_3 \dots) \right\}, \end{aligned}$$

où la seconde égalité est une propriété de la limite supérieure. Si $\phi = \phi_{\underline{\text{total}}}$, alors on a, similairement à (1.49),

$$\phi_{\underline{\text{total}}}(u_0 u_1 u_2 \dots) = \liminf_n \left(\Sigma(u_0) + \dots + \Sigma(u_n) + \min_{i \in \{1, \dots, |u_{n+1}|\}} \Sigma(u_{n+1}[1, i]) \right),$$

et on conclut de manière similaire, en remarquant que

$$\liminf_n a_n = \min \left\{ \liminf_n a_{2n}, \liminf_n a_{2n+1} \right\}.$$

Ainsi $\phi_{\overline{\text{total}}}$ et $\phi_{\underline{\text{total}}}$ sont positionnelles pour les jeux à un joueur. Puisque ces deux fonctions sont l'opposée l'une de l'autre, le théorème 1.8 implique que ces deux fonctions de paiement sont positionnelles pour les jeux à deux joueurs. \square

1.6.4 Jeu multi-escompté

Dans la sous-section 1.3.3.2, nous avons défini la fonction de paiement multi-escompté de la manière suivante. Chaque transition est étiquetée par un couple $(\lambda, x) \in [0, 1[\times \mathbb{R}$, formé d'un taux d'escompte λ et d'un paiement immédiat x . Ainsi, C est un sous-ensemble fini de $[0, 1[\times \mathbb{R}$. La fonction de paiement est

$$\phi_{\text{mesc}}((\lambda_0, x_0)(\lambda_1, x_1) \cdots) = (1 - \lambda_0)x_0 + \lambda_0(1 - \lambda_1)x_1 + \lambda_0\lambda_1(1 - \lambda_2)x_2 + \cdots \quad (1.50)$$

Démontrons maintenant la positionnalité du jeu multi-escompté. Initialement, ce résultat a été démontré par Shapley dans [Sha53], en utilisant des techniques de point-fixe. La démonstration donnée ici, qui se base sur les théorèmes de la section 1.5, a l'avantage d'être constructive. De plus, elle permet d'établir au passage quelques propriétés qui nous seront utiles dans la section 1.8.

On étend la définition de ϕ_{mesc} à tout mot fini $u \in C^*$, en posant

$$\phi_{\text{mesc}}(u) = \phi_{\text{mesc}}(u \cdot (0, 0)^\omega) . \quad (1.51)$$

Pour tout mot fini $u = (\lambda_0, x_0) \dots (\lambda_n, x_n) \in C^*$, on pose $\lambda(u) = \lambda_0 \cdots \lambda_n$, et pour tout mot infini $u \in C^\omega$, on pose $\lambda(u) = 0$.

Proposition 1.32. *La fonction de paiement ϕ_{mesc} est positionnelle pour les jeux à deux joueurs. De plus, pour tout mot $u \in C^+$ et $v \in C^\omega$, et pour toute suite $u_0, u_1, \dots \in C^+$, on a*

$$\phi_{\text{mesc}}(u) = (1 - \lambda(u)) \cdot \phi_{\text{mesc}}(u^\omega), \quad (1.52)$$

$$\phi_{\text{mesc}}(uv) = \phi_{\text{mesc}}(u) + \lambda(u) \cdot \phi_{\text{mesc}}(v), \quad (1.53)$$

$$\phi_{\text{mesc}}(uv) = (1 - \lambda(u)) \cdot \phi_{\text{mesc}}(u^\omega) + \lambda(u) \cdot \phi_{\text{mesc}}(v), \quad (1.54)$$

$$\phi_{\text{mesc}}(u_0u_1 \cdots) \leq \sup \{ \phi_{\text{mesc}}(u_n^\omega) \mid n \in \mathbb{N} \} . \quad (1.55)$$

Démonstration. On démontre tout d'abord (1.52). Écrivons $u = (\lambda_0, x_0) \cdots (\lambda_{m-1}, x_{m-1}) \in C^+$.

$$\begin{aligned} \phi_{\text{mesc}}(u^\omega) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\lambda_{0[m]} \cdots \lambda_{(n-1)[m]} (1 - \lambda_{n[m]}) x_{n[m]} \right) \\ &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_0 \cdots \lambda_{m-1})^n \right) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_0 \cdots \lambda_{k-1} (1 - \lambda_k) x_k \right) \\ &= \frac{1}{1 - \lambda(u)} \phi_{\text{mesc}}(u) , \end{aligned}$$

où $i[m]$ signifie $i \bmod m$.

L'égalité (1.53) est une conséquence directe de la définition de ϕ_{mesc} , et (1.54) est une conséquence directe de (1.53) et (1.52).

Une remarque essentielle à propos du jeu ϕ_{mesc} consiste à établir que la fonction de paiement ϕ_{mesc} est continue de C^ω dans \mathbb{R} . Soit $u = (\lambda_0, x_0)(\lambda_1, x_1) \cdots$ et $v =$

$(\mu_0, y_0)(\mu_1, y_1) \cdots$ deux mots de C^ω dont les k premières lettres coïncident. Puisque C est fini, $\eta = \max\{\lambda \mid \exists x \in \mathbb{R}, (\lambda, x) \in C\} < 1$ et $a = \max\{|x|(1 - \lambda) \mid (\lambda, x) \in C\} < \infty$. Alors

$$|\phi_{\text{mesc}}(u) - \phi_{\text{mesc}}(v)| \leq 2\eta^k \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta^i a = 2\eta^k \frac{a}{1 - \eta} .$$

Quand k tend vers $+\infty$, le membre de droite de cette inégalité tend vers 0, ce qui prouve que ϕ_{mesc} est continue.

Pour montrer que ϕ_{mesc} est positionnelle pour les jeux à un joueur, on peut donc utiliser le corollaire 1.26. La propriété (1.26) est une conséquence directe de (1.53) et la propriété (1.43) est une conséquence directe de (1.54). Le corollaire 1.26 implique d'une part que ϕ_{mesc} est positionnelle et d'autre part que l'égalité (1.55) est vérifiée.

On sait donc que la fonction de paiement ϕ_{mesc} est positionnelle pour les jeux à un joueur. Par symétrie dans sa définition, c'est également le cas de la fonction opposée, donc le théorème 1.8 permet de conclure que ϕ_{mesc} est positionnelle pour les jeux à deux joueurs. \square

1.6.5 Jeu du paiement en moyenne

Le jeu du paiement en moyenne se joue dans des arènes dont les transitions sont étiquetées par des réels. Au jeu du paiement en moyenne, le paiement reçu par le joueur Max est égal à la moyenne de la suite infinie des valeurs vues au cours de la partie. Il existe principalement deux façons de définir cette valeur moyenne, selon qu'on regarde la limite supérieure ou inférieure des moyennes partielles. Cela définit deux fonctions de paiements différentes. Fixons $C \subseteq \mathbb{R}$, un ensemble fini de réels.

$$\forall u = c_0 c_1 \cdots \in C^\omega, \quad \begin{aligned} \phi_{\overline{\text{mean}}}(u) &= \limsup_n \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n c_i \\ \phi_{\underline{\text{mean}}}(u) &= \liminf_n \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n c_i . \end{aligned}$$

La positionnalité de ces deux fonctions de paiement a été initialement démontrée par Ehrenfeucht et Mycielski [EM79], et nous redémontrons ce résultat avec nos propres techniques.

Proposition 1.33. *Soit $C \subseteq \mathbb{R}$, fini. Les fonctions de paiement $\phi_{\overline{\text{mean}}}$ et $\phi_{\underline{\text{mean}}}$ sont positionnelles pour les jeux à deux joueurs. De plus, pour toute suite $u_0, u_1, \dots \in C^+$,*

$$\begin{aligned} \phi_{\overline{\text{mean}}}(u_0 u_1 \cdots) &\leq \max\{\phi_{\overline{\text{mean}}}(u_0 u_2 \cdots), \phi_{\overline{\text{mean}}}(u_1 u_3 \cdots)\} \\ \phi_{\underline{\text{mean}}}(u_0 u_1 \cdots) &\leq \sup\{\phi_{\underline{\text{mean}}}(u_n^\omega) \mid n \in \mathbb{N}\} . \end{aligned} \tag{1.56}$$

Démonstration. On prouve d'abord les inégalités (1.56). Soit $x = u_0 u_1 \cdots \in C^\omega$ où chaque $u_i \in C^+$. Nous notons $x_i \in C$ le i -ème élément de la suite x . La suite x est un mélange des mots $u_0 u_2 \cdots$ et $u_1 u_3 \cdots$, donc il existe une partition (I_0, I_1) de \mathbb{N} telle que $u_0 u_2 \cdots = (x_n)_{n \in I_0}$ et $u_1 u_3 \cdots = (x_n)_{n \in I_1}$. Posons $I_0^n = I_0 \cap \{0, \dots, n\}$ et $I_1^n = I_1 \cap \{0, \dots, n\}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i \in I_0^n} x_i + \sum_{i \in I_1^n} x_i \right) \text{ car } (I_0^n, I_1^n) \text{ est une partition de } \{0, \dots, n\} \\
 &= \frac{|I_0^n|}{n+1} \left(\frac{1}{|I_0^n|} \sum_{i \in I_0^n} x_i \right) + \frac{|I_1^n|}{n+1} \left(\frac{1}{|I_1^n|} \sum_{i \in I_1^n} x_i \right) \\
 &\leq \max \left\{ \frac{1}{|I_0^n|} \sum_{i \in I_0^n} x_i, \frac{1}{|I_1^n|} \sum_{i \in I_1^n} x_i \right\} \text{ (propriété des combinaisons convexes)}
 \end{aligned}$$

La propriété de combinaisons convexes évoquée pour la dernière inégalité est la propriété suivante. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ et x_1, \dots, x_k des réels tels que pour tout i , $\alpha_i \geq 0$ et tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$. Alors $\min_{1 \leq i \leq k} \{x_i\} \leq \alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_k \cdot x_k \leq \max_{1 \leq i \leq k} \{x_i\}$. Dans notre cas : $\alpha_1 = \frac{|I_0^n|}{n+1}$ et $\alpha_2 = \frac{|I_1^n|}{n+1}$.

En prenant la limite supérieure de cette dernière inégalité, on obtient bien la première ligne de (1.56).

D'autre part, puisque que $x = u_0 u_1 \dots$, il existe une suite d'entiers $0 = n_0 < n_1 < n_2 \dots$ telle que pour tout n , $u_i = x_{n_i} x_{n_i+1} \dots x_{n_{i+1}-1}$. Alors

$$\phi_{\underline{\text{mean}}}(u_0 u_1 \dots) = \liminf_n \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k \leq \liminf_i \frac{1}{n_i} \sum_{k=0}^{n_i-1} x_k.$$

Or, pour tout $j > 0$,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n_j} \sum_{i=0}^{n_j-1} x_i &= \frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} x_i \\
 &= \frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{j-1} (n_{k+1} - n_k) \phi_{\underline{\text{mean}}}(u_k^\omega) \\
 &= \sum_{k=0}^{j-1} \frac{n_{k+1} - n_k}{n_j} \phi_{\underline{\text{mean}}}(u_k^\omega) \\
 &\leq \max \left\{ \phi_{\underline{\text{mean}}}(u_0^\omega), \dots, \phi_{\underline{\text{mean}}}(u_{j-1}^\omega) \right\}
 \end{aligned}$$

où pour la dernière inégalité nous utilisons encore une fois la propriété des combinaisons convexes évoquée précédemment. On obtient bien la deuxième partie de (1.56).

L'équation (1.56) prouve que les hypothèses du corollaire 1.25 sont vérifiées aussi bien pour $\phi_{\underline{\text{mean}}}$ que pour $\phi_{\overline{\text{mean}}}$. On en déduit que les jeux du paiement en moyenne à un joueur sont positionnels. Le théorème 1.8 permet de conclure que les jeux du paiement en moyenne à deux joueurs sont positionnels, ce qui achève la preuve de cette proposition. \square

1.7 Génération de nouvelles fonctions de paiement positionnelles

En partant des fonctions de paiement positionnelles présentées dans la section précédente, on peut générer à volonté de nouvelles fonctions de paiement positionnelles, en utilisant plusieurs opérations : la binarisation et l'approximation présentées dans la sous-section 1.7.1 et le produit prioritaire, présenté dans la sous-section 1.7.2. En utilisant ces opérations, on obtient ainsi une famille très diverse de fonctions de paiement positionnelles inédites, qui peuvent être utilisées comme spécification dans des problèmes de synthèse de contrôleurs optimaux (section 1.7.3).

1.7.1 Binarisation et approximation

La *binarisation* transforme une fonction de paiement en condition de victoire.

Proposition 1.34. *Soit ϕ une fonction de paiement. Supposons ϕ positionnelle pour les jeux à un joueur, alors les fonctions $\mathbf{1}_{\{\phi>0\}}$ et $\mathbf{1}_{\{\phi\geq 0\}}$ sont également positionnelles pour les jeux à un joueur⁴. Supposons ϕ positionnelle pour les jeux à deux joueurs. Alors les fonctions $\mathbf{1}_{\{\phi>0\}}$, $\mathbf{1}_{\{\phi\geq 0\}}$, $\mathbf{1}_{\{\phi<0\}}$ et $\mathbf{1}_{\{\phi\leq 0\}}$ sont également positionnelles pour les jeux à deux joueurs.*

Démonstration. Une stratégie optimale pour Max dans le jeu (\mathcal{A}, ϕ) est optimale pour Max dans les jeux $(\mathcal{A}, \mathbf{1}_{\{\phi\geq 0\}})$ et $(\mathcal{A}, \mathbf{1}_{\{\phi>0\}})$. Une stratégie optimale pour Max dans le jeu $(\mathcal{A}, -\phi)$ est optimale pour Max dans les jeux $(\mathcal{A}, \mathbf{1}_{\{\phi\leq 0\}})$ et $(\mathcal{A}, \mathbf{1}_{\{\phi<0\}})$. \square

En fait, ce procédé de binarisation est un cas particulier d'un procédé d'approximation d'une fonction de paiement, décrit par la proposition suivante.

Proposition 1.35. *Soit ϕ une fonction de paiement et $f : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction croissante. La composition des fonctions $f \circ \phi$ est appelée une approximation de ϕ . Si ϕ est positionnelle pour les jeux à un joueur (resp. à deux joueurs) alors son approximation $f \circ \phi$ l'est également.*

Démonstration. Une stratégie optimale pour Max dans le jeu (\mathcal{A}, ϕ) est optimale pour Max dans le jeu $(\mathcal{A}, f \circ \phi)$. \square

Dans cette thèse, nous avons décidé de décrire les différents jeux étudiés via des fonctions de paiement. Toutefois, un autre formalisme consiste à décrire les préférences des joueurs par des préordres sur l'ensemble des parties infinies [Owe82], formalisme que nous avons utilisé dans l'article [GZ05]. Pour l'utilisation que l'on en fait dans cette thèse, nous estimons que les quelques gains de généralité obtenus en utilisant ce formalisme n'aurait pas compensé les pertes de clarté occasionnée par l'abandon d'une notion aussi intuitive que celle de fonction de paiement.

⁴ $\mathbf{1}_\alpha$ où α est une condition sur C^ω désigne la fonction indicatrice de la condition α , pour $x \in C^\omega$, $\mathbf{1}_\alpha(x) = 1$ si α est satisfaite et 0 sinon.

Dans ce formalisme des préordres de préférence, l'opération d'approximation correspond simplement à un quotient de préordre. Dans ce cas, il est clair qu'un couple de stratégies optimales pour le préordre initial restent optimales pour le préordre quotient. Ainsi, le seul effet de cette opération de quotient est de faire apparaître de nouvelles stratégies optimales. Ce procédé de quotient des préférences ne permet pas vraiment de faire apparaître de nouveaux types de jeux.

1.7.2 Produit prioritaire

Nous présentons maintenant le produit prioritaire. C'est une opération binaire entre fonctions de paiement. Si ϕ_0 et ϕ_1 sont deux fonctions de paiement définies sur des alphabets C_0 et C_1 respectivement alors leur produit prioritaire est $\phi = \phi_0 \triangleright \phi_1$ est défini sur l'alphabet $C = C_0 \cup C_1$. Un mot infini u sur C peut être de deux types. Soit il possède un nombre infini de lettres de C_0 , et dans ce cas la valeur de $\phi(u)$ est calculée en projetant u sur C_0^ω et en appliquant ϕ_0 à cette projection. Dans le cas contraire, u possède un nombre infini de lettres dans C_1 et pour calculer $\phi(u)$ on projette u sur C_1 et on applique ϕ_1 . Formellement :

Définition 1.36. Soit ϕ_0 et ϕ_1 deux fonctions de paiement sur des ensembles finis de couleurs C_0 et C_1 respectivement. Alors le produit prioritaire de ϕ_0 et ϕ_1 , noté $\phi_0 \triangleright \phi_1$, est la fonction de paiement sur l'ensemble fini de couleurs $C_0 \cup C_1$, définie comme suit. Pour $i \in \{0, 1\}$, on note $\pi_i : C_0 \cup C_1 \rightarrow C_i \cup \{\epsilon\}$ la fonction

$$\pi_i(c) = \begin{cases} c & \text{si } c \in C_i \\ \epsilon & \text{sinon, où } \epsilon \text{ est le mot vide.} \end{cases}$$

La fonction π_i s'étend naturellement en une projection $\pi_i : (C_0 \cup C_1)^\omega \rightarrow C_i^\infty$ des mots infinis sur $C_0 \cup C_1$ vers les mots finis ou infinis sur l'alphabet C_i . On pose, pour $u \in (C_0 \cup C_1)^\omega$,

$$(\phi_0 \triangleright \phi_1)(u) = \begin{cases} \phi_0(\pi_0(u)) & \text{si } \pi_0(u) \text{ est infini,} \\ \phi_1(\pi_1(u)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 1.37. Le produit \triangleright est associatif, donc pour ϕ_0, \dots, ϕ_d des fonctions de paiement, on peut noter $\phi_0 \triangleright \phi_1 \triangleright \dots \triangleright \phi_d$ le produit prioritaire de ces fonctions de paiement. Évidemment, \triangleright n'est pas commutatif.

Un premier exemple de produit prioritaire est donné par le jeu de parité. Pour chaque priorité $c \in \{0, \dots, d\}$, posons ϕ_c la fonction de paiement sur $\{c\}^\omega$ constante et égale à 0 si c est pair et égale à 1 si c est impair. Alors

$$\phi_{\text{parite}} = \phi_d \triangleright \phi_{d-1} \triangleright \dots \triangleright \phi_0 .$$

Un exemple un peu plus général est obtenu quand ϕ_c est une fonction constante à valeur quelconque sur l'alphabet $\{c\}$. Alors on obtient le jeu prioritaire, qui généralise le jeu de parité.

Un autre exemple encore plus général est celui du jeu du paiement en moyenne prioritaire. Pour $c \in \{0, \dots, d\}$, soit ϕ_c la fonction de paiement sur $(\{c\} \times \mathbb{R})^\omega$ obtenu en oubliant la première composante c et en appliquant $\phi_{\overline{\text{mean}}}$. Alors

$$\phi_{\overline{\text{mean}}} = \phi_d \triangleright \dots \triangleright \phi_0 .$$

L'intérêt du produit prioritaire apparaît dans le théorème suivant :

Théorème 1.38. *Soit ϕ_0 et ϕ_1 deux fonctions de paiement préfixes–indépendantes et positionnelles pour les jeux à un joueur. Alors $\phi_0 \triangleright \phi_1$ est positionnelle pour les jeux à un joueur.*

Avant de passer à la preuve de ce théorème, remarquons qu'il a les deux corollaires suivants. La conjonction des théorèmes 1.8 et 1.38 donne :

Corollaire 1.39. *Soit ϕ_0, \dots, ϕ_d des fonctions de paiement préfixes–indépendantes et positionnelles pour les jeux à deux joueurs. Alors $\phi_0 \triangleright \dots \triangleright \phi_d$ est également positionnelle pour les jeux à deux joueurs.*

En particulier, en appliquant ce corollaire à l'exemple 1.37 on obtient le résultat suivant, qui nous sera utile dans la prochaine section.

Corollaire 1.40. *Le jeu du paiement en moyenne prioritaire est positionnel.*

La preuve du théorème 1.38 est basée sur le corollaire 1.20 de caractérisation des fonctions de paiement positionnelles et préfixes–indépendantes. On utilisera également le lemme suivant :

Lemme 1.41. *Soit C un ensemble fini de couleurs, $D \subset C$ un sous-ensemble strict non-vide de C , $\pi : C^\omega \rightarrow D^\omega$ la projection des mots infinis sur C vers les mots finis ou infinis sur D et $L \subseteq C^*$. Alors $(\pi(L))^\omega = \pi(L^\omega) \cap D^\omega$. Supposons de plus que $L \in \text{Rec}(C)$ est reconnaissable. Alors $\llbracket \pi(L) \rrbracket = \pi(\llbracket L \rrbracket) \cap D^\omega$.*

Démonstration. L'égalité $\pi(L^\omega) = (\pi(L))^\omega$ s'obtient sans problème. L'inclusion $\pi(\llbracket L \rrbracket) \cap D^\omega \subseteq \llbracket \pi(L) \rrbracket$ est vraie, pour L un sous ensemble quelconque de C^ω . En effet, si chacun des préfixes d'un mot $u \in C^\omega$ est préfixe d'un mot de L , alors chacun des préfixes de $\pi(u)$ est préfixe d'un mot de $\pi(L)$.

Le plus difficile consiste à prouver que $\llbracket \pi(L) \rrbracket \subseteq \pi(\llbracket L \rrbracket)$, pour L un langage reconnaissable sur C . Soit $\mathcal{A} = (S, i, F, T)$ un automate fini sur C co-accessible reconnaissant L . Soit $\mathcal{B} = (S, i, F', T')$ l'automate sur D obtenu à partir de \mathcal{A} en modifiant F et T de la façon suivante. Pour $s \in S$, on pose $s \in F'$ si et seulement si il existe un chemin fini p dans \mathcal{A} de source s et de cible un état final $t \in F$ tel que $\pi(\text{col}(p)) = \epsilon$. Pour $c \in D$ et $s, t \in S$, on pose

$$(s, c, t) \in T' \iff$$

il existe un chemin fini p dans \mathcal{A} de source s et de cible t tel que $\pi(\text{col}(p)) = c$.

D'après la définition de T' , pour tout $s, t \in S$ et $u \in D^*$, on montre par induction sur la longueur de u que :

$$\begin{aligned} & \text{Il existe un chemin } p' \text{ de } s \text{ à } t \text{ dans } \mathcal{B} \text{ tel que } \text{col}(p') = u \\ & \iff \text{il existe un chemin } p \text{ de } s \text{ à } t \text{ dans } \mathcal{A} \text{ tel que } \pi(\text{col}(p)) = u . \end{aligned} \quad (1.57)$$

En appliquant (1.57) avec l'état initial $s = i$ et les états finaux $t \in F'$, on obtient que \mathcal{B} reconnaît le langage $\pi(L)$. De plus, puisque \mathcal{A} est co-accessible, \mathcal{B} est co-accessible. D'après le lemme 1.12, on en déduit

$$\begin{aligned} \llbracket \pi(L) \rrbracket &= \{ \text{col}(p') \mid p' \text{ est un chemin infini dans } \mathcal{B} \text{ de source } i. \} \\ &\subseteq \{ \pi(\text{col}(p)) \mid p \text{ est un chemin infini dans } \mathcal{A} \text{ de source } i. \} \\ &= \pi(\{ \text{col}(p) \mid p \text{ est un chemin dans } \mathcal{A} \text{ de source } i. \}) \\ &= \pi(\llbracket L \rrbracket) . \end{aligned}$$

L'inclusion est par définition de T' , et la troisième égalité s'obtient en appliquant le lemme 1.12 à l'automate co-accessible \mathcal{A} . \square

Démonstration du théorème 1.38. Soit ϕ_0 et ϕ_1 deux fonctions de paiement sur les alphabets C_0 et C_1 respectivement, et $\phi = \phi_0 \triangleright \phi_1$. Puisque ϕ_0, ϕ_1 sont préfixe-indépendantes, il est facile de voir que ϕ est également préfixe-indépendante. D'après le corollaire 1.20 ϕ est positionnelle pour les jeux à un joueur si et seulement si, pour tous langages reconnaissables $M, N \in \text{Rec}(C)$,

$$\forall w \in (M \cup N)^\omega, \quad \phi(w) \leq \sup \phi(\llbracket M \rrbracket \cup \llbracket N \rrbracket \cup M^\omega \cup N^\omega) . \quad (1.58)$$

Soit $w \in (M \cup N)^\omega$.

Le premier cas que nous considérons est celui où $\pi_0(w)$ est infini.

Par définition de \triangleright , on a

$$\phi(w) = \phi_0(\pi_0(w)) \in \phi_0(\pi_0(M) \cup \pi_0(N))^\omega . \quad (1.59)$$

Puisque M et N sont reconnaissables, leurs projections $\pi_0(M)$ et $\pi_0(N)$ le sont également. Appliquons le corollaire 1.20 à la fonction de paiement ϕ_0 et aux langages $\pi_0(M)$ et $\pi_0(N)$. On obtient

$$\begin{aligned} \sup \phi_0((\pi_0(M) \cup \pi_0(N))^\omega) &\leq \sup \phi_0(\llbracket \pi_0(M) \rrbracket \cup \llbracket \pi_0(N) \rrbracket \cup (\pi_0(M))^\omega \cup (\pi_0(N))^\omega) \\ &= \sup \phi_0(\pi_0(\llbracket M \rrbracket \cup \llbracket N \rrbracket \cup M^\omega \cup N^\omega) \cap C_0^\omega) \\ &\leq \sup \phi(\llbracket M \rrbracket \cup \llbracket N \rrbracket \cup M^\omega \cup N^\omega) . \end{aligned}$$

L'égalité est une conséquence du lemme 1.41. L'inégalité s'obtient en remarquant que par définition du produit prioritaire, pour tout mot $w' \in (C_0 \cup C_1)^\omega$ tel que $\pi_0(w') \in C_0^\omega$, on a $\phi(w') = \phi_0(\pi_0(w'))$. Cette dernière équation et (1.59) donnent bien (1.58), dans le cas où $\pi_0(w)$ est infini.

Considérons maintenant le cas où $\pi_0(w) = \epsilon$. Cela signifie que $w \in (C_1 \setminus C_0)^\omega$. Soit $C = C_1 \setminus C_0$. Alors

$$w \in ((M \cap C^*) \cup (N \cap C^*))^\omega . \quad (1.60)$$

D'autre part, comme M et N sont reconnaissables, $M \cap C^*$ et $N \cap C^*$ le sont aussi et on peut appliquer le corollaire 1.20 :

$$\begin{aligned} \sup \phi(((M \cap C^*) \cup (N \cap C^*))^\omega) &\leq \sup \phi(\llbracket M \cap C^* \rrbracket \cup \llbracket N \cap C^* \rrbracket \cup (M \cap C^*)^\omega \cup (N \cap C^*)^\omega) \\ &\leq \sup \phi(\llbracket M \rrbracket \cup \llbracket N \rrbracket \cup M^\omega \cup N^\omega) . \end{aligned}$$

Avec (1.60), on obtient bien (1.58) dans le cas où $\pi_0(w)$ est le mot vide.

Il reste à traiter le cas où $\pi_0(w)$ est un mot fini. Dans ce cas, il existe un suffixe $w' \in (C_1 \setminus C_0)^\omega$ de w tel que $\phi(w) = \phi(w')$ et on est ramené au cas précédent.

Finalement, on a prouvé que (1.58) est vérifiée dans tous les cas, ce qui termine la preuve de ce théorème. \square

1.7.3 Une grande famille de fonctions de paiements positionnelles

Considérons la famille \mathcal{F} des fonctions de paiement sur C^ω obtenue en partant des fonctions de paiement ϕ_{mean} , ϕ_{mean} et $\phi_{\text{comp}}^{\alpha, \beta}$, et en appliquant les opérations d'approximation et de produit prioritaire. Comme ϕ_{mean} , ϕ_{mean} et $\phi_{\text{comp}}^{\alpha, \beta}$ sont positionnelles et préfixes-indépendantes, les résultats de ce chapitre impliquent que toute fonction $\phi \in \mathcal{F}$ est également positionnelle et préfixe-indépendante.

On peut montrer que pour toute fonction de paiement $\phi \in \mathcal{F}$ et tout mot ultimement périodique u , la valeur $\phi(u)$ est calculable en temps polynomial. Comme on l'a expliqué dans l'introduction de ce chapitre, cela implique qu'il existe un algorithme naïf qui permet de calculer les valeurs de tout jeu $G = (\mathcal{A}, \phi)$, ainsi qu'un couple de stratégies optimales. Cet algorithme est de complexité exponentielle en la taille de \mathcal{A} .

Pour les jeux à un joueur muni du paiement ϕ_{mean} , il existe un algorithme de complexité polynomiale, basé sur la programmation linéaire. Cela entraîne une question naturelle : est ce que les valeurs et/ou les stratégies optimales positionnelles des jeux à un joueur munis d'une fonction de paiement de la famille \mathcal{F} sont calculables en temps polynomial ? Cette question reste ouverte.

Considérons un système à événements discrets, dont l'efficacité est évaluée par une fonction de paiement $\phi \in \mathcal{F}$. Alors d'après les remarques précédentes, on peut calculer en temps exponentiel un contrôleur optimal du système à événements discrets. Ainsi, du point de vue du contrôle quantitatif, \mathcal{F} est un langage de spécification décidable.

1.8 Le jeu du paiement en moyenne prioritaire : un cas limite des jeux multi-escomptés

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux relations entre les jeux multi-escomptés et le jeu du paiement en moyenne prioritaire. Nous montrons que les jeux du paiement en moyenne prioritaire sont des cas limites des jeux multi-escomptés, quand les taux d'escomptes tendent vers 0.

1.8. Le jeu du paiement en moyenne prioritaire : un cas limite des jeux multi-escomptés

Dans la section 1.8.1, on explique en quoi nos résultats fusionnent et généralisent à la fois un des résultats centraux de la théorie des jeux, et des résultats plus récents de de Alfaro, Henzinger et Majumdar. Dans la section 1.8.2, on montre que si l'on fait tendre successivement les taux d'escompte d'un jeu multi-escompté vers 0, alors les valeurs de ce jeu tendent vers les valeurs du jeu du paiement en moyenne prioritaire (cf. théorème 1.43). Dans la section 1.8.3, on montre que ce résultat subsiste si les différents taux d'escompte tendent simultanément vers 0, à différentes vitesses.

Nous fixons maintenant les notations pour ce chapitre et nous détaillons les relations entre le jeu du paiement en moyenne prioritaire et les jeux multi-escomptés.

Le jeu du paiement en moyenne prioritaire a été introduit dans la section 1.3.3.3, et nous rappelons brièvement sa définition. Ce jeu se joue sur une arène colorée par un ensemble fini $C \subseteq \{0, \dots, d\} \times \mathbb{R}$, et pour $u = (c_0, x_0)(c_1, x_1) \cdots \in C^\omega$, la valeur de la fonction de paiement correspondante est :

$$\phi_{\text{meanp}}(u) = \phi_{\text{mean}}(x_{i_0} x_{i_1} \cdots) \quad \text{où} \quad \{i_0 < i_1 < \dots\} = \{i \in \mathbb{N} \mid c_i = \limsup_n c_n\} . \quad (1.61)$$

En d'autres termes, la fonction ϕ_{meanp} est le produit prioritaire de d fonctions de paiement en moyenne ϕ_{mean} (cf. section 1.7.2).

Dans l'équation (1.61), si ϕ_{mean} désigne $\phi_{\overline{\text{mean}}}$ alors ϕ_{meanp} est notée $\phi_{\overline{\text{meanp}}}$ et si ϕ_{mean} désigne $\phi_{\underline{\text{mean}}}$ alors ϕ_{meanp} est notée $\phi_{\underline{\text{meanp}}}$. Le théorème 1.43 montre que cette distinction n'est pas cruciale.

Nous avons introduit le jeu multi-escompté dans la section 1.3.3.2, nous rappelons ici sa définition, en modifiant légèrement les notations. Ce changement de notation permet de considérer les taux d'escomptes $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ comme des variables. Nous considérons dans ce chapitre qu'un jeu multi-escompté se joue sur une arène \mathcal{A} colorée par un ensemble fini

$$C \subseteq \{0, \dots, d\} \times \mathbb{R} .$$

Cette arène est équipée d'une fonction de paiement

$$\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)} : C^\omega \rightarrow \mathbb{R} ,$$

paramétrée par un d -uplet de taux d'escomptes

$$\lambda : \{0, \dots, d\} \rightarrow [0, 1[.$$

On utilisera souvent la notation vectorielle λ_c pour désigner la valeur $\lambda(c) \in [0, 1[$. La fonction de paiement $\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}$ associée à $u = (c_0, x_0)(c_1, x_1) \cdots$ la valeur :

$$\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_{c_0} \lambda_{c_1} \cdots \lambda_{c_{n-1}} (1 - \lambda_{c_n}) x_n .$$

D'après le corollaire 1.40 et la proposition 1.32, les fonctions ϕ_{meanp} et $\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}$ sont positionnelles pour les jeux à deux joueurs. Cela entraîne en particulier que tout état

s d'une arène \mathcal{A} colorée par C a une valeur aux jeux $(\mathcal{A}, \phi_{\text{meanp}})$ et $(\mathcal{A}, \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)})$. Le théorème 1.43 que nous présentons dans la section 1.8.2 établit que la valeur de s au jeu $(\mathcal{A}, \phi_{\text{meanp}})$ est la limite de ses valeurs aux jeu $(\mathcal{A}, \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)})$, quand $\lambda_0, \dots, \lambda_d$ tendent *successivement* vers 1. Le théorème 1.52 présenté dans la section 1.8.3 établit que ce résultat est toujours vrai quand $\lambda_0, \dots, \lambda_d$ tendent *simultanément* vers 1, à des vitesses différentes.

1.8.1 Fusion et généralisation de deux résultats classiques

Nos résultats unifient et généralisent un résultat classique de la théorie des jeux, qui établit que le jeu du paiement en moyenne est une limite du jeu escompté, et des travaux plus récents de de Alfaro, Henzinger et Majumdar [dAHM03].

Le jeu du paiement en moyenne comme limite du jeu escompté. Dans la section 1.3 nous avons présenté les jeux escomptés et les jeux du paiement en moyenne. Ces jeux se jouent tous deux dans des arènes dont les transitions sont étiquetées par un ensemble fini $C \subseteq \mathbb{R}$ de réels appelés des paiements quotidiens

Les jeux escomptés sont un cas particulier des jeux multi-escomptés, quand on ne considère qu'un seul taux d'escompte $0 \leq \lambda < 1$. Pour $u = c_0 c_1 \dots \in C^\omega$, la valeur de u au jeu escompté est

$$\phi_{\text{disc}}^{(\lambda)}(u) = (1 - \lambda) \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n c_n .$$

Dans un jeu du paiement en moyenne, le joueur Max reçoit la moyenne des paiements quotidiens vus au cours de la partie. C'est un cas particulier du jeu du paiement en moyenne prioritaire, avec une seule priorité. Le paiement peut être naturellement défini de deux manières différentes :

$$\forall c_0 c_1 \dots \in C^\omega, \begin{cases} \phi_{\overline{\text{mean}}}(c_0 c_1 \dots) = \limsup_n \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n c_i \\ \phi_{\underline{\text{mean}}}(c_0 c_1 \dots) = \liminf_n \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n c_i . \end{cases}$$

Un des résultats majeurs de la théorie des jeux stochastiques établit que la valeur d'un jeu du paiement en moyenne est la limite des valeurs des jeux escomptés, quand le taux d'escompte tend vers 1 [MN81, FV97]. Dans le cas particulier des jeux déterministes⁵ ce résultat s'énonce de façon suivante :

Théorème 1.42. [MN81, FV97] *Soit \mathcal{A} une arène colorée par $C \subseteq \mathbb{R}$. Alors les jeux $(\mathcal{A}, \phi_{\overline{\text{mean}}})$ et $(\mathcal{A}, \phi_{\underline{\text{mean}}})$ ont même valeur et*

$$\text{val}(\mathcal{A}, \phi_{\text{mean}}) = \lim_{\lambda \uparrow 1} \text{val}(\mathcal{A}, \phi_{\text{esc}}^{(\lambda)}) .$$

⁵En fait, dans le cas des jeux déterministes ce résultat est très facile à démontrer directement, par contre le cas général des jeux stochastique nécessite des outils très avancés en théorie des jeux, probabilités, analyse complexe et en géométrie algébrique réelle.

Le μ -calcul escompté de de Alfaro, Henzinger et Majumdar. Des travaux récents de de Alfaro, Henzinger et Majumdar [dAHM03] présentent les jeux de parité comme des limites appropriés de jeux multi-escomptés. Plutôt que s'exprimer en termes de jeux, les auteurs de [dAHM03] ont choisi d'utiliser le langage du μ -calcul. Les modèles de ce μ -calcul sont les arènes de jeux stochastiques concurrents, ce qui est plus général que notre cadre de travail, mais on se restreint ici à les interpréter sur des arènes déterministes à information parfaite.

Nous ne donnerons pas la définition formelle des μ -calcul classiques et escomptés, le lecteur intéressé pourra se référer à [Wil01] pour une présentation du μ -calcul classique et [dAHM03] pour le μ -calcul escompté. Donnons tout de même une idée intuitive des différences et points communs entre ces deux μ -calculs. Une formule du μ -calcul classique ayant une variable libre s'évalue comme un opérateur *monotone* sur les sous-ensembles d'états de l'arène. Le μ -calcul classique possède deux opérateurs $\mu.x$ et $\nu.x$ qui permettent de clore une telle formule en calculant le plus petit ou le plus grand point fixe de l'opérateur correspondant. Ce mécanisme peut être itéré et en général une formule de μ -calcul s'évalue en calculant une succession de plus petits et plus grands points fixes imbriqués.

Dans le μ -calcul escompté, chaque variable libre est associée à un taux d'escompte $0 \leq \lambda < 1$, et une formule dotée d'une variable libre s'interprète comme un opérateur *contractant* sur les distributions de valeurs $S \rightarrow [0, 1]$, où S est l'ensemble des états de l'arène. On dispose d'un unique opérateur de point fixe $\lambda.x$, qui permet de clore une formule en calculant l'unique point fixe de l'opérateur contractant correspondant. Comme dans le μ -calcul classique, ce mécanisme peut être itéré et une formule de μ -calcul escompté s'évalue en calculant une succession de points fixes uniques imbriqués.

Le μ -calcul escompté semble différer radicalement du μ -calcul classique. En effet, une formule close s'interprète non pas comme un ensemble d'états mais comme une fonction $S \rightarrow [0, 1]$ qui associe une valeur réelle à chaque état. De plus, l'évaluation d'une formule du μ -calcul escompté varie en fonction de la valeur des taux d'escompte $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ associés aux variables x_0, \dots, x_n de la formule.

En fait, [dAHM03] montre qu'on peut établir un lien entre μ -calcul classique et μ -calcul escompté. Ils montrent que pour certaines formules closes du μ -calcul escompté, si l'on fait tendre les valeurs des taux d'escompte vers 1, alors la valeur de la formule de μ -calcul escompté tend vers la valeur de cette formule interprétée dans le μ -calcul classique. Pour interpréter une formule de μ -calcul escompté comme une formule de μ -calcul classique, on substitue aux opérateurs de point fixe contractant $\lambda.x$ des opérateurs de plus petit ou plus grand point fixe $\mu.x$ ou $\nu.x$.

Les liens entre le μ -calcul classique et les jeux de parité sont bien connus depuis le papier [EJ91b], et il est naturel de se demander comment interpréter ce résultat en terme de jeux. Cette interprétation permet de clarifier la signification des résultats et d'en obtenir une généralisation intéressante.

Le μ -calcul escompté correspond aux jeux munis de la fonction de paiement suivante. Les couleurs sont des priorités, $\{0, \dots, d\}$, et à chaque priorité $c \in \{0, \dots, d\}$ est

associée un taux d'escompte $0 \leq \lambda_c < 1$. La fonction de gain est définie par :

$$\phi(c_0 c_1 \cdots) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_{c_0} \cdots \lambda_{c_{n-1}} (1 - \lambda_{c_n}) x_n \quad (1.62)$$

où

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si la priorité } c_n \text{ est impaire,} \\ 1 & \text{si la priorité } c_n \text{ est paire.} \end{cases} \quad (1.63)$$

Le résultat de De Alfaro et al. se traduit de la manière suivante. Pour toute arène \mathcal{A} et pour tout état s de cette arène,

$$\lim_{\lambda_0 \uparrow 1} \cdots \lim_{\lambda_n \uparrow 1} \text{val}(\mathcal{A}, \phi)(s) = \text{val}(\mathcal{A}, \phi_{\text{parite}})(s). \quad (1.64)$$

Ainsi, pour tout jeu de parité, on peut construire un jeu multi-escompté tel que la valeur du jeu de parité est la limite des valeurs du jeu multi-escompté quand les probabilités d'arrêt tendent successivement vers 0.

La classe des formules de μ -calcul escompté étudiée par [dAHM03] correspond à étudier la classe des fonctions de paiement (1.62) avec les restrictions (1.63). Toutefois, de la façon dont nous avons présenté ce résultat, il semble naturel de se demander ce qui se passe si l'on n'impose plus la limitation (1.63).

Il apparaît que si l'on considère l'équation (1.64) pour des valeurs de x_n quelconques, non soumise à la restriction (1.63), alors on a toujours convergence de la partie gauche de (1.64). De plus, la limite de la valeur du jeu multi-escompté lorsque les probabilités d'arrêt tendent successivement vers 0 est le jeu *du paiement en moyenne prioritaire*. Nous établissons ces résultats dans le théorème 1.43.

Ce résultat généralise donc les résultats de [dAHM03] dans le cadre des jeux non-stochastiques.

1.8.2 Limites successives du jeu multi-escompté

Le but de cette section est d'établir le résultat suivant.

Théorème 1.43. *Soit \mathcal{A} une arène finie à deux joueurs colorée par $C \subseteq \{0, \dots\} \times \mathbb{R}$. Alors les jeux $(\mathcal{A}, \overline{\phi_{\text{meanp}}})$ et $(\mathcal{A}, \underline{\phi_{\text{meanp}}})$ ont même valeur et :*

$$\text{val}(\mathcal{A}, \overline{\phi_{\text{meanp}}}) = \lim_{\lambda_d \uparrow 1} \dots \lim_{\lambda_0 \uparrow 1} \text{val}(\mathcal{A}, \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}) .$$

Pour prouver ce théorème, on introduit une famille de fonctions de paiements auxiliaires $\phi^{(\lambda), e}$ où $e \in \{-1, 0, \dots, d\}$, dont les fonctions de paiement $\overline{\phi_{\text{meanp}}}$ et $\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}$ sont deux extrêmes.

Afin de définir les fonctions de paiement $\phi^{(\lambda), e}$, $e \in \{-1, 0, \dots, d\}$, on introduit quelques notations supplémentaires.

On pose

$$\lambda(u) = \begin{cases} \prod_{i=0}^n \lambda(e_i) & \text{si } u = (e_0, x_0) \cdots (e_n, x_n) \in C^*. \\ 0 & \text{si } u \in C^\omega \text{ est un mot infini,} \\ 1 & \text{si } u = \epsilon \text{ est le mot vide.} \end{cases}$$

Pour tout mot fini ou infini $u = (e_0, x_0)(e_1, x_1) \cdots \in C^\infty$ et tout entier $e \in \{-1, 0, \dots, d\}$, on note $u[> e]$ le mot fini ou infini obtenu à partir de u en effaçant les lettres (f, x) telles que $f \leq e$, c'est-à-dire

$$u[> e] = \pi_{>e}(u) \quad \text{où} \quad \pi_{>e}((f, x)) = \begin{cases} (f, x) & \text{si } f > e, \\ \epsilon & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1.44. Pour toute priorité $e \in \{-1, \dots, d\}$ et tout mot $u \in C^\omega$, le paiement $\phi^{(\lambda),e}(u)$ est définie par :

$$\phi^{(\lambda),e}(u) = \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(u[> e]) + \lambda(u[> e]) \cdot \phi_{\text{meanp}}(u) . \quad (1.65)$$

Notons tout de suite que si $e = -1$ alors pour tout $u \in C^\omega$, $u[> -1] = u$ et, puisque u est infini, $\lambda(u) = 0$. Donc

$$\phi^{(\lambda),-1} = \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)} .$$

Dans le cas où $u[> e] = \epsilon$ dans la formule ci-dessus alors $\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(u[> e]) = 0$ et $\lambda(u[> e]) = 1$. Or pour tout $u \in C^\omega$, $u[> d] = \epsilon$, ce qui montre que

$$\phi^{(\lambda),d} = \phi_{\text{meanp}} .$$

Notre but principal dans cette sous-section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.45. *Les fonctions de paiement $\phi^{(\lambda),e}$, $-1 \leq e \leq d$, sont toutes positionnelles. Soit \mathcal{A} une arène finie étiquetée par C , s un état de \mathcal{A} et $e \in \{-1, 0, \dots, d\}$. Alors*

$$\lim_{\lambda_{e+1} \uparrow 1} \text{val}(\mathcal{A}, \phi^{(\lambda),e})(s) = \text{val}(\mathcal{A}, \phi^{(\lambda),e+1})(s) . \quad (1.66)$$

Évidemment le théorème 1.43 découle directement du théorème 1.45. Le lemme suivant généralise la formule (1.53) de la proposition 1.32 :

Lemme 1.46.

$$\forall u \in C^+, \forall v \in C^\omega, \quad \phi^{(\lambda),e}(uv) = \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(u[> e]) + \lambda(u[> e])\phi^{(\lambda),e}(v) . \quad (1.67)$$

Démonstration. En effet, par définition de $\phi^{(\lambda),e}$,

$$\phi^{(\lambda),e}(uv) = \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}((uv)[> e]) + \lambda((uv)[> e])\phi_{\text{meanp}}(uv). \quad (1.68)$$

D'une part, puisque $(uv)[> e] = u[> e]v[> e]$, on a par (1.53),

$$\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}((uv)[> e]) = \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(u[> e]) + \lambda(u[> e])\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(v[> e]). \quad (1.69)$$

D'autre part, $\lambda(uv) = \lambda(u)\lambda(v)$ et ϕ_{meanp} est préfixe-indépendante donc

$$\lambda((uv)[> e])\phi_{\text{meanp}}(uv) = \lambda(u[> e])\lambda(v[> e])\phi_{\text{meanp}}(v). \quad (1.70)$$

En substituant (1.69) et (1.70) dans (1.68), on obtient l'égalité annoncée. \square

Lemme 1.47. Pour tout $e \in \{-1, 0, \dots, d-1\}$ et $\forall u \in C^*$ et $\forall v \in C^+$,

$$\lim_{\lambda_{e+1} \uparrow 1} \phi^{(\lambda),e}(uv^\omega) = \phi^{(\lambda),e+1}(uv^\omega) . \quad (1.71)$$

Démonstration. Prouvons d'abord que pour tout mot fini $w \in C^*$,

$$\lim_{\lambda_{e+1} \uparrow 1} \lambda(w[> e]) = \lambda(w[> e+1]) \quad (1.72)$$

et

$$\lim_{\lambda_{e+1} \uparrow 1} \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(w[> e]) = \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(w[> e+1]) . \quad (1.73)$$

Soit $w = (e_0, x_0) \cdots (e_n, x_n) \in C^+$. Alors

$$\lambda(w[> e]) = \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ e_i > e}} \lambda(e_i) \xrightarrow{\lambda_{e+1} \uparrow 1} \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ e_i > e+1}} \lambda(e_i) = \lambda(w[> e+1]) ,$$

ce qui montre (1.72).

D'autre part, nous avons

$$\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(w[> e]) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ e_i > e}} (1 - \lambda(e_i)) \left(\prod_{0 \leq j < i; e_j > e} \lambda(e_j) \right) x_i .$$

Dans cette somme, tous les termes indexés par i tels que $e_i = e+1$ tendent vers 0 quand λ_{e+1} tend vers 1, donc on obtient (1.73).

Maintenant nous allons démontrer que pour tout mot fini $v \in C^+$,

$$\lim_{\lambda_{e+1} \uparrow 1} \phi^{(\lambda),e}(v^\omega) = \phi^{(\lambda),e+1}(v^\omega) . \quad (1.74)$$

Soit $v = (e_0, x_0) \cdots (e_n, x_n) \in C^+$ et $f = \max\{e_0, \dots, e_n\}$ la priorité de v^ω .

Pour démontrer (1.74) nous allons considérer trois cas.

Cas (i) : $e+1 < f$. Puisque v possède au moins une lettre de priorité f et que $f > e$, le mot $v[> e]$ est non vide, donc $v^\omega[> e]$ est un mot infini. Alors $\lambda(v^\omega[> e]) = 0$ et par définition de $\phi^{(\lambda),e}$ on a

$$\phi^{(\lambda),e}(v^\omega) = \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}((v[> e])^\omega) = \frac{1}{1 - \lambda(v[> e])} \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(v[> e]) \quad (1.75)$$

où la dernière égalité est une conséquence de (1.52).

Comme $e+1 < f$ et que le mot v possède au moins une lettre de priorité f alors $v[> e+1] \neq \epsilon$ et

$$\lambda(v[> e+1]) < 1. \quad (1.76)$$

1.8. Le jeu du paiement en moyenne prioritaire : un cas limite des jeux
multi-escomptés

Finalement,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_{e+1} \uparrow 1} \phi^{(\lambda),e}(v^\omega) &= \frac{1}{1 - \lambda(v[> e + 1])} \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(v[> e + 1]) \quad \text{d'après (1.75), (1.72), (1.73) et (1.76)} \\ &= \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(v^\omega[> e + 1]) \quad \text{d'après (1.52)} \\ &= \phi^{(\lambda),e+1}(v^\omega), \end{aligned}$$

cette dernière égalité étant obtenue similairement à (1.75). Ceci termine la démonstration de (1.74) dans le cas (i).

Cas (ii) : $e + 1 = f$. Dans ce cas, $v[> e] \neq \epsilon$ donc $\lambda(v[> e]) < 1$ et $\lambda(v^\omega[> e]) = 0$ et les mêmes égalités (1.75) sont valables que dans le cas (i). Soit $i_0 < \dots < i_k$ les indices $i \in \{0 \dots n\}$ tels que $e_i = f = e + 1$. Alors $v[> e] = (f, x_{i_0}) \cdots (f, x_{i_k})$, donc $\lambda(v[> e]) = \lambda_f^{k+1}$ et

$$\begin{aligned} \phi^{(\lambda),e}(v^\omega) &= \frac{1}{1 - \lambda_f^{k+1}} \sum_{j=0}^k \lambda_f^j (1 - \lambda_f) \cdot x_{i_j} = \frac{1 - \lambda_f}{1 - \lambda_f^{k+1}} \sum_{j=0}^k \lambda_f^j \cdot x_{i_j} \\ &= \frac{1}{1 + \lambda_f + \dots + \lambda_f^{k+1}} \sum_{j=0}^k \lambda_f^j \cdot x_{i_j} \xrightarrow{\lambda_f \uparrow 1} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k x_{i_j} \\ &= \phi_{\text{mean}}(\pi_f(v^\omega)) = \phi_{\text{meanp}}(v^\omega) \quad \text{car } v \text{ est de priorité } f \\ &= \phi^{(\lambda),e+1}(v^\omega), \end{aligned}$$

cette dernière égalité étant obtenue par définition de $\phi^{(\lambda),e+1}$ et car $v^\omega[> e + 1] = \epsilon$. On obtient bien (1.74).

Cas (iii) : $e \geq f$. Dans ce cas, $v^\omega[> e] = \epsilon$ donc par définition de $\phi^{(\lambda),e}$,

$$\phi^{(\lambda),e}(v^\omega) = \phi_{\text{meanp}}(v^\omega) = \phi^{(\lambda),e+1}(v^\omega),$$

cette dernière égalité étant obtenue par définition de $\phi^{(\lambda),e+1}$ et car $v^\omega[> e + 1] = \epsilon$. Ceci donne bien (1.74).

Pour terminer la démonstration du lemme 1.47 prenons $u \in C^*$ et $v \in C^+$.

On se ramène au cas $u = \epsilon$. En appliquant le lemme 1.46 nous obtenons

$$\phi^{(\lambda),e}(uv^\omega) = \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(u[> e]) + \lambda(u[> e])\phi^{(\lambda),e}(v^\omega) .$$

Avec (1.72), (1.73) et (1.74) on en déduit :

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_e \uparrow 1} \phi^{(\lambda),e}(uv^\omega) &= \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(u[> e + 1]) + \lambda(u[> e + 1])\phi^{(\lambda),e+1}(v^\omega) \\ &= \phi^{(\lambda),e+1}(uv^\omega) \quad \text{par (1.67),} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de l'égalité (1.71) et du lemme 1.47. □

Lemme 1.48. *Pour tout $u \in C^+$ et $v \in C^\omega$,*

$$\phi^{(\lambda),e}(uv) = (1 - \lambda(u[> e])) \cdot \phi^{(\lambda),e}(u^\omega) + \lambda(u[> e]) \cdot \phi^{(\lambda),e}(v) . \quad (1.77)$$

Démonstration. Par le lemme 1.46

$$\phi^{(\lambda),e}(uv) = \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(u[> e]) + \lambda(u[> e])\phi^{(\lambda),e}(v) . \quad (1.78)$$

Mais le même lemme 1.46 donne aussi

$$\phi^{(\lambda),e}(u^\omega) = \phi^{(\lambda),e}(uu^\omega) = \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(u[> e]) + \lambda(u[> e])\phi^{(\lambda),e}(u^\omega) ,$$

c'est-à-dire

$$\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(u[> e]) = (1 - \lambda(u[> e]))\phi^{(\lambda),e}(u^\omega) .$$

Avec (1.78) on obtient bien (1.77). □

Proposition 1.49. *Les fonctions de paiement $\phi^{(\lambda),e}$, $e \in \{-1, 0, \dots, d\}$, sont positionnelles pour les jeux à deux joueurs.*

Démonstration. Comme $\phi^{(\lambda),-1} = \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}$, on sait déjà par la proposition 1.32 que $\phi^{(\lambda),-1}$ est positionnelle pour les jeux à deux joueurs. De même, la positionnalité de $\phi^{(\lambda),d} = \phi_{\text{meanp}}$ est établie par le corollaire 1.40.

Montrons maintenant que pour $e \in \{0, \dots, d-1\}$, le paiement $\phi^{(\lambda),e}$ est positionnel pour les jeux à un joueur. Il suffit de prouver que le paiement $\phi^{(\lambda),e}$ vérifie les trois conditions

$$\forall u \in C^*, \forall v_0, v_1 \in C^\omega, \quad \phi(v_0) \leq \phi(v_1) \implies \phi(uv_0) \leq \phi(uv_1) \quad (\text{A})$$

$$\forall u \in C^+, \forall v \in C^\omega, \quad \phi(uv) \leq \max\{\phi(u^\omega), \phi(v)\} \quad (\text{B})$$

$$\forall u_0, u_1, \dots \in C^+, \quad \phi(u_0u_1 \dots) \leq \sup \phi(\{u_0, u_2, \dots\}^\omega \cup \{u_1, u_3, \dots\}^\omega) \quad (\text{C})$$

du théorème 1.21.

Notons d'abord que (1.53) est une conséquence immédiate du lemme 1.46 et (B) est une conséquence immédiate du lemme 1.48 qui établit que $\phi^{(\lambda),e}(uv)$ est une combinaison convexe de $\phi^{(\lambda),e}(u^\omega)$ et $\phi^{(\lambda),e}(v)$.

Il reste à prouver que pour tout $e \in \{-1, \dots, d\}$, $\phi^{(\lambda),e}$ vérifie (C). Soit $u_0, u_1, \dots \in C^+$ et soit $f, g \in \{0, \dots, d\}$ les priorités respectives des mots $u_0u_2 \dots$ et $u_1u_3 \dots$. On considère deux cas.

Premier cas : $\max\{f, g\} > e$. Dans ce cas, le mot $u_0[> e]u_1[> e] \dots$ est infini, donc $\lambda(u_0[> e]u_1[> e] \dots) = 0$ et

$$\begin{aligned} \phi^{(\lambda),e}(u_0u_1 \dots) &= \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}(u_0[> e]u_1[> e] \dots) && \text{par définition de } \phi^{(\lambda),e} \\ &\leq \sup \left\{ \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda)}((u_n[> e])^\omega) \mid n \in \mathbb{N}, u_n[> e] \neq \epsilon \right\} && \text{d'après (1.55)} \\ &= \sup \left\{ \phi^{(\lambda),e}(u_n^\omega) \mid n \in \mathbb{N}, u_n[> e] \neq \epsilon \right\} && \text{par définition de } \phi^{(\lambda),e} \\ &\leq \sup \left\{ \phi^{(\lambda),e}(u_n^\omega) \mid n \in \mathbb{N} \right\} , \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de la condition (C) dans ce cas.

1.8. Le jeu du paiement en moyenne prioritaire : un cas limite des jeux multi-escomptés

Second cas : $\max\{f, g\} \leq e$. On se ramène tout d'abord au cas où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n[> e] = \epsilon$. Puisque $\max\{f, g\} \leq e$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n[> e] \neq \epsilon\}$ est fini, soit N son maximum. En appliquant le lemme 1.48 plusieurs fois, on déduit que $\phi^{(\lambda),e}(u_0 u_1 \dots)$ est une combinaison convexe des valeurs

$$\left\{ \phi^{(\lambda),e}(u_n^\omega) \mid n \leq N, u_n[> e] \neq \epsilon \right\} \cup \left\{ \phi^{(\lambda),e}(u_{N+1} u_{N+2} \dots) \right\}.$$

Cela prouve que

$$\phi^{(\lambda),e}(u_0 u_1 \dots) \leq \max\{\phi^{(\lambda),e}(u_0^\omega), \dots, \phi^{(\lambda),e}(u_N^\omega), \phi^{(\lambda),e}(u_{N+1} u_{N+2} \dots)\}. \quad (1.79)$$

Puisque pour tout $n \geq N + 1$, $u_n[> e] = \epsilon$, il suffit donc maintenant de prouver (C) dans le cas où

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n[> e] = \epsilon. \quad (1.80)$$

Dans ce cas, on a par définition de $\phi^{(\lambda),e}$,

$$\phi^{(\lambda),e}(u_0 u_1 \dots) = \phi_{\text{meanp}}(u_0 u_1 \dots). \quad (1.81)$$

Soit

$$h = \max\{f, g\}.$$

Ces deux dernières équations impliquent :

$$\phi^{(\lambda),e}(u_0 u_1 \dots) = \phi_{\text{mean}}(\pi_h(u_0) \pi_h(u_1) \dots). \quad (1.82)$$

On distingue entre les cas où $h = f > g$, $f < g = h$ et $f = g = h$.

Dans le premier cas, il existe un nombre fini d'indices impairs $2n + 1$ tels que $\pi_h(u_{2n+1}) \neq \epsilon$. Par préfixe-indépendance de ϕ_{mean} , cela implique

$$\phi_{\text{mean}}(\pi_h(u_0) \pi_h(u_1) \pi_h(u_2) \dots) = \phi_{\text{mean}}(\pi_h(u_0) \pi_h(u_2) \pi_h(u_4) \dots).$$

Avec (1.82), on obtient :

$$\begin{aligned} \phi^{(\lambda),e}(u_0 u_1 \dots) &= \phi_{\text{mean}}(\pi_h(u_0) \pi_h(u_2) \pi_h(u_4) \dots) \\ &= \phi_{\text{meanp}}(u_0 u_2 \dots) && \text{car la priorité de } u_0 u_2 \dots \text{ est } h = f \\ &= \phi^{(\lambda),e}(u_0 u_2 \dots) && \text{car } (u_0 u_2 \dots)[> e] = \epsilon \text{ par (1.80),} \end{aligned}$$

ce qui implique (C).

Le cas où $f < g = h$ est similaire.

Si $f = g = h$, alors d'après (1.82) et la proposition 1.33,

$$\begin{aligned} &\phi^{(\lambda),e}(u_0 u_1 u_2 \dots) = \phi_{\text{mean}}(\pi_h(u_0) \pi_h(u_1) \pi_h(u_2) \dots) \\ &= \begin{cases} \leq \max\{\phi_{\text{mean}}(\pi_h(u_0) \pi_h(u_2) \dots), \phi_{\text{mean}}(\pi_h(u_1) \pi_h(u_3) \dots)\} & \text{si } \phi_{\text{mean}} = \overline{\phi_{\text{mean}}} , \\ \leq \sup\{\phi_{\text{mean}}((\pi_h(u_n))^\omega) \mid n \in \mathbb{N}\} & \text{si } \phi_{\text{mean}} = \underline{\phi_{\text{mean}}} . \end{cases} \end{aligned}$$

Cette dernière distinction vient du fait que ϕ_{mean} est une notation qui désigne soit la fonction de paiement $\underline{\phi_{\text{mean}}}$ soit la fonction de paiement $\overline{\phi_{\text{mean}}}$. Dans les deux cas cela implique que les fonctions $\phi^{(\lambda),e}$ vérifient la condition (C). Cela achève la preuve de positionnalité de $\phi^{(\lambda),e}$ pour les jeux à un joueur. Par symétrie, $-\phi^{(\lambda),e}$ est aussi positionnelle pour les jeux à un joueur, donc par le théorème 1.8 la fonction $\phi^{(\lambda),e}$ est positionnelle pour les jeux à deux joueurs. Cela achève la preuve de la proposition 1.49. \square

Lemme 1.50. *Soit ϕ une fonction de paiement positionnelle pour les jeux à deux joueurs et $(\sigma^\#, \tau^\#)$ un couple de stratégies positionnelles pour les joueurs Max et Min dans un jeu $G = (\mathcal{A}, \phi)$. Supposons que $\sigma^\#$ et $\tau^\#$ sont optimales au jeu G dans la classe des stratégies positionnelles, c'est-à-dire, pour toutes stratégies positionnelles (σ, τ) ,*

$$\phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma, \tau^\#)) \leq \phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma^\#, \tau^\#)) \leq \phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma^\#, \tau)) .$$

Alors $\sigma^\#$ et $\tau^\#$ sont optimales au jeu G .

Démonstration. Prouvons par exemple que sous les hypothèses du lemme, $\sigma^\#$ est optimale. Par symétrie, on en déduit que $\tau^\#$ est également optimale.

Notons $\mathcal{A}[\tau^\#]$ l'arène à un joueur obtenue à partir de \mathcal{A} en restreignant les mouvements du joueur Min à ceux autorisés par sa stratégie positionnelle $\tau^\#$. Par hypothèse, ϕ est positionnelle donc Max possède une stratégie positionnelle σ' optimale au jeu $(\mathcal{A}[\tau^\#], \phi)$. Soit σ une stratégie quelconque du joueur Max et s un état de \mathcal{A} . Alors

$$\begin{aligned} \phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma, \tau^\#)) &= \phi(p_{\mathcal{A}[\tau^\#]}(s, \sigma)) && \text{par déf. de } \mathcal{A}[\tau^\#] \\ &\leq \phi(p_{\mathcal{A}[\tau^\#]}(s, \sigma')) && \text{par optimalité de } \sigma' \text{ dans } (\mathcal{A}[\tau^\#], \phi) \\ &= \phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma', \tau^\#)) && \text{par déf. de } \mathcal{A}[\tau^\#] \\ &\leq \phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma^\#, \tau^\#)) && \text{car } \sigma' \text{ est pos. et par hypothèse.} \end{aligned}$$

Cela prouve que $\sigma^\#$ est optimale au jeu G . \square

Proposition 1.51. *Soit C un alphabet de couleurs, $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de paiement sur C^ω et ϕ une fonction de paiement sur C^ω . Supposons que ϕ ainsi que chacune des fonctions ϕ_n sont positionnelles pour les jeux à deux joueurs. Supposons également que pour tout mot ultimement périodique uv^ω , $\phi(uv^\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(uv^\omega)$. Alors pour tout état s d'une arène fini \mathcal{A} colorée par C ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{val}(\mathcal{A}, \phi_n)(s) = \text{val}(\mathcal{A}, \phi)(s) . \quad (1.83)$$

Démonstration. Soit \mathcal{A} une arène colorée par C . Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $\sigma_n^\#, \tau_n^\#$ des stratégies positionnelles optimales pour le joueur Max et Min au jeu (\mathcal{A}, ϕ_n) .

Supposons tout d'abord que la suite $(\sigma_n^\#, \tau_n^\#)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à un couple $(\sigma^\#, \tau^\#)$, et montrons que dans ce cas

$$\sigma^\# \text{ et } \tau^\# \text{ sont optimales pour le jeu } (\mathcal{A}, \phi) \text{ et } \text{val}(\mathcal{A}, \phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{val}(\mathcal{A}, \phi_n). \quad (1.84)$$

D'après le lemme 1.50, il suffit de montrer que $(\sigma^\#, \tau^\#)$ est optimale dans la classe des stratégies positionnelles. Soit τ une stratégie positionnelle. Alors puisque dans une arène finie, une partie consistante avec des stratégies positionnelles est ultimement périodique, on a par hypothèse :

$$\begin{aligned} \phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma^\#, \tau)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma^\#, \tau)) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma^\#, \tau^\#)) \\ &= \phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma^\#, \tau^\#)) . \end{aligned}$$

L'inégalité vient du fait que $\sigma^\#$ et $\tau^\#$ sont optimales au jeu (\mathcal{A}, ϕ_n) . Cela montre que $\tau^\#$ est optimale pour le jeu (\mathcal{A}, ϕ) . Par symétrie, on en déduit que $\sigma^\#$ est également optimale pour ce jeu. Cela entraîne

$$\begin{aligned} \text{val}(\mathcal{A}, \phi)(s) &= \phi(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma^\#, \tau^\#)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(p_{\mathcal{A}}(s, \sigma^\#, \tau^\#)) && \text{par hypothèse} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{val}(\mathcal{A}, \phi_n)(s) && \text{car } (\sigma^\#, \tau^\#) = (\sigma_n^\#, \tau_n^\#) . \end{aligned}$$

On obtient bien (1.84).

Considérons maintenant le cas général. Puisqu'il y a un nombre fini de couples de stratégies positionnelles, la suite $(\sigma_n^\#, \tau_n^\#)_{n \in \mathbb{N}}$ prend un nombre fini de valeurs différentes. Il existe donc un entier $N \in \mathbb{N}$ et une partition (N_1, \dots, N_k) de $\{N, N+1, \dots\}$ tel que pour $i \in \{1, \dots, k\}$, N_i est infini et la suite $(\sigma_n^\#, \tau_n^\#)_{n \in N_i}$ est constante. Clairement, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, la suite $(\phi_n)_{n \in N_i}$ vérifie les hypothèses du théorème. D'après (1.84), on en déduit que

$$\text{val}(\mathcal{A}, \phi) = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in N_i} \text{val}(\mathcal{A}, \phi_n) .$$

Comme (N_1, \dots, N_k) est une partition de $\{N, N+1, \dots\}$, on en déduit que $\text{val}(\mathcal{A}, \phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{val}(\mathcal{A}, \phi_n)$, ce qui termine la preuve. \square

On peut maintenant terminer la

Démonstration du théorème 1.45. La positionnalité a été démontrée dans la proposition 1.49. La deuxième assertion du théorème découle du lemme 1.47 et de la proposition 1.51. \square

1.8.3 Limites simultanées du jeu multi-escompté

Dans la section précédente, on a montré que si l'on fait successivement tendre les probabilités d'arrêt du jeu multi-escompté vers 0, les valeurs des états du jeu tendent vers leurs valeurs dans le jeu du paiement en moyenne prioritaire. Cela reste vrai si les différentes probabilités d'arrêt tendent vers 0 simultanément, la vitesse de convergence augmentant avec la priorité.

Théorème 1.52. Soit $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions, $\beta_n : \{0, \dots, d\} \rightarrow [0, 1[$, telle que

- pour toute priorité $e \in \{0, \dots, d\}$,

$$\beta_n(e) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (1.85)$$

- pour toute priorité $e \in \{0, \dots, d-1\}$,

$$\beta_n(e) = \underset{n \rightarrow \infty}{o}(\beta_n(e+1)) \ . \quad (1.86)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $e \in \{0, \dots, d\}$, on définit un taux d'escompte

$$\lambda_n(e) = 1 - \beta_n(e).$$

Alors pour toute arène \mathcal{A} à deux joueurs,

$$\text{val}(\mathcal{A}, \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda_n)})(s) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \text{val}(\mathcal{A}, \phi_{\text{meanp}})(s).$$

Démonstration. D'après la proposition 1.32 et le corollaire 1.40, les fonctions $\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda_n)}$ et ϕ_{meanp} sont positionnelles. D'après la proposition 1.51, il suffit de prouver que pour toute partie ultimement périodique uv^ω ,

$$\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda_n)}(uv^\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \phi_{\text{meanp}}(uv^\omega). \quad (1.87)$$

On considère d'abord le cas où $u = \epsilon$. Le mot v s'écrit $v = (e_0, x_0) \cdots (e_m, x_m)$. Soit $f = \max\{e_0, \dots, e_m\}$ la priorité de v et $i_0 < \dots < i_k$ les indices $i \in \{0, \dots, m\}$ tels que $e_i = f$. D'après (1.52),

$$\begin{aligned} \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda_n)}(v^\omega) &= \frac{1}{1 - \lambda_n(v)} \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda_n)}(v) \\ &= \frac{1}{1 - \lambda_n(v)} \sum_{i=0}^m \lambda_n(e_0) \cdots \lambda_n(e_{i-1}) (1 - \lambda_n(e_i)) x_i. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} 1 - \lambda_n(v) &= 1 - \lambda_n(e_0) \cdots \lambda_n(e_m) \\ &= 1 - \lambda_n(f)^{k+1} \left(\prod_{\substack{0 \leq i \leq m \\ e_i < f}} \lambda_n(e_i) \right) \\ &= 1 - \lambda_n(f)^{k+1} + o(1 - \lambda_n(f)). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m \lambda_n(e_0) \cdots \lambda_n(e_{i-1})(1 - \lambda_n(e_i))x_i \\ &= \left(\sum_{\substack{i=0 \\ e_i=f}}^m \lambda_n(e_0) \cdots \lambda_n(e_{i-1})(1 - \lambda_n(f))x_i \right) + o(1 - \lambda_n(f)) \\ &= (1 - \lambda_n(f)) \left(\sum_{j=0}^k \lambda_n(e_0) \cdots \lambda_n(e_{j-1})x_{i_j} + o(1) \right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda_n)}(v^\omega) &= \frac{1 - \lambda_n(f)}{1 - \lambda_n(f)^{k+1} + o(1 - \lambda_n(f))} \left(\sum_{j=0}^k \lambda_n(f)^{j-1} \cdot x_{i_j} + o(1) \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k x_{i_j} \\ &= \phi_{\text{mean}}(\pi_f(v)^\omega) \\ &= \phi_{\text{meanp}}(v^\omega), \end{aligned}$$

ce qui prouve (1.87) dans le cas où $u = \epsilon$.

Si $u \neq \epsilon$, on se ramène au cas précédent grâce à la propriété (1.54), qui donne :

$$\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda_n)}(uv^\omega) = (1 - \lambda_n(u))\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda_n)}(u^\omega) + \lambda_n(u)\phi_{\text{mesc}}^{(\lambda_n)}(v^\omega).$$

Puisque $\lambda_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et en utilisant (1.87) dans le cas où $u = \epsilon$, on obtient

$$\begin{aligned} \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda_n)}(uv^\omega) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_{\text{meanp}}(v^\omega) \\ &= \phi_{\text{meanp}}(uv^\omega) \quad \text{par préfixe-indépendance de } \phi_{\text{meanp}}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

Le théorème 1.52 permet de généraliser un résultat de Blackwell. En effet, pour tout réel $0 \leq \beta < 1$, posons :

$$\begin{aligned} \lambda_\beta(0) &= 1 - \beta^{d+1}, \\ \lambda_\beta(1) &= 1 - \beta^d, \\ &\dots \\ \lambda_\beta(d) &= 1 - \beta, \end{aligned}$$

et

$$\phi_\beta = \phi_{\text{mesc}}^{(\lambda_\beta)}.$$

Alors le théorème 1.52 montre que quand β tend vers 0, les valeurs du jeu $(\mathcal{A}, \phi_\beta)$ tendent vers celles du jeu $(\mathcal{A}, \phi_{\text{meanp}})$. Dans [GZ06], nous montrons que non seulement les valeurs convergent, mais qu'en plus il existe des stratégies positionnelles qui sont uniformément optimales, pour β suffisamment proche de 0.

1.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une caractérisation des fonctions de paiement positionnelles. Nous avons utilisée cette caractérisation afin de définir une nouvelle famille de fonctions de paiement positionnelles, et afin de présenter les jeux du paiement en moyenne prioritaire comme des limites du jeu multi-escompté.

Il est naturel d'essayer d'étendre ces résultats au cadre des jeux stochastiques. C'est le but du chapitre 3, dans lequel on montre que plusieurs des résultats de ce chapitre restent vrais. Précisément, le théorème de transfert 1.8 des jeux à deux joueurs vers les jeux à un joueur reste vrai. D'autre part, on peut donner des conditions générales pour assurer la positionnalité d'une fonction de paiement pour les jeux stochastiques (théorème 3.17). Enfin, en ce qui concerne les lien entre jeux multi-escomptés et du paiement en moyenne prioritaire, il semble que les résultats de la section 1.8 puisse être étendu au cadre stochastique, cela fait l'objet d'un travail en cours.

Précisons qu'on peut raffiner les résultats de la section 1.8, en étudiant les relations entre stratégies optimales aux jeux multi-escomptés et du paiement en moyenne prioritaire. Précisément, on peut étendre la notion de Blackwell optimalité au cas des jeux multi-escompté. Ces résultats sont présentés dans [GZ06].

Pour conclure, la figure 1.6 dresse un tableau de quelques unes des fonctions de paiements positionnelles présentées dans cette thèse, ainsi que leurs relations.

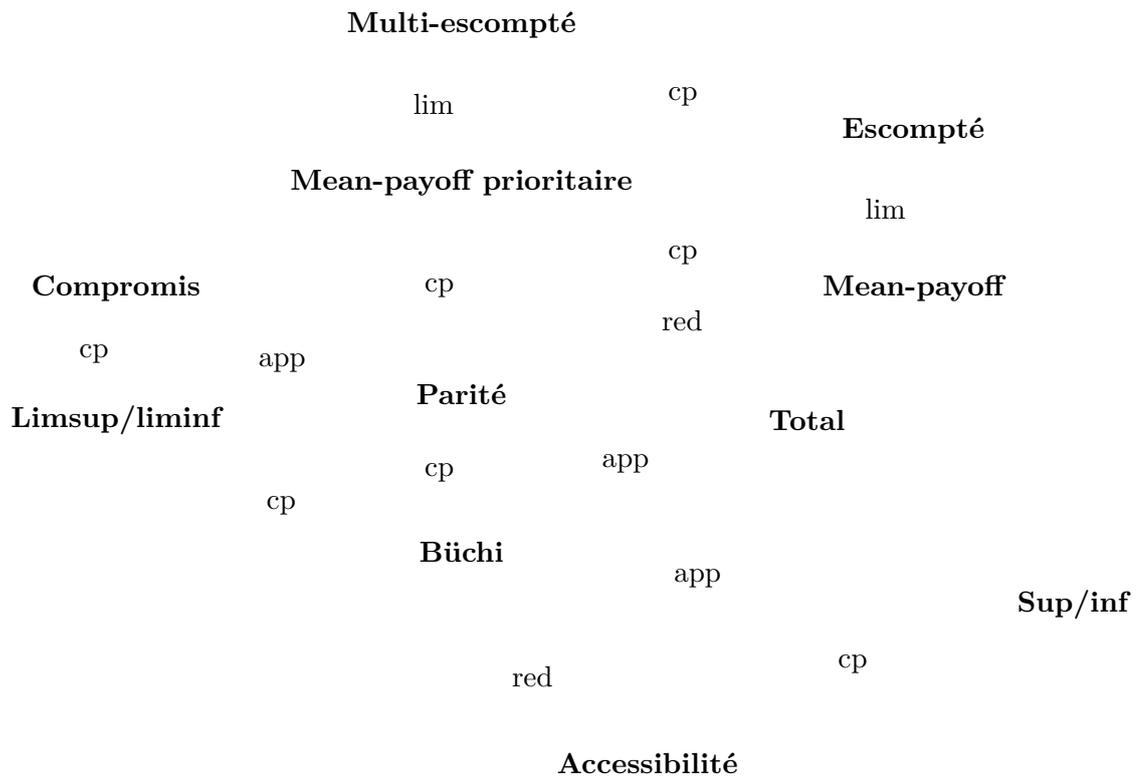


FIG. 1.6 – La grande famille des fonctions de paiements positionnels, et leurs relations. **cp** signifie “est un cas particulier”, **lim** signifie “est un cas limite”, **app** signifie “est une approximation”, et **red** signifie “peut se réduire à”.

Chapitre 2

Positionnalité des jeux sur les graphes infinis

Résumé. Ce chapitre a pour cadre les jeux joués sur des systèmes de transitions infinis de degré fini. On présente plusieurs exemples de jeux qui admettent des stratégies optimales positionnelles. Ces résultats permettent d’obtenir des résultats de décidabilité dans le cas où le système de transition est le graphe des configurations d’un automate à pile.

Dans la section 2.2 nous présentons le jeu de parité avec un nombre infini de priorités, noté Par_∞ et le jeu d’exploration, noté Exp , ainsi que leurs combinaisons booléennes, notées $\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty$ et $\text{Exp} \cap \text{Par}_\infty$. Les fonctions de paiements de ces différents jeux ne prennent que deux valeurs : 0 ou 1. Un état de valeur 1 est appelé un état gagnant, et une stratégie optimale est appelée une stratégie gagnante.

Dans la section 2.3, nous prouvons que les deux joueurs possèdent des stratégies gagnantes positionnelles au jeu Exp , au jeu $\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty$ et dans certains cas au jeu Par_∞ . Concernant le jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$, nous prouvons également que le joueur Min a des stratégies gagnantes positionnelles, et décomposons certaines stratégies gagnantes du joueur Max en un nombre fini de stratégies positionnelles.

Dans la section 2.4, on s’intéresse au cas particulier où le système de transition est un graphe d’automates à pile. En s’appuyant sur l’étude des stratégies gagnantes effectuée dans la section 2.3, on montre que les ensembles des états gagnants aux jeux Exp , $\text{Exp} \cup \text{Par}_d$ et $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$ sont des ensembles reconnaissables de mots finis, et on construit des automates alternants reconnaissant ces ensembles.

2.1 Contexte et motivations

Les automates à pile sont un modèle naturel de processus utilisant des appels récursifs. A tout automate à pile est naturellement associé un graphe dont les sommets sont les configurations de l’automate à pile (état de contrôle et contenu de pile), et les transitions correspondent aux transitions de l’automate. La classe correspondante est appelée classe des graphes context-free.

Une propriété fondamentale des graphes context-free a été établie par Müller et Schupp, qui ont montré que la logique monadique du second ordre est décidable pour cette classe de graphes [MS85].

Le résultat de Müller et Schupp a ouvert la voie au model-checking des systèmes à pile, ou de manière équivalente, à la résolution de jeux de parité sur des graphes d'automate à pile. L'ensemble des états d'un tel jeu est exactement l'ensemble des configurations — contenu de la pile et état de contrôle — de l'automate à pile étudié, et les transitions du jeu correspondent aux transitions de l'automate.

La résolution des jeux de parité sur des graphes d'automates à pile a attiré l'attention de nombreux auteurs. Les premiers résultats dans le domaine des jeux sur automates à pile ont été obtenus par I. Walukiewicz. Dans [Wal96, Wal01] est présenté un algorithme permettant de décider si une configuration donnée est gagnante au jeu de parité. Cet algorithme est basé sur une réduction du jeu à pile vers un jeu à nombre d'états fini. Le cas des jeux d'accessibilité a été ensuite partiellement amélioré par A. Bouajjani, J. Esparza et O. Maler, qui ont présenté dans [BEM97] un algorithme “symbolique”, au sens où il calcule l'ensemble des positions gagnantes, sous forme d'un automate de mots finis. Une telle description est possible car une configuration d'un automate à pile est essentiellement décrite par un mot fini sur l'alphabet de pile, auquel on rajoute l'état de contrôle. Peu après, O. Kupferman et M. Vardi ont introduit la notion d'automates alternants d'arbres bidirectionnels sur les arbres infinis [Var98, KV00, KPV02, PM03, Cac02b]. En se basant sur cette notion, ces auteurs ont montré que les résultats de [Wal96] pouvait être réinterprété en terme de non-déterminisation de ces automates bidirectionnels. D'un point de vue combinatoire, les algorithmes obtenus sont semblables, néanmoins l'interprétation en termes d'automates d'arbres bidirectionnels a l'avantage de clarifier l'algorithme. T. Cachet et O. Serre ont ensuite appliqué les techniques de Bouajjani et al. afin d'obtenir des algorithmes symboliques pour les jeux de parité [Cac02a, Ser03].

Le problème du model-checking du μ -calcul sur les graphes à pile étant réglé, deux directions de recherches se sont alors imposées.

Une première direction a consisté à étendre ces résultats à des classes de graphe plus riches, comme les graphes préfixe-reconnaissables [Cac02c], ou les graphes d'automates à piles de piles [Cac03].

Remarquons que tous les résultats de décidabilité cités jusqu'ici sont des corollaires de la décidabilité de la logique monadique du second ordre (MSO) sur les graphes de la hiérarchie de Caucal.

La seconde direction de recherche est sortie du cadre MSO, en s'intéressant à de nouvelles spécifications, prenant en compte la nature des processus à pile [CDT02, BSW03, Gim04, Ser04]. Le premier pas dans cette direction a été fait dans [CDT02], où les auteurs ont introduit une spécification sur le comportement de la pile. Cette condition que l'on appelle condition d'explosion stricte, et que l'on note Exps, spécifie qu'une partie est gagnée si et seulement si la hauteur de pile tend vers l'infini, ce qui correspond intuitivement à des “stack overflow error”. La condition Exps est très différente de la condition de parité. En effet, la condition de parité est de complexité

borélienne Δ_2 alors que la condition Exps est de complexité Σ_3^1 . Dans [CDT02], les auteurs décrivent un algorithme symbolique qui calcule l'ensemble des sommets gagnants Par la suite, [BSW03] a introduit une condition appelée “unboundedness”, notée Unb. La condition Unb stipule qu'une partie est gagnée si et seulement si la hauteur de la pile est non bornée. au jeu Exps. Dans [BSW03], les auteurs présentent des techniques de jeux-réductions qui permettent de calculer les gagnants à des jeux équipés de combinaison booléenne de la condition Unb et de la condition de Büchi. Dans [Gim04], nous avons étendu les résultats de décidabilité de [CDT02, BSW03] au cas de combinaisons booléennes de la condition Unb et de la condition de parité, en utilisant des techniques d'automates d'arbres proches de celles de [Var98, PM03]. Enfin le dernier résultat en date a été obtenu dans [Ser04]. En utilisant des techniques de jeu-réduction proches de [Wal96], l'auteur a introduit une famille de conditions de victoire de complexité borélienne arbitraire et décrit un algorithme calculant le gagnant à partir d'une configuration donnée.

Pour résumer cette abondante bibliographie, plusieurs conditions de victoire spécifiques aux jeux sur des automates à piles ont été introduites (Unb, Exp, Exps, $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$, $\text{Exp} \cup \text{Par}_d$), ainsi que les algorithmes permettant de résoudre les jeux correspondants.

Dans le cas du jeu de parité, la mise au point d'un tel algorithme repose sur le fait que les deux joueurs d'un jeu de parité possèdent des stratégies gagnantes *positionnelles*, c'est-à-dire sans mémoire.

Pour les nouvelles conditions liées au comportement de la pile, il a également fallu dégager la structure des stratégies gagnantes et des ensembles gagnants. Un premier ensemble de résultats a été établi successivement dans [Cac02a, BSW03, Gim04] : les jeux Exps et Unb sont positionnels et le jeu $\text{Unb} \cup \text{Par}_d$ est positionnel.

La structure du jeu $\text{Unb} \cap \text{Par}_d$ est plus complexe et pour l'étudier nous avons choisi de nous abstraire du cadre des jeux à pile et de considérer en toute généralité la classe des graphes infinis de degré fini ². La condition Exps s'étend sans difficulté à cette classe plus générale de graphes, en conservant la même définition : une partie est gagnante si elle ne passe qu'un nombre fini de fois par chaque état. En ce qui concerne la condition Unb, nous l'avons étendue en une condition appelée condition d'exploration et notée Exp, qui stipule qu'une partie est gagnante si elle visite un nombre infini de sommets différents. Dans ce cadre généralisé, il nous est également apparu naturel d'étudier une généralisation de la condition de parité aux cas d'une infinité de priorités. Cette dernière condition est notée Par_∞ .

A propos des jeux sur les graphes infinis de degré fini, nous avons obtenus plusieurs résultats, publiés dans [Gim04] et dont les énoncés et démonstrations sont donnés dans la suite de ce chapitre. Tout d'abord les jeux Exp, Exps, $\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty$ sont positionnels (cf. théorème 2.4 et corollaire 2.5). Dans le cas où chaque priorité étiquette un nombre fini de sommets, le jeu Par_∞ est également positionnel (cf. sous-section 2.3.4). Dans le cas où il n'y a qu'un nombre fini de priorités, le joueur 1 a également une stratégie positionnelle gagnante dans le jeu où la condition de victoire est du type $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$

¹Précisément, il est prouvé dans [CDT02] qu'il existe un langage Σ_3 -complet reconnu par un automate à pile déterministe muni de la condition d'acceptation Exps.

²C'est à dire que chaque sommet est la source ou la cible d'un nombre fini de transitions.

(cf. théorème 2.20). Enfin, nous avons obtenu une caractérisation de l'ensemble des positions gagnantes du joueur 0 au jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$ (cf. théorème 2.13).

En se basant sur les résultats théoriques précédents, on obtient des résultats de calculabilité dans le cas particulier où l'arène est le graphe d'un automate à pile. Ainsi, pour chacun des jeux Exp , $\text{Exp} \cup \text{Par}_d$ et $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$, nous montrons dans le théorème 2.31 que l'ensemble des configurations gagnantes sont des ensembles reconnaissables de $Q\Gamma^*$, où Q est l'ensemble des états du système à pile et Γ est l'alphabet de pile. De plus, nous présentons un algorithme pour calculer un arbre régulier de taille $2^{\mathcal{O}(d^2|Q|^2+|\Delta|)}$ qui décrit ces ensembles gagnants, où d est le nombre de priorités du jeu de parité sous-jacent, Q le nombre d'états de contrôle et Δ le nombre de transitions de l'automate à pile. Au passage, nous montrons dans le théorème 2.24 que les ensembles de stratégies positionnelles gagnantes aux jeux exp , $\text{Exp} \cup \text{Par}_d$ et $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$ sont reconnus par un automate alternant à parité à trois priorités.

Vers où diriger les prochaines recherches à propos des jeux à pile ? Une possibilité est de rester dans la continuité de [Ser04], en s'intéressant aux deux problèmes suivants, ouverts à notre connaissance. Tout d'abord les jeux de [Ser04] sont-ils positionnels ? La réponse à cette question peut avoir des conséquences intéressantes, comme en témoigne la remarque suivante. La positionnalité des jeux Exp et Exps implique que ces jeux sont équivalents, au sens où leurs ensembles d'états gagnants et de stratégies positionnelles gagnantes sont identiques. Or la condition de victoire Exp est de complexité borélienne inférieure à Π_2 , puisque :

$$\text{Exp} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{(s_i)_{i \in \mathbb{N}} : |\{s_0, \dots, s_n\}| \geq m\} \in \Pi_2 . \quad (2.1)$$

Ainsi, le jeu Exps de complexité Σ_3 est équivalent à un jeu Π_2 . Cette observation mène naturellement à la question suivante : les jeux de [Ser04] sont-ils équivalents à des jeux de complexité Borélienne bornée ?

2.2 Conditions de victoires et stratégies gagnantes

Le chapitre précédent concernait les jeux sur des systèmes de transitions finis dont les transitions étaient colorées et où les fonctions de paiement prenaient des valeurs réelles quelconques. Dans ce chapitre, nous considérons des jeux tels que :

- l'ensemble des états S est infini,
- le degré du système de transitions sous-jacent (S, T) est fini,
- les états sont colorés par une fonction $\text{col} : S \rightarrow C$,
- la fonction de paiement ne prend que deux valeurs, 0 ou 1.

Ce cadre comprend la classe des jeux joués sur des graphes d'états d'automates à pile, ou à piles de piles, car ces graphes sont de degré fini.

Puisque ce sont les états et non pas les transitions qui sont colorés, on peut simplifier les notions de parties et de stratégies de la manière suivante. Toute stratégie $\sigma : (SC)^\omega \rightarrow T$ peut facilement être transformée en une stratégie $\sigma : S^\omega \rightarrow T$, dont le choix ne dépendent que de la suite des états visités, tout en assurant le même paiement.

Par conséquent, dans ce chapitre on utilisera les définitions suivantes :

Définition 2.1. Soit C un ensemble de couleurs, éventuellement infini. Une arène colorée par C est un uplet $\mathcal{A} = (S, S_{\text{Max}}, S_{\text{Min}}, T, \text{col})$ où :

1. (S, T) est un système de transitions de degré fini, c'est-à-dire tel que tout état est la source ou la cible d'un nombre fini de transitions,
2. $(S_{\text{Max}}, S_{\text{Min}})$ est une partition de S ,
3. $\text{col} : S \rightarrow C$ colore les états.

Une partie finie dans \mathcal{A} est un mot fini $s_0s_1 \cdots s_n \in S^*$, tel que pour tout $0 \leq i < n$, (s_i, s_{i+1}) est une transition. Une partie infinie dans \mathcal{A} est un mot infini $s_0s_1 \cdots \in S^\omega$, tel que pour tout $0 \leq i$, (s_i, s_{i+1}) est une transition. Une stratégie pour un joueur \mathcal{J} est une fonction $\sigma : S^*S_{\mathcal{J}} \rightarrow S$ telle que pour toute partie finie $p = s_0s_1 \cdots s_n$ avec $s_n \in S_{\mathcal{J}}$, le couple $(s_n, \sigma(p))$ est une transition. Une stratégie est positionnelle si $\sigma(s_0s_1 \cdots s_n)$ ne dépend que de s_n . Dans ce cas, elle est également décrite comme l'ensemble des transitions :

$$\{(s, \sigma(s)) \in T \mid s \in S_{\mathcal{J}}\} .$$

Quand la fonction de paiement ne prend que deux valeurs, les notions de valeur d'un état et de stratégie optimale sont remplacées par celles d'état gagnant et de stratégie gagnante. La fonction de paiement est plus commodément décrite par l'ensemble des parties de valeur 1 : un ensemble $W \subseteq S^\omega$ de parties infinies dans \mathcal{A} est appelé une *condition de victoire* sur l'arène \mathcal{A} . Une partie $p \in W$ est dite *gagnée* par le joueur Max et perdue par le joueur Min. Étant donné un ensemble $U \subseteq S$ d'états d'une arène \mathcal{A} , une stratégie σ pour un joueur \mathcal{J} est dite *gagnante sur l'ensemble U* au jeu (\mathcal{A}, W) si toute partie conforme à σ dont la source est un état de U est gagnée par \mathcal{J} . En particulier, un état s tel qu'il existe une stratégie gagnante pour \mathcal{J} sur $\{s\}$ est appelé un *état gagnant* pour \mathcal{J} .

Par définition, un état ne peut être gagnant que pour l'un des deux joueurs. Sous l'hypothèse raisonnable que W est un sous-ensemble Borélien de S^ω , le théorème de Martin [Mar75] assure que chaque état est gagnant pour l'un des deux joueurs. Toutefois nous n'utiliserons pas ce théorème, qui ne donne pas d'information sur la forme de stratégies gagnantes.

L'ensemble des états gagnants pour \mathcal{J} est appelé *l'ensemble gagnant* de \mathcal{J} . Une stratégie σ est dite *gagnante*, sans préciser sur quel ensemble, si elle est gagnante sur l'ensemble gagnant du joueur \mathcal{J} .

Dans la section suivante, on va s'intéresser à l'existence de stratégies positionnelles gagnantes dans les jeux sur les arènes infinies de degré fini. Cela nous permettra par la suite d'obtenir des résultats de décidabilité concernant les jeux joués sur des graphes d'automates à pile. Cela motive la définition suivante :

Définition 2.2. Soit S un ensemble d'états. Une condition de victoire $W \subseteq S^\omega$ est dite positionnelle si pour toute arène \mathcal{A} d'ensemble d'état S , chaque joueur possède une stratégie gagnante positionnelle au jeu (\mathcal{A}, W) .

2.3 Jeux d'exploration et jeux de parité

Dans cette section, on présente les deux principaux types de jeux étudiés dans ce chapitre : le jeu d'exploration et le jeu de parité avec un nombre infini de priorités. Les conditions de victoire correspondantes sont notées Exp et Par_∞ .

Les conditions Exp et Par_∞ sont spécifiques aux arènes infinies. En effet, la condition d'exploration stipule qu'un nombre infini d'états doivent être visités, et dans une arène finie Max ne gagne donc jamais. D'autre part, la condition Par_∞ de parité avec un nombre infini de priorités se réduit au jeu de parité classique Par_d dans le cas des arènes finies.

2.3.1 Jeu d'exploration

Dans une arène \mathcal{A} , où Max et Min s'affrontent au jeu d'exploration, le but du joueur Max est de passer par une infinité d'états différents, et la condition de victoire correspondante est :

$$\text{Exp} = \{s_0s_1 \cdots \in S^\omega \mid \text{l'ensemble } \{s_i, i \in \mathbb{N}\} \text{ est infini.}\}. \quad (2.2)$$

La condition d'exploration est une extension de la condition Unb introduite dans [BSW03]. Contrairement à la condition Exp , la condition Unb s'applique uniquement à des jeux joués sur des graphes de configurations d'automates à pile. Sur un tel graphe, l'ensemble des parties est exactement l'ensemble des calculs infinis de l'automate à pile sous-jacent. La condition Unb spécifie que Max gagne une partie si et seulement si, au cours du calcul correspondant de l'automate, la hauteur de la pile n'est pas bornée. Cela n'arrive que si une infinité de configurations différentes de l'automate à pile sont visitées. Ainsi les conditions Unb et Exp coïncident quand elles s'appliquent à des jeux joués sur des graphes d'automates à pile.

Bien que les conditions Exp et Exps ne soient pas formellement identiques, elles spécifient en fait le même jeu. La condition Exps considérée dans [CDT02] stipule que Max gagne une partie si chacun des états de l'arène est visité un nombre fini de fois. Toute partie gagnée relativement à la condition Exps est donc gagnée relativement à la condition d'exploration Exp , mais le contraire n'est pas nécessairement vrai : une partie peut très bien visiter un nombre infini de sommets différents un nombre infini de fois chacun. Dans ce cas, elle sera gagnante pour la condition Exp et perdante pour la condition Exps . Ces deux conditions de victoire sont donc distinctes au sens où elles spécifient des ensembles différents de parties gagnantes. Toutefois, le corollaire 2.5 établit qu'elles admettent en fait les mêmes ensembles d'états gagnants et de stratégies positionnelles gagnantes.

Cette remarque fait perdre à la condition Exps une partie de son intérêt théorique. En effet, cet intérêt tient principalement au fait que Exps est le premier exemple de jeu à pile de condition de complexité borélienne Σ_3 dont les ensembles d'états gagnants soient calculables. Or la condition Exp est équivalente à la condition Exp , qui est de complexité borélienne Π_2 , cf. (2.1).

Cela indique que la complexité algorithmique d'un jeu n'est pas nécessairement corrélée avec la complexité Borélienne de la condition de victoire associée. Les travaux d'O. Serre donnent toutefois un exemple d'une corrélation de ce type. En effet, les résultats présentés dans [Ser04] définissent une famille de conditions de victoires de complexité borélienne croissante, et montre que le problème de décision associé à la condition de complexité k est k -EXPTIME complet.

Une question se pose naturellement : les conditions présentées dans [Ser03] sont elles équivalentes à des conditions de complexité inférieure ?

2.3.2 Jeu de parité avec un nombre infini de priorités

Le jeu de parité avec un nombre infini de priorités se joue dans une arène colorée par \mathbb{N} . Le joueur Max gagne une partie si il existe une plus grande priorité vue infiniment souvent et que cette priorité est impaire, ou si la suite des priorités n'est pas bornée. La condition de victoire correspondante s'écrit :

$$\text{Par}_\infty = \{s_0s_1 \cdots \in S^\omega \mid \limsup_{i \in \mathbb{N}} \text{col}(s_i) \text{ est impaire ou infinie.}\}$$

On note Par_d la condition de parité classique, c'est à dire avec un nombre fini de priorité. Elle s'applique à des arènes colorées par $\{0, \dots, d\}$, où d est un entier.

$$\text{Par}_d = \{s_0s_1 \cdots \in S^\omega \mid \limsup_{i \in \mathbb{N}} \text{col}(s_i) \text{ est impaire.}\}$$

Dans le cas où le nombre de priorités est fini, le résultat suivant est classique, et a été démontré dans [EJ91a, McN93] pour les arènes finies et dans [Mos91, Zie98] pour les arènes infinies.

Théorème 2.3 ([EJ91a, Mos91]). *La condition de victoire Par_d est positionnelle.*

Le jeu de parité avec un nombre infini de priorités a été également étudié par E. Grädel et I. Walukiewicz dans [Grä04]. Concernant le jeu Par_∞ , ils ont exhibé une arène de degré infini dans laquelle le joueur Max n'a pas de stratégie gagnante positionnelle. D'autre part, ils ont étudié une autre version du jeu Par_∞ , dans laquelle on considère la limite inférieure de la suite des priorités rencontrées :

$$\text{Par}'_\infty = \{s_0s_1 \cdots \mid \liminf_{i \in \mathbb{N}} \text{col}(s_i) \text{ est impaire ou infinie.}\}$$

Dans ce dernier jeu, le joueur Max gagne une partie si il existe une plus petite priorité vue infiniment souvent qui est impaire, ou si la suite des priorités tend vers $+\infty$. Ils ont montré que les deux joueurs ont des stratégies gagnantes positionnelles pour ce dernier jeu dans n'importe quelle arène, de degré fini ou non.

Ce dernier résultat n'est plus vrai si l'on colore les transitions au lieu des états. En effet, T. Colcombet et D. Niwinski ont montré dans [CN05] que la condition de parité

avec un nombre fini de priorités est la seule condition de victoire qui soit préfixe-indépendante³ et pour laquelle les deux joueurs ont des stratégies gagnantes positionnelles dans n'importe quelle arène dont les transitions sont colorées.

2.3.3 Le jeu $\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty$

Dans cette section, on s'intéresse à l'union des conditions de victoire Par_∞ et Exp , notée $\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty$.

Théorème 2.4 ([Gim04]). *La condition de victoire $\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty$ est positionnelle.*

Avant de donner la preuve de cette proposition, remarquons qu'on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.5. *Les conditions de victoire Exp et Exps sont positionnelles. Soit \mathcal{A} une arène. Alors les ensembles d'états gagnants et de stratégies positionnelles gagnantes sont les mêmes aux jeux $(\mathcal{A}, \text{Exp})$ et $(\mathcal{A}, \text{Exps})$.*

Démonstration. Le jeu Exp est positionnel car c'est un cas particulier du jeu $\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty$, quand tous les états sont colorés par la priorité 0.

Montrons que les ensembles d'états gagnants aux jeux $(\mathcal{A}, \text{Exp})$ et $(\mathcal{A}, \text{Exps})$ sont les mêmes. Soit \mathcal{A} une arène et σ et τ des stratégies positionnelles gagnantes pour Max et Min au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp})$. Comme $\text{Exps} \subseteq \text{Exp}$, τ est gagnante pour le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exps})$. Soit X l'ensemble gagnant du joueur Max au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp})$, et p une partie dont la source est dans X et conforme à σ . Alors p ne passe pas deux fois par le même état, sinon on pourrait construire une partie ultimement périodique issue de X et conforme à σ , ce qui contredirait le fait que σ est gagnante au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp})$. Cela implique que $p \in \text{Exps}$. Finalement σ est gagnante au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exps})$.

Montrons que les ensembles d'états gagnants aux jeux $(\mathcal{A}, \text{Exp})$ et $(\mathcal{A}, \text{Exps})$ sont les mêmes, et que les stratégies positionnelles gagnantes au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp})$ sont gagnantes au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exps})$.

Il reste à prouver que les ensembles de stratégies positionnelles gagnantes au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exps})$ sont gagnantes au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp})$. Soit σ' et τ' deux stratégies positionnelles gagnantes pour le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exps})$. Puisque $\text{Exps} \subseteq \text{Exp}$, σ' est gagnante pour le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp})$. D'autre part, soit s un état gagnant pour Min au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exps})$, et p une partie de source s et conforme à τ' . Supposons que p visite un nombre infini de sommets différents et cherchons une contradiction. En utilisant le lemme de Koenig, on en déduit qu'il existe une partie p' infinie de source s , conforme à τ' et telle que p' passe au plus une fois par chaque état. Alors $p' \in \text{Exps}$, ce qui contredit le fait que τ' est gagnante pour Min au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exps})$. On en déduit que $p \notin \text{Exp}$, donc τ' est gagnante pour Min au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp})$, ce qui termine la preuve de ce corollaire. \square

Dans plusieurs des démonstrations de cette section, on utilisera les notions de piège et d'arène induite par un piège, introduites dans [Zie98].

³une condition de victoire W est dite préfixe-indépendante quand le fait que Max gagne une partie est indépendant de tout préfixe de cette partie, c'est à dire si $\forall p \in (SC)^*, pW = W$.

Définition 2.6. Soit \mathcal{A} une arène, et $X \subseteq S$ un ensemble d'états de \mathcal{A} . On dit que X est un piège pour Min dans \mathcal{A} si :

- pour tout état $s \in X \cap S_{\text{Max}}$, il existe une transition de source s et dont la cible est dans X ,
- pour tout état $s \in X \cap S_{\text{Min}}$, toute transition de source s a sa cible dans X .

En d'autre terme, X est un piège pour Min si le joueur Max a une stratégie pour empêcher la partie de sortir de X . Si X est un piège pour Min dans \mathcal{A} , alors $(X, S_{\text{Max}} \cap X, S_{\text{Min}} \cap X, T \cap X \times X)$ est une arène, notée $\mathcal{A}[X]$.

On utilisera fréquemment le lemme suivant.

Lemme 2.7. Soit (\mathcal{A}, W) un jeu, $X \subseteq S$ un piège pour le joueur Min et $Y \subseteq X$. Si Max gagne $(\mathcal{A}[X], W)$ sur Y , il gagne (\mathcal{A}, W) sur Y . Si Min gagne (\mathcal{A}, W) sur Y , il gagne $(\mathcal{A}[X], W)$ sur Y . De plus une stratégie positionnelle pour Max qui gagne le jeu $(\mathcal{A}[X], W)$ sur Y gagne le jeu (\mathcal{A}, W) sur Y .

Le lemme suivant concerne les conditions de victoire $W \subseteq S^\omega$ closes par concaténation, c'est-à-dire telle que si un suffixe d'une partie infinie p est dans W , alors p elle-même est dans W .

Lemme 2.8. Soit (\mathcal{A}, W) un jeu. Supposons que W est close par concaténation. Alors l'ensemble gagnant du joueur Max est un piège pour le joueur Min.

En particulier, soit $X \subseteq S$ un sous-ensemble d'états, et $\text{Attr}_{\text{Max}}(X)$ l'ensemble gagnant du joueur Max au jeu d'attraction dans X . Alors $S \setminus \text{Attr}_{\text{Max}}(X)$ est un piège pour le joueur Max.

Démonstration. Soit σ une stratégie gagnante pour le jeu (\mathcal{A}, W) , et $X \subseteq S$ l'ensemble des états gagnants de Max. Soit $p = s_0 s_1 \cdots \in S^\omega$ une partie infinie conforme à σ et dont la source est dans X .

Alors montrons par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n \in X$. Supposons que $s_n \notin X$, et cherchons une contradiction. Soit τ une stratégie gagnante pour Min sur $S \setminus X$. Soit τ' la stratégie pour Min qui consiste à laisser se jouer la partie finie $s_0 s_1 \cdots s_n$ puis à appliquer τ . Alors la partie conforme à σ et τ' sera perdue par Max, ce qui contredit le fait que σ est gagnante sur X .

Ainsi, Max a une stratégie pour que toute partie issue de X reste dans X . Cela prouve que l'ensemble des états gagnants pour Max est un piège pour Min. \square

On peut maintenant passer à la preuve de la positionnalité de la condition $\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty$.

Démonstration du théorème 2.4. Soit \mathcal{A} une arène de degré fini. Sans perte de généralité, on peut supposer que \mathcal{A} est connexe. Puisque \mathcal{A} est connexe et de degré fini, elle a un nombre fini ou dénombrable d'états.

Dans le cas d'un nombre fini d'états, il est impossible de gagner une partie du jeu Exp, et les états ne sont colorés que par un nombre fini de priorités différentes. Dans ce cas la condition $\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty$ est en fait une condition du type Par_d , et l'existence de stratégies positionnelles gagnantes est donnée par le Théorème 2.3.

Dans le cas d'un nombre dénombrable d'états, on peut supposer que l'ensemble des états est :

$$S = \mathbb{N} .$$

Pour prouver le théorème 2.4, il est crucial d'observer que $\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty$ est la limite d'une suite décroissante de conditions de victoire :

$$\text{Exp} \cup \text{Par}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n . \quad (2.3)$$

La condition W_n stipule qu'une partie est gagnée par Max si elle est gagnante au jeu d'attraction dans $\{n, n+1, \dots\}$ ou si elle est gagnée au sens du jeu de parité :

$$\begin{aligned} \text{Att}(\geq n) &= \{s_0 s_1 \dots \mid \exists i \in \mathbb{N}, s_i \geq n\} \\ \text{et } W_n &= \text{Att}(\geq n) \cup \text{Par}_\infty . \end{aligned}$$

On va tout d'abord montrer le lemme suivant :

Lemme 2.9. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, les deux joueurs ont des stratégies gagnantes positionnelles au jeu (\mathcal{A}, W_n) .*

Démonstration. La démonstration est résumée par la figure 2.1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et Z_n l'ensemble des états gagnants pour Max au jeu d'attraction dans les états strictement plus grands que n :

$$Z_n = \text{Attr}_{\text{Max}}(\{n, n+1, \dots\}) .$$

D'après le lemme 2.7, l'ensemble $S \setminus Z_n$ est un piège pour Max donc $\mathcal{A}[S \setminus Z_n]$ est une sous-arbre de \mathcal{A} . De plus tout état plus grand que n est dans Z_n donc $\mathcal{A}[S \setminus Z_n]$ est une arène finie, et le jeu $G_n = (\mathcal{A}[S \setminus Z_n], W_n)$ est en fait un jeu de parité avec un nombre fini d de priorités. D'après le théorème 2.3, il existe une partition (X_n, Y_n) de $S \setminus Z_n$ et des stratégies positionnelles σ et τ pour Max et Min dans l'arène $\mathcal{A}[S \setminus Z_n]$, telles que σ est gagnante pour Max sur X_n au jeu G_n et τ est gagnante pour Min sur au jeu $G_n = (\mathcal{A}[S \setminus Z_n], W_n)$ sur Y_n .

Puisque $S \setminus Z_n$ est un piège pour Max, le lemme 2.7 implique que τ est gagnante pour Min au jeu (\mathcal{A}, W_n) sur Y_n .

On construit maintenant une stratégie positionnelle pour Max gagnante au jeu G_n sur l'ensemble $S \setminus Y_n = X_n \cup Z_n$. Soit σ_{att} gagnante pour Max sur Z_n au jeu d'attraction dans les états plus grands que n . Supposons que Max utilise σ quand l'état courant est dans X_n , et σ_{att} quand l'état courant est dans Z_n . Alors toute partie infinie p conforme à cette stratégie restera soit confinée dans X_n et sera gagnée par Max au jeu de parité, soit atteindra un état de Z_n et sera gagnée par Max au jeu d'attraction dans $\{n, n+1, \dots\}$. Dans les deux cas $p \in W_n$.

Cela montre que chacun des joueurs a une stratégie positionnelle gagnante, et termine la preuve de ce lemme. \square

Les lemmes 2.10 et 2.11 permettent de conclure. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ notons X_n l'ensemble gagnant du joueur Max au jeu $G_n = (\mathcal{A}, W_n)$. Posons $G = (\mathcal{A}, \text{Exp} \cup \text{Par}_\infty)$.

Gagnant pour Max au jeu G_n .

Ensemble fini des états gagnants de Max
au jeu $(\mathcal{A}[S \setminus Z_n], \text{Par}_\infty)$

Ensemble fini des états gagnants de Min
au jeu $(\mathcal{A}[S \setminus Z_n], \text{Par}_\infty)$

$$Z_n = \text{Attr}_{\text{Max}}(\{n, n+1, \dots\})$$

Gagnant pour Min au jeu G_n .

FIG. 2.1 – Ensembles gagnants au jeu G_n .

Alors Max gagne positionnellement G sur $\bigcap_n X_n$. En effet, les lemmes 2.9 et 2.10 implique que Max a une stratégie positionnelle gagnant le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n)$ sur $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Or ce jeu est le jeu G car :

$$\text{Exp} \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n = \text{Exp} \cup \text{Par}_\infty .$$

Montrons maintenant que Min gagne positionnellement G sur $S \setminus \bigcap_n X_n$. Le lemme 2.8 implique que $S \setminus X_n$ est un piège pour Max et que Min gagne $(\mathcal{A}[S \setminus X_n], W_n)$. Or d'après le lemme 2.9, Min gagne ce jeu positionnellement, donc le lemme 2.11 implique que le joueur Min a une stratégie positionnelle gagnant le jeu $(\mathcal{A}, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n)$ sur $S \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Or ce jeu est le jeu G , d'après (2.3). \square

Lemme 2.10. *Soit \mathcal{A} une arène de degré fini, $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de conditions de victoire et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensemble d'états de \mathcal{A} . Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le joueur Max a une stratégie positionnelle gagnante au jeu (\mathcal{A}, W_n) sur l'ensemble X_n . Alors Max possède une stratégie positionnelle gagnante au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n)$ sur l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que \mathcal{A} est connexe. De plus, puisque \mathcal{A} est de degré fini, S est soit fini soit dénombrable.

Si S est fini, alors il existe un nombre fini de stratégies positionnelles différentes pour le joueur Max. On en déduit qu'il existe une stratégie positionnelle σ telle que pour une infinité de n , σ est gagnante au jeu (\mathcal{A}, W_n) sur l'ensemble X_n . Puisque la suite de conditions de victoire W_n est décroissante, cette stratégie est gagnante au jeu $(\mathcal{A}, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n)$ sur l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

Dans le cas où S est infini, la preuve est dans le même esprit. On va faire en sorte que Max joue en permanence conformément à un nombre infini de stratégies différentes, chacune étant gagnante à un des jeux (\mathcal{A}, W_n) . Pour construire une telle stratégie, on applique le lemme de Koenig à un arbre dont les états sont des stratégies positionnelles. Soit Σ_n^0 l'ensemble des stratégies positionnelles pour Max gagnantes sur $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ au jeu (\mathcal{A}, W_n) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$\Sigma_n = \{(\sigma \cap \{0, \dots, n-1\} \times \{0, \dots, n-1\}, n) \mid \sigma \in \Sigma_n^0\} .$$

les restrictions des stratégies de σ_n aux états inférieurs strictement à n . Soit $\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$.

On donne à Σ une structure de graphe orienté en rajoutant une transition de chaque état (σ, n) à chaque état $(\tau, n+1)$ tels que σ est la restriction de τ à l'ensemble d'états $\{0, \dots, n-1\}$. Soit G ce graphe. C'est un arbre dont la racine est $(\emptyset, 0)$, et l'ensemble des états de profondeur n est Σ_n . De plus, par hypothèse, chaque ensemble Σ_n^0 est non vide donc Σ est infini. Enfin pour chaque n , $\Sigma_n \subseteq 2^{\{0, \dots, n\}^2} \times \{n\}$ donc G est de degré fini.

Par le lemme de Koenig, il existe un chemin infini $(\sigma_0, 0)(\sigma_1, 1) \cdots$ dans G qui part de la racine $(\emptyset, 0)$. Puisque chaque σ_n est la restriction de σ_{n+1} aux états inférieurs à n ,

$$\sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n$$

est une stratégie positionnelle pour le joueur Max .

Montrons que σ est gagnante au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n)$ sur $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Soit p une partie conforme à σ et dont la source est dans X . Si p est gagnante pour le jeu Exp, il n'y a rien à prouver. Dans le cas contraire, il existe un entier n telle que p reste circonscrite dans un ensemble $\{0, \dots, n\}$ d'états. Pour tout $m \geq n$, soit $\sigma_m^0 \in \Sigma_m^0$ une stratégie dont σ_m est la restriction aux états inférieurs strictement à m . Alors pour tout $m \geq n$, p est conforme à σ_m^0 et sa source est dans X_m donc elle est gagnée par Max au jeu (\mathcal{A}, W_m) . Finalement, $p \in \bigcap_{m \geq n} W_m = \bigcap_{m \geq 0} W_m$. Cela montre que σ est gagnante au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n)$ sur X , ce qui termine la preuve de ce lemme. \square

Lemme 2.11. *Soit \mathcal{A} une arène, $(W_i)_{i \in I}$ une famille de conditions de victoire et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles d'états de \mathcal{A} . Supposons que $\bigcup_{i \in I} W_i$ soit clos par concaténation, que chaque X_i est un piège pour Min et que pour tout $i \in I$, Max a une stratégie positionnelle gagnant le jeu $(\mathcal{A}[X_i], W_i)$ sur l'ensemble X_i . Alors Max a une stratégie positionnelle gagnant le jeu $(\mathcal{A}, \bigcup_{i \in I} W_i)$ sur l'ensemble $\bigcup_{i \in I} X_i$.*

Démonstration. Soit \preceq un ordre bien fondé sur I , c'est à dire un ordre tel que tout ensemble admet un plus petit élément. Son existence est donnée par le théorème de Zermelo. Pour chaque $i \in I$, soit σ_i une stratégie positionnelle gagnant le jeu (\mathcal{A}, W_i) sur l'ensemble X_i . Pour chaque état $s \in S_{\text{Max}} \cap X$, on définit $i(s) = \min\{i \mid s \in X_i\}$, et on pose $\sigma(s) = \sigma_{i(s)}(s)$. Alors σ est une stratégie positionnelles pour Max .

Montrons que σ est gagnante pour Max . Soit $p = s_0 c_0 s_1 \cdots$ une partie conforme à σ et dont la source est dans X . Puisque chaque X_i est un piège pour Min et que

| | | | | |
|---|---|---|---|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
| 1 | 3 | 5 | 7 | ... |
| 1 | 1 | 1 | 1 | ... |
| 0 | 2 | 4 | 6 | ... |

FIG. 2.2 – La stratégie du joueur Max doit mémoriser la plus grande priorité paire vue au cours de la partie afin de répliquer avec une priorité impaire encore plus grande.

chaque stratégie σ_i est définie dans $\mathcal{A}[X_i]$, la suite $(i(s_0), i(s_1), \dots)$ est \preceq -décroissante donc stationnaire. Soit j sa limite. Alors p est la concaténation d'une partie finie q et d'une partie infinie issue de X_j et conforme à σ_j , c'est à dire $p \in qW_j$. Puisque $\bigcup_{i \in I} W_i$ est clos par concaténation, on en déduit que $p \in \bigcup_{i \in I} W_i$. \square

2.3.4 Le jeu Par_∞

Le jeu de parité Par_d avec un nombre fini de priorités est positionnel (cf. théorème 2.3). Une question qui se pose naturellement est de savoir si la condition Par_∞ est elle aussi positionnelle. E. Graedel et I. Walukiewicz ayant répondu négativement à cette question dans le cas des arènes de degré infini [Grä04], on peut se demander ce qu'il en est des arènes de degré fini.

Dans le cas particulier où chaque priorité colore un nombre fini d'états, les deux joueurs possèdent des stratégies gagnantes positionnelles au jeu Par_∞ . En effet, une partie visitant un nombre infini d'états différents visitera nécessairement une infinité de priorités différentes. Cela implique que $\text{Exp} \subseteq \text{Par}_\infty$, et le théorème 2.4 implique que dans ce cas spécial, Par_∞ est positionnelle.

Ceci n'est plus vrai si il existe une priorité qui colore un nombre infini de transitions différentes. Considérons l'exemple donné par la figure 2.2. Les carrés sont les états contrôlés par le joueur Max et les cercles ceux contrôlés par le joueur Min. Le joueur Max gagne le jeu Par_∞ à partir de tous les états mais n'a pas de stratégie positionnelle gagnante.

2.3.5 Le jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$

Dans cette sous-section, on s'intéresse au jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$. On montre que le joueur Min a des stratégies gagnantes positionnelles au jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$ (cf. théorème 2.20),

1 0 0 0 0 ...

FIG. 2.3 – Pour gagner le jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_2$, le joueur Max doit visiter de nouveaux états arbitrairement loin vers la droite mais doit également passer infiniment souvent dans l'état de priorité 2 situé à l'extrême gauche.

et on caractérise l'ensemble gagnant du joueur Max (cf. théorème 2.13), en décrivant certaines de ses stratégies gagnantes (cf. proposition 2.19).

2.3.5.1 Caractérisation de l'ensemble gagnant du joueur Max au jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$

Tout d'abord, remarquons qu'il existe des arènes dans lesquelles le joueur Max n'a pas de stratégie positionnelle gagnante. Un exemple d'une telle arène à un joueur est donné par la figure 2.3, où le joueur Max gagne à partir de chaque état mais n'a pas de stratégie positionnelle pour y parvenir.

Toutefois, nous pouvons caractériser les arènes dans lesquelles le joueur Max gagne à partir de n'importe quel état. Pour cela nous avons besoin de définir la notion de stratégie positionnelle non-déterministe.

Définition 2.12. Soit \mathcal{A} une arène. Une stratégie positionnelle non-déterministe pour le joueur Max dans l'arène \mathcal{A} est un sous-ensemble $\sigma \subseteq T$ des transitions tel que :

- pour tout état $s \in S_{\text{Max}}$, il existe dans σ au moins une transition de source s ,
- pour tout état $s \in S_{\text{Min}}$, il n'existe dans σ aucune transition de source s .

On note

$$\mathcal{A}[\sigma] = (S, S_{\text{Max}}, S_{\text{Min}}, \{t \in T \mid \text{source}(t) \in S_{\text{Min}} \text{ ou } t \in \sigma\}, \text{col}) ,$$

la sous-arène de \mathcal{A} dans laquelle les mouvements de Max sont restreints aux transitions de σ .

La différence avec la définition 2.1 de stratégie positionnelle est que étant donné un état s contrôlé par Max, σ peut proposer plusieurs transitions de source s .

Théorème 2.13 ([Gim04]). Soit \mathcal{A} une arène colorée par $\{0, \dots, d\}$, où $d > 0$. Soit D l'ensemble des états colorés par d . Alors Max gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur S si et seulement si il existe un sous-ensemble $X \subseteq S$ tel que $\mathcal{A}[X]$ est une sous-arène colorée par $\{0, \dots, d-1\}$ et qu'une des deux conditions suivantes soit vraie.

Si d est impair, le joueur Max :

- gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp})$ sur S ,
- gagne le jeu $(\mathcal{A}[X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ sur X
- et gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Att}(D))$ sur $S \setminus X$.

Si d est pair, le joueur Max a une stratégie positionnelle non-déterministe σ telle que :

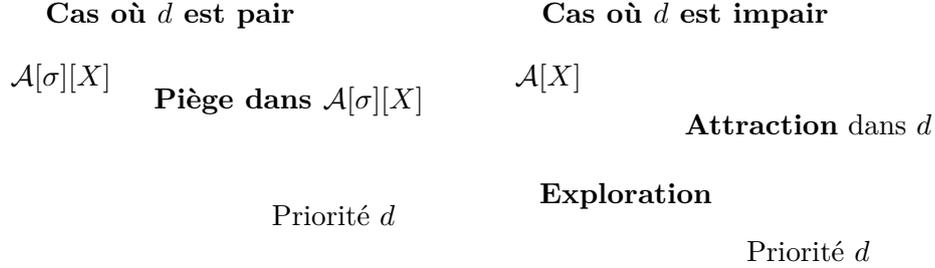


FIG. 2.4 – Les conditions du théorème 2.13. Dans le cas où d est impair, Max a une stratégie pour gagner le jeu $(\mathcal{A}[X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ et dans le cas où d est pair, pour gagner le jeu $(\mathcal{A}[X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$.

- σ est gagnante pour le jeu $(\mathcal{A}, \text{Piege}(X))$ sur S ,
- $\mathcal{A}[\sigma][X]$ est une arène colorée de 0 à $d - 1$
- et Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[\sigma][X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ sur X .

Les conditions du théorème 2.13 sont illustrées par la figure 2.4. Notons que le fait que Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[\sigma][X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ sur X signifie que Max a une stratégie gagnante pour le jeu $(\mathcal{A}[X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$, qui ne conseille à Max que des transitions autorisées par la stratégie positionnelle σ .

Démonstration de l'implication directe du théorème 2.13. Dans le cas où d est impair, la preuve est simple. Soit $X = S \setminus \text{Attr}_{\text{Max}}(D)$. D'après le lemme 2.7, X est un piège pour Max. Puisque Max gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur S , on en déduit d'après le lemme 2.8 qu'il gagne le jeu $(\mathcal{A}[X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ sur X . D'autre part, puisque Max gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur S , il gagne en particulier le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp})$ sur S . Enfin, par définition de X , Max gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Att}(D))$ sur $S \setminus X$.

Dans le cas où d est pair, la preuve est moins simple. On commence par montrer qu'il existe une plus grande sous-arène de \mathcal{A} dans laquelle les conditions du théorème 2.13 sont vérifiées puis on montre que cette sous-arène est nécessairement \mathcal{A} elle-même. Le noyau de cette preuve est constitué par le lemme 2.14.

Lemme 2.14. *Soit \mathcal{A} une arène colorée par $\{0, \dots, d\}$, avec d pair. Supposons que Max gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur S . Alors il existe un piège $Y \subseteq S$ pour Min tel que Y est non vide, $\mathcal{A}[Y]$ est colorée par $\{0, \dots, d - 1\}$ et tel que Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[Y], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ sur Y .*

Démonstration. $X = S \setminus \text{Attr}_{\text{Min}}(D)$ est un piège pour Min coloré de 0 à $d - 1$. Soit $Y \subseteq X$ l'ensemble gagnant du joueur Max pour le jeu $(\mathcal{A}[X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$. D'après

le lemme 2.7, Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[Y], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$. Il reste à montrer que Y est non vide.

Supposons le contraire, c'est-à-dire $Y = \emptyset$. On obtient une contradiction en construisant une stratégie σ' pour Min gagnante au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$. $Y = \emptyset$ signifie que Min gagne le jeu $(\mathcal{A}[X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ sur X . Soit σ une stratégie gagnante pour Min à ce jeu. Soit σ_{att} une stratégie positionnelle pour Min dans \mathcal{A} gagnant le jeu d'attraction dans D sur $S \setminus X = \text{Attr}_{\text{Min}}(D)$. La stratégie σ' est définie comme suit. Si l'état courant est dans X , Min utilise σ . Si l'état courant est dans $S \setminus X = \text{Attr}_{\text{Min}}(D)$ alors Min utilise σ_{att} . Une partie infinie p conforme à σ' peut être de deux types. Soit elle atteint infiniment souvent $\text{Attr}_{\text{Min}}(D)$, dans ce cas elle traverse infiniment souvent une transition de priorité d , et comme d est pair, p est gagnée par Min. Soit elle reste ultimement dans $X = S \setminus \text{Attr}_{\text{Min}}(D)$. Dans ce cas, un suffixe de p est conforme à σ' , et est donc gagnée par Min au jeu $(\mathcal{A}[X], \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$. Comme $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$ est clos par concaténation, p est gagnée par Min au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$.

Ainsi, Min gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur S . Or par hypothèse, c'est Max qui gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur S , d'où la contradiction recherchée. \square

Afin de démontrer qu'il existe une plus grande sous-arène dans laquelle les conditions du théorème 2.13 sont vérifiées, on introduit la notion de *triplet gagnant* :

Définition 2.15. Soit \mathcal{A} une arène colorée par $\{0, \dots, d\}$. Soit $Z, X \subseteq S$ et $\sigma \subseteq T$. Alors le triplet (Z, X, σ) est dit *gagnant* si les conditions suivantes sont vérifiées.

1. $Z \subseteq S$ est un piège pour Min et $X \subseteq Z$,
2. σ est une stratégie non-déterministe positionnelle pour Max dans $\mathcal{A}[Z]$ gagnant le jeu $(\mathcal{A}[Z], \text{Piege}(X))$ sur Z ,
3. $\mathcal{A}[\sigma][X]$ est une arène colorée par $\{0, \dots, d-1\}$,
4. le joueur Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[\sigma][X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$.

Soit $(Z_i, X_i, \sigma_i)_{i \in I}$ la famille de tous les triplets gagnants et soit $\mathbf{Z} = (Z_i)_{i \in I}$. Alors montrer que l'implication directe du théorème 2.13 est vraie quand d est paire est équivalent à montrer que $S \in \mathbf{Z}$. C'est une conséquence directe du lemme 2.16 et du lemme 2.17, ce qui achève la preuve de l'implication directe. \square

Lemme 2.16. Soit \mathcal{A} une arène colorée par $\{0, \dots, d\}$, $(Z_i, X_i, \sigma_i)_{i \in I}$ la famille de tous les triplets gagnants et $\mathbf{Z} = (Z_i)_{i \in I}$. Alors \mathbf{Z} est close par union : $\bigcup_{i \in I} Z_i \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. Soit $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$, $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ et soit \preceq un ordre bien fondé sur I . Pour tout état $s \in Z$, on note $i(s) = \min\{i \in I \mid s \in Z_i\}$, et on définit $\sigma = \{t \in T \mid t \in \sigma_{i(\text{source}(t))}\}$. On va démontrer que (Z, X, σ) est un triplet gagnant.

La condition 1 de la définition 2.15 est vérifiée car une union de pièges est un piège.

Montrons que la condition 2 est également vérifiée. σ est clairement une stratégie non-déterministe dans l'arène $\mathcal{A}[Z]$. Soit $p = s_0 s_1 \dots$ une partie dans $\mathcal{A}[Z]$ conforme à σ . Alors puisque pour tout $i \in I$, $\sigma_i(Z_i) \subseteq Z_i$, la suite $i(s_0) i(s_1) \dots$ est \preceq -décroissante dans I donc stationnaire. Finalement, il existe un indice $j \in I$ tel qu'un suffixe de p

est une partie jouée dans l'arène $\mathcal{A}[Z_j]$ conformément à σ_j . Par hypothèse ce suffixe est ultimement piégé dans $X_j \subseteq X$. Ainsi σ gagne le jeu $(\mathcal{A}[Z], \text{Piege}(X))$.

Montrons que la condition 3 est vérifiée. $\mathcal{A}[\sigma][X]$ est une arène ssi tout état de X contrôlé par Max est la source d'au moins une transition de cible dans X . Soit $s \in X \cap S_{\text{Max}}$ et $i = i(s)$. $\mathcal{A}[\sigma_i][X_i]$ est une arène et $x \in x_i$ donc σ_i contient au moins une transition t de source s et de cible dans X_i , et par définition de σ , $t \in \sigma$.

Enfin, il reste à montrer que la condition 4 de la définition 2.15 est vérifiée. Pour chaque $i \in I$, soit τ_i une stratégie pour Max dans l'arène $\mathcal{A}[\sigma_i][X_i]$ qui gagne le jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1}$ sur X_i .

On définit une stratégie τ pour Max dans l'arène $\mathcal{A}[\sigma][X]$ qui gagne le jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1}$ sur X . Soit $p = s_0 \cdots s_n$ une partie finie dans l'arène $\mathcal{A}[Z]$, soit $j = i(s_n)$. Puisque $s_n \in Z_j$, il existe un plus long suffixe p' de p tel que p' soit une partie jouée dans l'arène $\mathcal{A}[Z_j]$. On pose $\tau(p) = \tau_j(p')$.

Montrons que τ gagne le jeu $(\mathcal{A}[\sigma][X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ sur X . Soit $q = r_0 r_1 \cdots$ une partie jouée dans l'arène $\mathcal{A}[\sigma][X]$ conforme à τ . Puisque pour chaque i , τ_i est une stratégie dans l'arène $\mathcal{A}[\sigma_i][X_i]$ et puisque les X_i sont des pièges pour Min, $r_n \in X_i \implies r_{n+1} \in X_i$, et la suite $i(r_0)i(r_1) \dots$ est \leq -décroissante dans I donc stationnaire égale à un certain $j(q) \in I$. Cela implique qu'un suffixe q est conforme à la stratégie $\tau_{j(q)}$ donc q est gagnée par le joueur Max au jeu $(\mathcal{A}[\sigma][X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$.

Cela achève de prouver que (Z, X, σ) est un triplet gagnant. \square

Lemme 2.17. *Soit \mathcal{A} une arène colorée par $\{0, \dots, d\}$, avec d pair. Soit $(Z_i, X_i, \sigma_i)_{i \in I}$ la famille de tous les triplets gagnants et $\mathbf{Z} = (Z_i)_{i \in I}$. Supposons que l'ensemble gagnant du joueur Max au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ est S tout entier. Alors $\bigcup_{i \in I} Z_i = S$.*

Démonstration. La clé de cette preuve est le lemme 2.14. D'après le lemme 2.16, on sait que $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$ est un élément de $\mathbf{Z} = (Z_i)_{i \in I}$. Supposons que $S \setminus Z$ est non vide. On va montrer que cela contredit la maximalité de Z dans \mathbf{Z} . Pour cela, on va construire un triplet gagnant de la forme $(Z \cup Y, \dots)$, où $Y \neq \emptyset$.

Montrons tout d'abord que $S \setminus Z$ est un piège pour Max dans \mathcal{A} , en prouvant que $Z = \text{Attr}_{\text{Max}}(Z)$. Soit σ_{att} une stratégie positionnelle pour Max gagnant le jeu $(\mathcal{A}, \text{Attr}(Z))$ sur $\text{Attr}_{\text{Max}}(Z)$. Soit σ' la stratégie consistant à jouer σ_{att} sur $\text{Attr}_{\text{Max}}(Z)$ et à jouer σ sur Z . Puisque Z est un piège pour Min, il est immédiat de vérifier que $(\text{Attr}_{\text{Max}}(Z), X, \sigma)$ est un triplet gagnant. Par maximalité de Z dans \mathbf{Z} , cela implique que $Z = \text{Attr}_{\text{Max}}(Z)$, donc d'après le lemme 2.8, $S \setminus Z$ est un piège pour Max dans \mathcal{A} .

On va maintenant contredire la maximalité de Z dans \mathbf{Z} en construisant un triplet gagnant $(Y \cup Z, Y \cup X, \sigma')$, avec $Y \neq \emptyset$. Puisque $S \setminus Z$ est un piège pour Max dans \mathcal{A} et que Max gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur S , on sait d'après le lemme 2.7 que Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[S \setminus Z], \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur $S \setminus Z$. En appliquant le lemme 2.14 à l'arène $\mathcal{A}[S \setminus Z]$, on sait qu'il existe $\emptyset \neq Y \subseteq S \setminus Z$ tel que Y est un piège pour Min dans $\mathcal{A}[S \setminus Z]$ et tel que Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[Y], \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur Y .

Construisons le triplet gagnant $(Y \cup Z, Y \cup X, \sigma')$.

Tout d'abord $Z \cup Y$ est un piège pour Min dans \mathcal{A} . En effet, au cours d'une partie dans l'arène \mathcal{A} dont la source est dans Y , si le joueur Min emprunte une transition dont la cible n'est pas dans Y alors cette cible est forcément dans Z , car Y est un piège pour

Min dans $\mathcal{A}[S \setminus Z]$. On en déduit que $\sigma' = \sigma \cup \{t \in T \mid \text{source}(t) \in Y \cap S_{\text{Max}}, \text{but}(t) \in Y \cup Z\}$ est une stratégie non-déterministe pour Max gagnant le jeu $(\mathcal{A}[Y \cup Z], \text{Piege}(Y \cup X))$ sur $Y \cup Z$. Enfin, puisque X est un piège pour Min dans \mathcal{A} , $\mathcal{A}[\sigma'] [X \cup Y]$ est une arène colorée de 0 à $d - 1$ et Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[\sigma'] [X \cup Y], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$.

Cela prouve que $(Y \cup Z, Y \cup X, \sigma')$ est un triplet gagnant, ce qui contredit la maximalité de Z dans \mathbf{Z} et achève la preuve du lemme 2.17. \square

2.3.6 Stratégies gagnantes du joueur Max au jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$

Dans cette sous-section, on prouve la réciproque du théorème 2.13. De plus, on prouve que Max possède des stratégies gagnantes d'un type bien particulier, décrit dans la définition suivante.

Définition 2.18. Soit \mathcal{A} une arène, σ une stratégies pour Max dans \mathcal{A} et m un entier. On dit que σ est m -positionnelle si il existe :

1. un ensemble M de cardinal m ,
2. m stratégies positionnelles $(\sigma_n)_{n \in M}$ dans l'arène \mathcal{A} ,
3. une fonction $\text{sel} : S^* \rightarrow M$ appelée le sélecteur,

telles que pour toute partie finie $s_0 s_1 \cdots s_n \in S^* S_{\text{Max}}$, on a $\sigma(p) = \sigma_{\text{sel}(p)}(s_n)$. Dans ce cas, on identifie σ et $(\text{sel}, (\sigma_n)_{0 \leq n \leq m})$.

Les notions de stratégie positionnelle et 1-positionnelle coïncident. La notion de m -positionnalité peut se caractériser autrement : une stratégie σ est m -positionnelle si et seulement si pour chaque état, elle utilise au plus m transitions différentes à partir de cet état. Néanmoins la présentation en terme de sélecteur est plus intuitive.

Proposition 2.19. Soit \mathcal{A} , colorée par $\{0, \dots, d\}$, où $d > 0$. Soit D l'ensemble des états colorés par d . Supposons qu'il existe un sous-ensemble $X \subseteq S$ tel que $\mathcal{A}[X]$ est une sous-arène colorée par $\{0, \dots, d - 1\}$ et qu'une des deux conditions suivantes soit vraie. Si d est impair,

- le joueur Max gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp})$ sur S ,
- gagne le jeu $(\mathcal{A}[X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ sur X
- et le jeu $(\mathcal{A}, \text{Attr}(D))$ sur $S \setminus X$.

Si d est pair, le joueur Max a une stratégie positionnelle non-déterministe σ telle que :

- σ gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Piege}(X))$ sur S ,
- $\mathcal{A}[\sigma][X]$ est une arène colorée par $\{0, \dots, d - 1\}$,
- et Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[\sigma][X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ sur X .

Alors Max gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur S . De plus Max a une stratégie $(1 + \lceil \frac{d}{2} \rceil)$ -positionnelle pour gagner ce jeu.

Cela montre par exemple que pour le jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_2$, et quelque soit le degré de l'arène considérée, le joueur Max peut faire en sorte de gagner tout en n'utilisant que 2 transitions différentes à partir de chaque état qu'il contrôle.

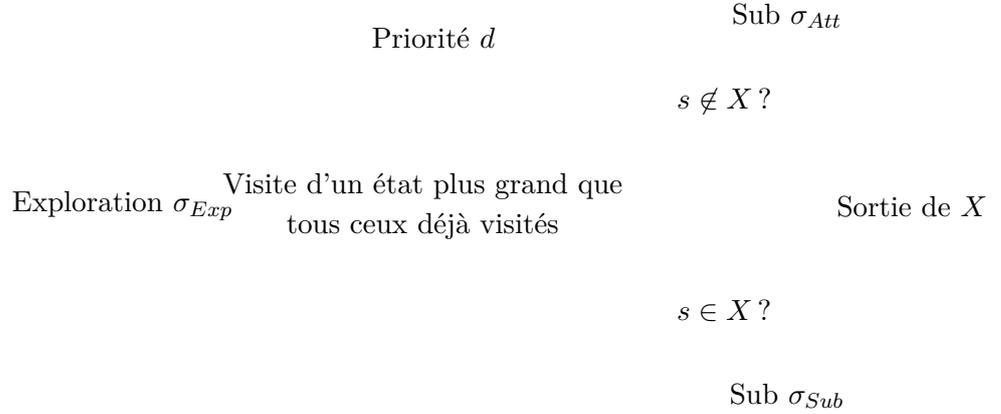


FIG. 2.5 – Règles de transition entre les différents modes de jeu.

Démonstration. On fixe \preceq , un ordre quelconque sur S . On montre la proposition 2.19 par induction sur d .

Dans le cas où $d = 0$, le jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$ est en fait le jeu Exp . Le corollaire 2.5 prouve que ce jeu est positionnel, ce qui permet de conclure immédiatement.

Supposons maintenant que $d > 0$ est impair et que la proposition 2.19 est vraie pour $d - 1$.

Soit \mathcal{A} colorée par $\{0, \dots, d\}$ et vérifiant les conditions de la proposition 2.19. Alors par hypothèse Max gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp})$ sur S et d'après le corollaire 2.5, il possède une stratégie gagnante positionnelle σ_{Exp} . Il possède également une stratégie positionnelle σ_{Attr} gagnant le jeu $(\mathcal{A}, \text{Attr}(D))$ sur $S \setminus X$. D'autre part par hypothèse Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ sur X donc par hypothèse d'induction, il possède une stratégie σ_{Sub} qui est $(1 + \lceil \frac{d-1}{2} \rceil)$ -positionnelle gagnante pour le jeu $(\mathcal{A}[X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ sur X . Soient M_{Sub} un ensemble de taille $1 + \lceil \frac{d-1}{2} \rceil$ et $\text{sel}_{\text{Sub}} : S^* S_{\text{Max}}$ et $(\sigma_m^{\text{Sub}})_{m \in M_{\text{Sub}}}$ le sélecteur et les stratégies positionnelles associées à σ_{Sub} .

On pose $M = \{\text{Exploration}\} \cup M_{\text{Sub}}$, On va construire une stratégie $(1 + \lceil \frac{d}{2} \rceil)$ -positionnelle $\sigma_{\mathcal{A}} = (\text{sel}, (\sigma_m)_{m \in M})$ pour Max qui est gagnante au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$.

Décrivons informellement la stratégie $\sigma_{\mathcal{A}}$. La partie peut être soit dans le mode Exploration, soit dans le mode Sub.

- Dans le mode Exploration, Max joue conformément à sa stratégie positionnelle σ_{Exp} . Quand la partie arrive sur un état s qui n'a pas encore été visité, la partie passe en mode Sub.
- Dans le mode Sub, Max joue conformément aux stratégies σ_{Sub} ou σ_{Attr} , selon que la partie est dans X ou dans $S \setminus X$. Si la partie atteint un état de priorité d , elle passe en mode Exploration.

Formellement, $M = M_{\text{Sub}} \cup \{\text{Exp}\}$ et la stratégie $(1 + \lceil \frac{d}{2} \rceil)$ -positionnelle $\sigma_{\mathcal{A}}(\text{sel}, (\sigma_m)_{m \in M})$

est définie comme suit. Pour $m \in M_{Sub}$, la stratégie positionnelle σ_m consiste à appliquer σ_m^{Sub} quand la partie est dans X et à appliquer σ_{Att} quand la partie est dans $S \setminus X$. La stratégie σ_{Exp} a déjà été définie. Le sélecteur $\text{sel} : S^* \rightarrow M$ est défini inductivement comme suit. Si $\text{col}(s) = d$ alors $\text{sel}(s) = \text{Exp}$, si $s \in X$, $\text{sel}(s) = \text{sel}_{Sub}(s)$ et si $s \notin X$, $\text{sel}(s)$ est un état quelconque de M_{Sub} . Soit $p \in S^*$ et $s \in S$. Si $\text{sel}(p) = \text{Exp}$ et p n'a pas atteint l'état s alors $\text{sel}(ps) = \text{sel}(s)$, sinon $\text{sel}(ps) = \text{Exp}$. Si $\text{sel}(p) = \text{Sub}$ et $\text{col}(s) = d$ alors $\text{sel}(ps) = \text{Exp}$, sinon $\text{sel}(ps) = \text{sel}(p)$.

Montrons que $\sigma_{\mathcal{A}}$ gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur S . Soit p une partie infinie conforme avec la stratégie $\sigma_{\mathcal{A}}$. Par définition de σ_{Exp} il est impossible que le mode de jeu reste indéfiniment *Exploration*. Cela implique qu'il existe deux types de parties différentes. Soit la partie reste ultimement dans le mode de jeu *Sub* soit elle passe infiniment souvent dans le mode de jeu *Exploration*. Dans le premier cas, la partie reste ultimement dans l'arène $\mathcal{A}[X]$, conforme à la stratégie σ_{Sub} . Dans le second cas, elle visite une infinité d'états différents et passe infiniment souvent dans la plus grande priorité impaire d . Dans les deux cas, p est gagnée par Max pour la condition $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$.

Supposons maintenant que $d > 0$ est pair. On va construire une stratégie $(1 + \lceil \frac{d}{2} \rceil)$ -positionnelle $\sigma_{\mathcal{A}}$ gagnante pour le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$.

Par hypothèse, le joueur Max possède une stratégie positionnelle σ qui gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Piege}(X))$ sur S , telle que $\mathcal{A}[\sigma][X]$. De plus, par hypothèse également, le joueur Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[\sigma][X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ sur X . Par hypothèse d'induction, il existe une stratégie $(1 + \lceil \frac{d-1}{2} \rceil)$ -positionnelle σ_{Sub} gagnante pour le jeu $(\mathcal{A}[\sigma][X], \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$. Soit $\text{sel}_{Sub} : X^* \rightarrow M_{Sub}$ le sélecteur de σ_{Sub} et $(\sigma_m^{Sub})_{m \in M_{Sub}}$ les stratégies positionnelles associées.

Construisons maintenant l'ensemble M , le sélecteur sel et les stratégies $(\sigma_m)_{m \in M}$ de la stratégie $(1 + \lceil \frac{d}{2} \rceil)$ -positionnelle $\sigma_{\mathcal{A}}$. On pose $M = M_{Sub}$. Pour $m \in M$, σ_m consiste à appliquer σ_m^{Sub} quand la partie est dans X et σ_{Piege} sinon. Soit $p \in S$ et $s \in S$. Si $s \notin X$, on donne à $\text{sel}(ps)$ une valeur quelconque dans M_{Sub} . Sinon, si $s \in X$, alors on pose $\text{sel}(ps) = \text{sel}_{Sub}(p's)$, où p' est le plus grand suffixe de p qui soit une partie jouée dans l'arène $\mathcal{A}[\sigma][X]$. On définit $\sigma_{\mathcal{A}}$ comme la stratégie $(1 + \lceil \frac{d}{2} \rceil)$ -positionnelle $(\text{sel}, (\sigma_m)_{m \in M_{Sub}})$.

Alors $\sigma_{\mathcal{A}}$ est gagnante au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$. Soit p une partie infinie conforme à $\sigma_{\mathcal{A}}$. Par construction de $\sigma_{\mathcal{A}}$, p est conforme à σ . Comme σ gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Piege}(X))$, p reste ultimement dans l'ensemble d'états X . Par définition de sel , il existe un suffixe p' de p qui est une partie jouée dans l'arène $\mathcal{A}[\sigma][X]$, conformément à σ_{Sub} . Puisque σ_{Sub} est gagnante au jeu $(\mathcal{A}[\sigma][X], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$, on en déduit que $p' \in \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1}$. Comme $\text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1}$ est clos par concaténation, on en déduit que p est gagnante au jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$. Cela termine de prouver que σ est gagnante au jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$, et termine la preuve de la proposition 2.19. \square

Les stratégies gagnantes du joueur Min sont d'un type beaucoup plus simple :

Théorème 2.20. *Le joueur Min a des stratégies positionnelles gagnantes au jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$.*

Démonstration. Soit \mathcal{A} une arène colorée par $\{0, \dots, d\}$, et soit X l'ensemble gagnant du joueur Min au jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$. D'après le lemme 2.8, X est un piège pour le joueur Max. D'après le lemme 2.7, il suffit donc de prouver le théorème 2.20 dans le cas particulier où $X = S$.

La preuve de la proposition se fait par récurrence sur d . Si $d = 0$, le jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$ est en fait le jeu Exp , et il suffit d'appliquer le corollaire 2.5.

Supposons maintenant que d est pair et que le théorème 2.20 est vrai pour toute arène colorée par $\{0, \dots, d-1\}$. Soit D l'ensemble des états colorés par d et $X = \text{Attr}_{\text{Min}}(D)$. Alors d'après le lemme 2.8, $S \setminus X$ est un piège pour Min. D'après le lemme 2.7, Min gagne le jeu $(\mathcal{A}[S \setminus X], \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur $S \setminus X$. Comme $S \setminus X$ est coloré par $\{0, \dots, d-1\}$, on peut appliquer l'hypothèse d'induction donc il existe une stratégie positionnelle σ' qui gagne le jeu $(\mathcal{A}[S \setminus X], \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur $S \setminus X$. Alors Min peut gagner positionnellement le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur S de la façon suivante. Sur $S \setminus X$, il utilise σ' et sur X il utilise une stratégie positionnelle d'attraction dans D . Alors une partie p conforme à cette stratégie peut être de deux types. Soit p atteint infiniment souvent un état de X , dans ce cas p atteint infiniment souvent un état coloré par d et p est gagnée par Min car d est pair. Soit p n'atteint qu'un nombre fini de fois X . Dans ce cas, un suffixe de p est conforme à σ' , donc gagnée par Min. Puisque $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$ est clos par concaténation, p est gagnée par Min. Cela termine la preuve du pas inductif quand d est pair.

La preuve du théorème 2.13 dans le cas où d est impair est moins triviale. En utilisant le lemme 2.11, on commence par prouver qu'il existe une plus grande arène dans laquelle le joueur Min gagne positionnellement le jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$. On montre ensuite que cette plus grande arène est \mathcal{A} tout entier.

Soit $\mathbb{X} = (X_i)_{i \in I}$ la famille des sous-ensembles $X_i \subseteq S$ tels que X_i est un piège pour le joueur Max et tels que le joueur Min gagne positionnellement le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur S . D'après le lemme 2.11, cette famille est stable par union. Soit $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. On va montrer par l'absurde que $X = S$. Soit $Y = S \setminus X$.

Supposons que $Y \neq \emptyset$ et cherchons une contradiction. Pour obtenir cette contradiction, on commence par montrer que Y est un piège pour Min et que Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[Y], \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$.

Par définition de X , il existe une stratégie positionnelle σ_X qui gagne le jeu $(\mathcal{A}[X], \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur X .

Montrons que Y est un piège pour Min. Le joueur Min peut gagner positionnellement le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur $\text{Attr}_{\text{Min}}(X)$. Il lui suffit pour cela d'utiliser une stratégie positionnelle qui attire la partie dans X , puis d'utiliser σ_X . Puisque X est un piège pour Max, une partie conforme à cette stratégie restera ultimement piégée dans X , conforme à σ_X , donc sera gagnée par Min. Par maximalité de X dans \mathbb{X} , on en déduit que $X = \text{Attr}_{\text{Min}}(X)$ et d'après le lemme 2.8, on en déduit que $Y = S \setminus X$ est un piège pour Min.

Montrons que Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[Y], \text{Exp})$ sur Y . Pour cela, on va prouver que les conditions de la proposition 2.19 sont vérifiées par l'arène $\mathcal{A}[Y]$.

Montrons tout d'abord que Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[Y], \text{Exp})$ sur Y . Soit Y_E l'ensemble gagnant de Min au jeu $(\mathcal{A}[Y], \text{Exp})$ et σ_E une stratégie positionnelle gagnante, donnée

par le corollaire 2.5. Alors Min gagne positionnellement le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur $X \cup Y_E$. Pour cela, il lui suffit d'utiliser σ_X quand la partie est dans X et σ_E quand la partie est dans Y_E . Une partie infinie p conforme à cette stratégie peut être de deux types. Soit p reste piégée dans Y_E , conforme à σ_E , et dans ce cas $p \notin \text{Exp}$ est gagnée par Min. Le deuxième cas est celui où p sort de Y_E . D'après le lemme 2.8, Y_E est un piège pour Min dans Y donc dans ce deuxième cas, la partie p sort de Y , c'est-à-dire atteint $X = S \setminus Y$. Comme X est un piège pour Max dans \mathcal{A} , cela implique que la partie p reste dans X , conforme à σ_X , donc p est gagnée par Min. Dans les deux cas, la partie p est gagnée par Min. Ainsi, nous avons prouvé que $X \cup Y_E$ est dans \mathbb{X} , et par maximalité de X dans \mathbb{X} , on en déduit que $Y_E = \emptyset$, c'est-à-dire Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[Y], \text{Exp})$ sur Y .

Montrons que Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[Y \setminus \text{Attr}_{\text{Max}}(D)], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$. Posons $W = Y \setminus \text{Attr}_{\text{Max}}(D)$ et soit W_{Min} l'ensemble gagnant du joueur Min au jeu $(\mathcal{A}[W], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$. Puisque W est colorée par $\{0, \dots, d-1\}$, l'hypothèse d'induction implique que Min possède une stratégie positionnelle σ_W gagnant le jeu $(\mathcal{A}[W], \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ sur W_{Min} . Comme pour le jeu $(\mathcal{A}[Y], \text{Exp})$, Min peut gagner le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_{d-1})$ sur l'ensemble $X \cup W_{\text{Min}}$ en utilisant sa stratégie σ_X sur X et sa stratégie σ_{Min} sur W_{Min} . Par maximalité de X dans \mathbb{X} , $W_1 = \emptyset$.

Finalement, les conditions de la proposition 2.19 sont bien vérifiées, ce qui prouve que Max gagne le jeu $(\mathcal{A}[Y], \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur Y . Comme Y est un piège pour Min, le lemme 2.7 implique que Max gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur Y . Cela contredit l'hypothèse selon laquelle Min gagne le jeu $(\mathcal{A}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)$ sur S , et aboutit à la contradiction recherchée. \square

2.4 Le cas des graphes d'automates à piles

Dans ce chapitre, nous appliquons nos résultats au cas où l'arène considérée est le graphe des configurations d'un automate à pile. Nous obtenons un algorithme qui calcule les ensembles gagnants de chaque joueur pour les jeux Par_d , $\text{Exp} \cup \text{Par}_d$ et $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$. De plus, dans tous les cas excepté celui du joueur Max et du jeu $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$, nous obtenons des algorithmes qui calculent une stratégie positionnelle gagnante associée.

Ces algorithmes sont basés sur le principe suivant.

Les ensembles d'états de l'arène à pile et les stratégies positionnelles de cette arène sont représentables sous forme d'arbres infinis. L'ensemble des directions est l'alphabet de pile de l'automate à pile, et ces arbres sont étiquetés par des ensembles d'état de contrôle ou de transitions de l'automate à pile.

Via cette représentation, il s'avère que les ensembles gagnants et les stratégies positionnelles gagnantes des joueurs sont des langages reconnaissables. En effet, on peut construire des automates alternants à trois priorités qui reconnaissent ces langages.

Le calcul des ensembles gagnants et de stratégies positionnelles gagnantes se réduit finalement à un problème standard : étant donné un langage reconnaissable et non-vide d'arbres infinis, calculer un arbre régulier appartenant à ce langage.

2.4.1 Automates alternants à parité

Tout d'abord, nous rappelons brièvement la notion d'automates alternants à parité sur les arbres, afin de fixer les notations. Le lecteur intéressé par plus de détails pourra consulter [MS87].

La particularité des automates alternants est de pouvoir se dupliquer à chaque étape d'un calcul, en lançant plusieurs calculs parallèles. La façon dont l'automate se duplique est contrôlée via une formule booléenne. Un calcul est acceptant si chacun des calculs parallèles vérifie une condition de parité.

2.4.1.1 Formules booléennes

Étant donné un ensemble S , l'ensemble $B^+(S)$ désigne l'ensemble de toutes les formules positives sur l'ensemble S , c'est-à-dire l'ensemble des mots Φ engendrés par la grammaire :

- $\top, \perp, s \in S$,
- $\Phi \wedge \Phi$,
- $\Phi \vee \Phi$.

Les symboles \top et \perp désignent respectivement vrai et faux. On dit qu'un sous-ensemble $S' \subseteq S$ satisfait une formule $\Phi \in B^+(S)$, et on écrit $S' \models \Phi$ si en assignant \top à tous les éléments de S' et \perp à ceux de $S \setminus S'$, la formule Φ s'évalue à \top . Étant donnée une formule Φ , son dual $\bar{\Phi}$ est obtenu en remplaçant \wedge par \vee , \top par \perp et vice-versa.

2.4.1.2 Automates alternants à parité

Un automate alternant à parité sur les arbres $\Gamma^* \rightarrow \Sigma$ est un quintuplet

$$\mathcal{C} = (S, s_0, Tr, p : S \rightarrow \{0, \dots, d\}),$$

où

- S est un ensemble fini appelé ensemble des états,
- $s_0 \in S$ est l'état initial,
- $Tr : S \times \Sigma \rightarrow B^+(\Gamma \times S)$ est la fonction de transition,
- $p : S \rightarrow \{0, \dots, d\}$ associe à chaque état une priorité.

Décrivons informellement ce qu'est un calcul de l'automate \mathcal{C} sur un arbre $\text{Arb} : \Gamma^* \rightarrow \Sigma$. Un calcul se compose d'une suite infinie d'étape de calculs.

Initialement, une seule copie de \mathcal{C} est placée sur la racine ϵ de Arb , dans l'état s_0 .

À chaque étape de calcul, \mathcal{C} se duplique en plusieurs copies, et chacune des copies descend d'un niveau dans l'arbre. Ainsi, à l'étape n , chaque copie de \mathcal{C} est située sur un des noeuds de profondeur n de Arb , dans un certain état. Il peut y avoir plusieurs copies de \mathcal{C} situées sur le même noeud, dans des états identiques ou différents. Pour passer à l'étape $n + 1$, chaque copie de \mathcal{C} se duplique, et chacune des copies de la copie considérée change d'état et se déplace sur un des fils du noeud courant. La duplication doit respecter la contrainte suivante. Pour chaque copie qui est dans un certain état

q , sur un noeud étiqueté par une lettre a , l'ensemble des couples (r, α) tels que cette copie s'est dupliquée dans l'état r et la direction α doit satisfaire la formule booléenne positive $Tr(q, a)$.

Un calcul de \mathcal{C} sur Arb peut être soit acceptant, soit non-acceptant. Après que toute les étapes de calculs soient effectuées, chaque copie de \mathcal{C} est passée par une suite infinie d'états, à laquelle correspond une suite infinie de priorités. Le calcul est acceptant si pour chaque copie de \mathcal{C} , la plus grande priorité vue infiniment souvent est impaire.

Formellement, un calcul de l'automate \mathcal{C} sur un arbre $\text{Arb} : \Gamma^* \rightarrow \Sigma$ est un arbre étiqueté par $S \times \Gamma^*$ tel que :

- sa racine est étiquetée par (s_0, ϵ) ,
- si un noeud est étiqueté par (s, γ) et ses fils sont étiquetés par $(s_1, \gamma_1) \dots (s_n, \gamma_n)$ alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Gamma$ tel que $\forall 0 \leq i \leq n, \gamma_i = \gamma\alpha_i$ et $\{(\alpha_1, s_1), \dots, (\alpha_n, s_n)\} \models T(s, t(\gamma))$.

Un arbre de calcul de \mathcal{C} est acceptant si pour chaque branche infinie étiquetée par $(s_0, \gamma_0)(s_1, \gamma_1) \dots$, la priorité $\limsup_{n \in \mathbb{N}} p(s_n)$ est impaire.

Définition 2.21. Soit \mathcal{C} un automate alternant à parité sur les arbres $\Gamma^* \rightarrow \Sigma$. On dit qu'un arbre $\text{Arb} : \Gamma^* \rightarrow \Sigma$ est reconnu ou accepté par \mathcal{C} si il existe un calcul acceptant de \mathcal{C} sur t . Le langage des arbres acceptés par \mathcal{C} est noté $\mathcal{L}(\mathcal{C})$.

2.4.1.3 Dual d'un automate alternant

On désigne par $\bar{\mathcal{C}} = (S, s_0, \bar{T}, p')$ le dual de l'automate \mathcal{A} . La fonction de transition de $\bar{\mathcal{C}}$ est définie par $\bar{T}(s, a) = \overline{T(s, a)}$. La fonction de priorité de $\bar{\mathcal{C}}$ est définie par $p'(s) = p(s) + 1$ si $\min_s p(s) = 0$ et $p'(s) = p(s) - 1$ si $\min_s p(s) > 0$.

Théorème 2.22 ([MS87]). *Soit \mathcal{C} un automate alternant à parité sur les arbres infinis. Les langages reconnus par \mathcal{C} et son dual $\bar{\mathcal{C}}$ sont complémentaires.*

Ce résultat constitue un des intérêts principaux de l'utilisation d'automates alternant. Ceux-ci ont la même puissance de reconnaissance que celle des automates non-déterministes [MS95] de Büchi, et on peut les compléter sans changer leur taille. Par opposition, la complémentation d'un automate de Büchi nécessite une augmentation exponentielle du nombre d'états.

Plus généralement, les opérations booléennes entre langages reconnaissables ne coûtent rien algorithmiquement, quand ces langages sont codés sous forme d'automates alternants.

2.4.1.4 Automates déterministes et non-déterministes, de Büchi et simples

Si l'on excepte les automates bidirectionnels et les automates à jetons, la plupart des automates d'arbres infinis couramment utilisés peuvent se voir comme des cas particuliers d'automates alternants à parité.

Les automates déterministes sont un type particulier d'automate alternant où chaque copie se duplique une seule fois dans chaque direction et où l'état de la copie

est totalement déterminé par l'état et l'étiquette courants. Les formules de la table de transition sont du type :

$$\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} (\alpha, s_\alpha).$$

Dans un **automate non-déterministe** chaque copie se duplique une seule fois dans chaque direction, et il existe plusieurs possibilités de choix des états des copies. Les formules de la table de transition sont du type

$$\bigvee_{i=1 \dots n} \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} (\alpha, s_{i,\alpha}).$$

En ce qui concerne le système d'acceptation, les automates de **Büchi** correspondent au cas où les seules priorités apparaissant sont 0 et 1, les automates de **co-Büchi** au cas des priorités 1 et 2, et les automates **simples** au cas où tous les états sont colorés par 1.

2.4.2 Systèmes à piles

Les systèmes à piles modélisent des programmes

- qui ne terminent pas,
- qui utilisent un nombre fini de variables dont le domaine est fini,
- qui peuvent procéder à des appels récursifs de fonctions.

Formellement, on les décrit comme suit.

Définition 2.23. Un système à pile coloré par $\{0, \dots, d\}$ est un quintuplet $\mathcal{P} = (Q, \Gamma, \Delta, \perp, \text{col})$ où :

- Q est un ensemble fini d'état de contrôle,
- Γ est un alphabet fini de pile,
- \perp est une lettre spéciale appelée fond de pile,
- $\perp \notin \Gamma$,
- $\Delta \subseteq Q \times (\Gamma \cup \{\perp\}) \times (\Gamma \cup \{-1\}) \times Q$ est l'ensemble des transitions,
- $\text{col} : Q \rightarrow \{0, \dots, d\}$ colore chaque état avec une priorité.

Il y a deux types de transitions. On dit qu'une transition $(q, \alpha, \beta, r) \in \Delta$ est une transition d'**empilement** si $\beta \in \Gamma$ et une transition de **dépilement** si $\beta = -1$. Dans les deux cas, on dit que c'est une α -transition, une q -transition ou encore une (q, α) -transition.

Concernant la lettre de fond de pile \perp , on suppose toujours qu'il n'existe pas de \perp -transitions de dépilement. En d'autre terme, la procédure principale ne termine pas. D'autre part, il n'existe pas de transition d'empilement du type $(., ., \perp, .)$: il n'y a pas d'appel récursif à la procédure principale.

Nous ne travaillons qu'avec des systèmes à pile complets, dans le sens où, pour chaque couple $(q, \alpha) \in Q \times (\Gamma \cup \{\perp\})$, il existe au moins une (q, α) -transition dans Δ .

Système de transition associé à un système à pile. A tout système à pile \mathcal{P} est naturellement associé un système de transitions $(S_{\mathcal{P}}, T_{\mathcal{P}})$ coloré par $\{0, \dots, d\}$. L'ensemble d'états est $S_{\mathcal{P}} = Q\Gamma^*$, c'est-à-dire les configurations du système à pile. Dans

la configuration $q\gamma$, l'état de contrôle est q et le contenu de la pile est $\perp\gamma$. La dernière lettre du mot $\gamma \in \Gamma^*$ se trouve en haut de la pile. On suppose toujours de manière implicite que \perp se situe en fond de pile.

L'ensemble des configurations est noté $S_{\mathcal{P}}$. Chaque transition $\delta \in \Delta$ du système à pile définit une relation $\xrightarrow{\delta}$ entre les configurations. La relation de transition $T_{\mathcal{P}}$ entre les configurations est l'union des relations $\xrightarrow{\delta}$.

– Soit $q\epsilon$ une configuration dont la pile est vide.

Alors $q\epsilon \xrightarrow{\delta} r\beta$ si il existe une transition d'empilement $\delta = (q, \perp, \beta, r) \in \Delta$.

– Soit $q\gamma\alpha$ une configuration dont la pile n'est pas vide. Alors

• $q\gamma\alpha \xrightarrow{\delta} r\gamma$ si il existe une transition de dépilement $\delta = (q, \alpha, -1, r) \in \Delta$,

• $q\gamma\alpha \xrightarrow{\delta} r\gamma\alpha\beta$ si il existe une transition d'empilement $\delta = (q, \alpha, \beta, r) \in \Delta$.

On pose $T_{\mathcal{P}} = \bigcup_{\delta \in \Delta} \xrightarrow{\delta}$.

Une exécution du système à pile \mathcal{P} est un chemin dans le système de transitions $(S_{\mathcal{P}}, T_{\mathcal{P}})$. Une telle exécution $(q_0\gamma_0, q_1\gamma_1, \dots)$ est dite acceptante si la plus grande couleur vue infiniment souvent est impaire, c'est à dire si $\limsup_{n \in \mathbb{N}} \text{col}(q_n)$ est impaire.

On s'intéresse à la modélisation de programmes interactifs, qui sont contrôlés en partie par leur environnement et en partie par leur utilisateur. Pour cette raison, on considère que l'ensemble des états de contrôle est partitionné en deux ensembles $Q = Q_{\text{Max}} \sqcup Q_{\text{Min}}$. Cette partition s'étend naturellement à l'ensemble des configurations de \mathcal{P} , en posant $S_{\mathcal{A}}^{\text{Max}} = Q_{\text{Max}} \Gamma^*$ et $S_{\mathcal{A}}^{\text{Min}} = Q_{\text{Min}} \Gamma^*$. De même, la fonction col s'étend à $S_{\mathcal{P}}$ en posant $\text{col}(q\gamma) = \text{col}(q)$. Finalement, on obtient une arène à deux joueurs colorée par $\{0, \dots, d\}$:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = (S_{\mathcal{P}}, S_{\mathcal{P}}^{\text{Max}}, S_{\mathcal{P}}^{\text{Min}}, T_{\mathcal{P}}, \text{col}) .$$

2.4.3 Calcul des stratégies positionnelles gagnantes

Dans cette sous-section, on va prouver que pour tous les jeux $\text{Par}_d, \text{Exp}, \text{Exp} \cup \text{Par}_d$ et $\text{Exp} \cap \text{Par}_d$, joués sur une arène à pile, le langage des stratégies positionnelles gagnantes est régulier. On décrit de plus la construction d'un automate d'arbre alternant à parité et à trois priorités de taille $\mathcal{O}(d|Q^2| + |\Delta|)$ qui reconnaît ce langage.

Nous commençons par expliquer comment on peut naturellement décrire une stratégie positionnelle sur une arène à pile par un arbre $\Gamma^* \rightarrow 2^{\Delta}$. On décrit ensuite la construction des automates alternants qui reconnaissent les langages de stratégies positionnelles gagnantes.

Dans la suite, on fixe une arène à pile $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = (S_{\mathcal{P}}, T_{\mathcal{P}})$ associée à un automate à pile $\mathcal{P} = (Q, \Gamma, \Delta, \perp, p)$ et une partition $Q = Q_{\text{Max}} \sqcup Q_{\text{Min}}$ des états.

2.4.3.1 Arbre codant d'une stratégie positionnelle

Le codage d'un ensemble de transitions de $T_{\mathcal{P}}$ par un arbre $\Gamma^* \rightarrow 2^{\Delta}$ est illustré par la figure 2.6.

A chaque sous-ensemble $\sigma \subseteq T_{\mathcal{P}}$ des transitions d'une arène à pile nous associons un arbre $\text{Arb}_{\sigma} : \Gamma^* \rightarrow 2^{\Delta}$, appelé *l'arbre codant* de σ . Ses noeuds sont les contenus de

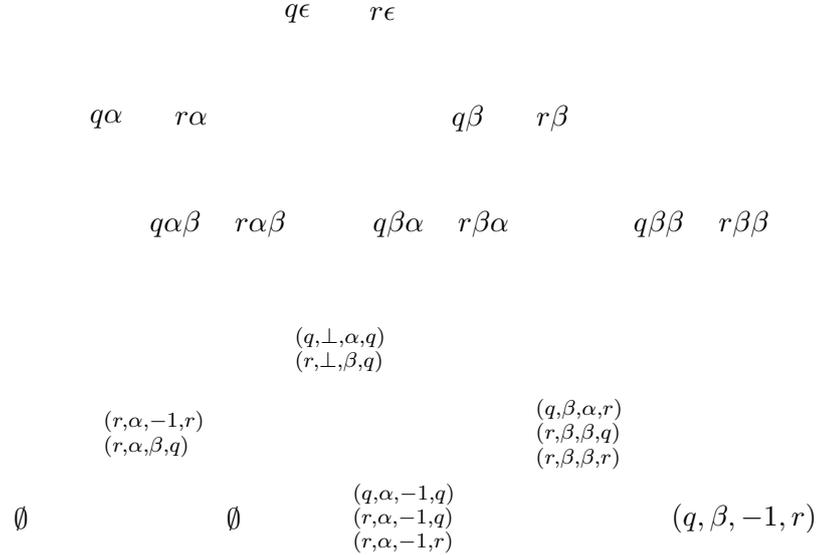


FIG. 2.6 – Un sous-ensemble fini de $T_{\mathcal{P}}$ et son arbre associé. Seuls les étiquettes des états $\{\epsilon, \alpha, \beta, \alpha\alpha, \alpha\beta, \beta\alpha, \beta\beta\}$ sont représentés. Les autres états de l'arbre sont étiquetés par \emptyset .

pile de \mathcal{P} , c'est-à-dire Γ^* . Ces noeuds sont par des ensembles de transitions de \mathcal{P} . Une transition $\delta \in \Delta$ est dans l'étiquette $\text{Arb}_{\sigma}(\gamma)$ du noeud $\gamma \in \Gamma^*$ si il existe un état $q \in Q$ et une configuration $r\gamma'$ telle que $q\gamma \xrightarrow{\delta} r\gamma'$ et $(q\gamma, r\gamma') \in \sigma$.

En particulier, on utilisera cette transformation pour coder des langages de stratégies positionnelles. Notons que la transformation $\sigma \rightarrow \text{Arb}_{\sigma}$ est injective.

De même, on utilise des arbres pour coder des sous-ensembles de configurations : à $X \subseteq S_{\mathcal{P}}$, on associe l'arbre $\text{Arb}_X : \Gamma^* \rightarrow 2^Q$, défini par $q \in \text{Arb}_X(\gamma) \iff q\gamma \in X$.

2.4.3.2 Régularité des langages de stratégies positionnelles gagnantes

Maintenant qu'on a expliqué comment décrire des sous-ensembles d'états ou de transitions de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ par des arbres, la notion de reconnaissabilité d'un langage de stratégies positionnelles prend un sens.

Théorème 2.24. *Soit \mathcal{J} un joueur et $\text{Vic} \in \{\text{Par}_d, \text{Exp} \cup \text{Par}_d, \text{Exp} \cap \text{Par}_d\}$. Soit L_{Vic} le langage d'arbres $\Gamma^* \rightarrow 2^{\Delta} \times 2^S$ défini par :*

$$L_{\text{Vic}} = \{(\sigma, X) \mid X \text{ est un piège pour l'adversaire de } \mathcal{J} \text{ et } \sigma \text{ est une stratégie positionnelle pour } \mathcal{J} \text{ dans } \mathcal{A}[X] \text{ gagnante au jeu } (\mathcal{A}[X], \text{Vic})\}. \quad (2.4)$$

Le langage L_{Vic} est régulier. De plus on peut effectivement construire un automate alternant à parité avec trois priorités et $\mathcal{O}(d|Q|^2 + |\Gamma|)$ états qui reconnaît ce langage.

La démonstration de ce résultat utilise des techniques similaires à celles de [Var98, PM03], malheureusement nous n'avons pas pu utiliser directement ces résultats. Si l'on s'en tient aux jeux de parité, ces techniques s'appliquent parfaitement (cf. [Var98]). Par contre, résoudre le jeu Exp avec les automates bidirectionnels de [Var98] paraît problématique. En effet, pour tester si une stratégie positionnelle est gagnante pour le jeu Exp, il faut vérifier qu'il n'y a pas de cycle dans le graphe sous-jacent. Or nous ne savons pas comment détecter des cycles à l'aide des automates bidirectionnels de [Var98].

Pour faire cela avec des automates d'arbres bidirectionnels, il faudrait être en mesure de marquer un état afin de savoir à chaque instant du calcul si l'automate est revenu à son point de départ ou non. Pour cela, on peut imaginer construire des automates bidirectionnels à jeton. Toutefois, il nous semble qu'en général, l'extraction d'un arbre régulier du langage reconnu par un automate bidirectionnel à jeton est un calcul d'une complexité rédhibitoire.

Démontrons maintenant le théorème 2.24. Notre but est de construire un automate d'arbre reconnaissant le langage L_{Vic} .

La première chose à faire est de construire un automate alternant vérifiant que Arb est bien un arbre codant un couple (σ, X) , où X est un piège pour l'adversaire de \mathcal{J} , et σ est une stratégie de \mathcal{J} dans l'arène $\mathcal{A}[X]$. Cette construction est donnée par le lemme 2.25.

Ensuite, on construit un automate acceptant un tel couple (σ, X) si et seulement si σ est gagnante pour \mathcal{J} au jeu $(\mathcal{A}[X], \text{Vic})$ sur X . Pour cela, on caractérise ces couples par des critères simples sur les cycles et les chemins non bornés dans l'arène $\mathcal{A}[\sigma][X]$. Ces critères sont résumés dans le lemme 2.26. Le lemme 2.29 explique comment les cycles et les chemins non bornés d'un graphe se factorisent en suites de chemins finis d'un type particulier, qu'on appelle des *sauts*. On conclut avec le lemme 2.30, qui construit un automate permettant de tester l'existence de ces sauts. Dans la sous-section 2.4.3.5, on fait la synthèse de ces résultats afin d'obtenir les différents automates alternants promis par le théorème 2.24.

Lemme 2.25. *Soit $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ une arène à pile. Le langage*

$$L = \{(\sigma, X) \mid X \text{ est un piège pour Min} \\ \text{et } \sigma \text{ est une stratégie positionnelle pour Max dans } \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]\}$$

est reconnu par un automate alternant à $\mathcal{O}(|\Gamma| + |Q|)$ états et 2 priorités.

Démonstration. Soit $\text{Arb} = (\text{Arb}_{\sigma}, \text{Arb}_X) : \Gamma^* \rightarrow 2^{\Delta} \times 2^S$ un arbre. Alors Arb code un couple $(\sigma, X) \in L$ si et seulement si, $\forall \gamma \in \Gamma^*, \forall \alpha \in \Gamma$,

1. $\text{Arb}_{\sigma}(\epsilon)$ contient seulement des \perp -transitions.
2. $\text{Arb}_{\sigma}(\gamma\alpha)$ contient seulement des α -transitions.
3. si $\text{Arb}_X(\gamma)$ contient un état s contrôlé par Min et $\delta = (s, \cdot, \alpha, t) \in \Delta$ est une s -transition d'empilement alors $\text{Arb}_X(\gamma\alpha)$ contient t ,

4. si $\text{Arb}_X(\gamma\alpha)$ contient un état s contrôlé par Min et $\delta = (s, \alpha, -1, t) \in \Delta$ est une s -transition de dépilement alors $\text{Arb}_X(\gamma)$ contient t .
5. l'ensemble des états de $\text{Arb}_X(\gamma)$ contrôlés par Max coïncide avec l'ensemble des sources de transitions de $\text{Arb}_\sigma(\gamma)$,
6. si $\text{Arb}_\sigma(\gamma)$ contient une transition d'empilement $\delta = (s, \cdot, \alpha, t) \in \Delta$ alors $t \in \text{Arb}_X(\gamma\alpha)$,
7. si $\text{Arb}_\sigma(\gamma\alpha)$ contient une transition de dépilement $\delta = (s, -1, \alpha, t) \in \Delta$ alors $t \in \text{Arb}_X(\gamma)$,

Les conditions 1 et 2 impliquent le fait qu'il existe un sous-ensemble $\sigma \subseteq T_{\mathcal{P}}$ dont Arb_σ est l'arbre codant. Les conditions 3 et 4 impliquent que Min ne peut sortir de l'ensemble X . Les conditions 5, 6 et 7 impliquent que Max peut rester dans X en jouant les transitions de σ . Par conséquent, X est un piège pour Min et σ est une stratégie dans $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$. La réciproque est claire.

Pour chacune des conditions 1. à 7., construisons un automate alternant qui teste si cette condition est vérifiée. Pour les conditions 1. et 2., l'automate est déterministe et simple. Il parcourt tout l'arbre en vérifiant les étiquettes de chaque noeud, et en mémorisant la tête de pile dans son espace d'état $\Gamma \cup \perp$. Pour la condition 5., c'est le même principe, sauf que l'automate n'a besoin que d'un seul état.

Pour la condition 3. on construit plus facilement le dual de l'automate recherché. Cet automate est un automate alternant simple, d'espace d'états $q_{ini} \cup Q$. Initialement dans un état s_{ini} , il se déplace non-déterministiquement dans l'arbre jusqu'à un noeud γ . Il choisit alors un état t qui est la cible d'une transition $\delta = (s, \cdot, \alpha, t)$ de l'étiquette courante, et mémorise cet état dans son espace d'états $s_{ini} \cup Q$. Il se déplace alors dans la direction α pour vérifier que t est dans l'étiquette de $\text{Arb}_X(\gamma\alpha)$. Les automates testant les conditions 4., 6. et 7. sont similaires.

Le dual d'un automate alternant simple est un automate alternant à une priorité impaire. Puisque les opérations booléenne entre automates additionnent les nombres d'états des automates alternants, on obtient un automate alternant à $2 * (1 + |\Gamma|) + 1 + 4 * (1 + |Q|)$ états et deux priorités qui vérifie la conjonction des conditions 1. à 7. \square

Le lemme suivant caractérise les couples (σ, X) formés d'une stratégie positionnelle σ gagnante sur l'ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$ aux différents jeux que nous étudions.

Pour cela on introduit les notions de cycle et de chemins d'exploration. On appelle chemin d'exploration un chemin visitant un nombre infini d'états différents. Sa priorité est par définition la plus grande priorité vue infiniment souvent le long de ce chemin. On dit qu'un cycle dans le graphe $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ est impair si la plus grande priorité vue le long de ce cycle est impaire.

Soit $X \subseteq S_{\mathcal{P}}$ et σ une stratégie positionnelle pour Max. Rappelons que $\mathcal{A}[\sigma][X]$ est le graphe obtenu à partir de \mathcal{A} en se restreignant à l'ensemble d'états X et en restreignant les transitions contrôlées par le joueur Max à celles autorisées par σ :

$$\mathcal{A}[\sigma][X] = (X, X \cap S_{\text{Max}}, X \cap S_{\text{Min}}, (X \times X) \cap (\sigma \cup (S_{\text{Min}} \times S)), \text{col}) .$$

$q \quad r$

FIG. 2.7 – Un saut de $q\gamma$ à $r\gamma$ dans un arbre de stratégie.

Lemme 2.26. Soit $\mathcal{J} \in \{\text{Max}, \text{Min}\}$ un joueur, $\text{Vic} \in \{\text{Par}_d, \text{Exp} \cup \text{Par}_d, \text{Exp} \cap \text{Par}_d\}$, $X \subseteq S_{\mathcal{P}}$ un piège pour l'adversaire de \mathcal{J} , et σ une stratégie positionnelle pour \mathcal{J} dans $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X]$. Alors σ est gagnante sur X au jeu $(\mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X], \text{Vic})$ si et seulement si les cycles et les chemins d'explorations de $\mathcal{A}[\sigma][X]$ vérifient les conditions données par le tableau 2.1.

| Vic | \mathcal{J} | Cycles | Chemins d'exploration |
|-----------------------------|---------------|------------------|-----------------------------|
| Par _d | Max | Impairs | Impairs |
| | Min | Pairs | Pairs |
| Exp \cup Par _d | Max | Impairs | Pas de condition |
| | Min | Pairs | Pas de chemin d'exploration |
| Exp \cap Par _d | Max | Pas de cycle | Impairs |
| | Min | Pas de condition | Pairs |

TAB. 2.1 – Caractérisation des stratégies positionnelles gagnantes.

Pour prouver le théorème 2.24, il suffit donc de construire des automates alternants vérifiant les différentes conditions données dans le tableau 2.1.

2.4.3.3 Factorisation des cycles et des chemins d'exploration à l'aide de sauts

Pour construire les automates vérifiant les conditions du tableau 2.1, l'observation cruciale est que tout cycle et tout chemin d'exploration peut être factorisé à l'aide de chemins d'un type particulier, qu'on appelle des *sauts*.

Définition 2.27. Soit \mathcal{A} une sous-arène de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$. Un saut de priorité c d'une configuration $q\gamma$ vers une configuration $r\gamma$ dans \mathcal{A} est un chemin dans \mathcal{A} de $q\gamma$ à $r\gamma$, tel que :

- toute configuration sur le chemin est de la forme $s\gamma\gamma'$ où $s \in Q$ et $\gamma' \in \Gamma^*$,
- la priorité maximum rencontrée le long de ce chemin est c .

On note $q\gamma \xrightarrow{c} r\gamma$ si il existe un saut de priorité c de $q\gamma$ à $r\gamma$ et on note $\xrightarrow{\leq c}$ la relation binaire $\cup_{0 \leq d \leq c} \xrightarrow{d}$.

Cette définition est illustrée par la figure 2.7. Les lemmes suivants montrent comment caractériser l'existence de cycles et de chemin d'exploration à l'aide de sauts.

Lemme 2.28. *Soit \mathcal{A} une sous-arène de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$. Il existe un cycle de priorité c dans \mathcal{A} si et seulement si il existe une configuration $q\gamma$ de \mathcal{A} telle que $q\gamma \xrightarrow{c} q\gamma$.*

Démonstration. Prouvons l'implication directe. Soit $q_0\gamma_0, \dots, q_n\gamma_n = q_0\gamma_0$ un cycle dans \mathcal{A} . Soit i tel que γ_i est de longueur minimum. Alors $q_i\gamma_i, \dots, q_n\gamma_n, q_1\gamma_1, \dots, q_i\gamma_i$ est un saut de $q_i\gamma_i$ vers lui-même. La réciproque est triviale. \square

La décomposition des chemins d'exploration à l'aide de sauts est un peu plus complexe. Elle est décrite par le lemme suivant, et illustrée par la figure 2.8.

Lemme 2.29. *Soit \mathcal{A} une sous-arène de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$. Il existe un chemin d'exploration de priorité c dans \mathcal{A} si et seulement si il existe ou bien une suite de configurations $(q_i\gamma_i, r_i\gamma_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ et une suite de transitions d'empilement $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall i \in \mathbb{N}$:*

$$1.a \quad q_i\gamma_i \xrightarrow{c} r_i\gamma_i,$$

$$1.b \quad r_i\gamma_i \xrightarrow{\delta_i} q_{i+1}\gamma_{i+1},$$

$$1.c \quad \text{il existe une infinité de } i \text{ tels que } q_i\gamma_i \xrightarrow{c} r_i\gamma_i.$$

ou bien une suite de configurations $(q_i\gamma_i, r_i\gamma_i, s_i\gamma_i, t_i\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$, une suite de transitions d'empilement $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et une suite de transitions de dépilement $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$2.a \quad r_0 = s_0 \text{ et } r_0\gamma_0 \xrightarrow{c} r_0\gamma_0,$$

$$2.b \quad q_i\gamma_i \xrightarrow{c} r_i\gamma_i, \quad r_i\gamma_i \xrightarrow{c} s_i\gamma_i \text{ et } s_i\gamma_i \xrightarrow{c} t_i\gamma_i,$$

$$2.c \quad r_i\gamma_i \xrightarrow{\delta_i} q_{i+1}\gamma_{i+1} \text{ et } t_{i+1}\gamma_{i+1} \xrightarrow{\lambda_i} s_i\gamma_i.$$

Démonstration. Les conditions 1.a à 1.c impliquent l'existence d'un chemin d'exploration de priorité c : c'est le chemin $q_0\gamma_0 \xrightarrow{\delta_0} r_0\gamma_0 \xrightarrow{c} q_1\gamma_1 \xrightarrow{\delta_1} r_1\gamma_1 \dots$. Les conditions 2.a à 2.c impliquent l'existence d'un chemin d'exploration de priorité c , c'est le chemin qui consiste à descendre puis à remonter l'échelle de la figure 2.8 un nombre infini de fois. On descend d'un cran plus bas à chaque fois, sans oublier d'emprunter le cycle de priorité c à chaque fois qu'on repasse par $r_0\gamma_0$.

Montrons maintenant que l'implication inverse.

Soit $p = (q'_0\gamma'_0, q'_1\gamma'_1, \dots)$ un chemin d'exploration de priorité c dans \mathcal{A} . Puisque h est de priorité c , et quitte à considérer un suffixe de h , on peut supposer que $\forall i, \text{col}(q'_i) \leq c$.

On considère deux cas, selon que $\liminf_{i \in \mathbb{N}} |\gamma'_i| = +\infty$ ou non.

Dans le cas où $\liminf_{i \in \mathbb{N}} |\gamma'_i| = +\infty$, chaque contenu de pile γ'_i n'apparaît qu'un nombre fini de fois dans h . Après cette dernière apparition, les contenus de piles suivants ont γ'_i comme préfixe strict. Cette observation permet de construire une suite $(q_i\gamma_i, r_i\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ qui vérifie les conditions 1.a à 1.c.

Le cas où $\liminf_{i \in \mathbb{N}} |\gamma'_i| < +\infty$ se réduit au cas où h revient infiniment souvent sur la configuration $q'_0\gamma'_0$. On construit par induction une suite $(q_i, r_i, s_i, t_i, \gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ qui vérifie 2.a, 2.b et 2.c. Pour cela, on utilise l'invariant d'induction "il existe une infinité de sauts de priorité inférieure à c entre $r_i\gamma_i$ et $s_i\gamma_i$ ". Chacune des configurations $q_i\gamma_i, r_i\gamma_i, s_i\gamma_i, t_i\gamma_i$ est une des configurations de p . \square

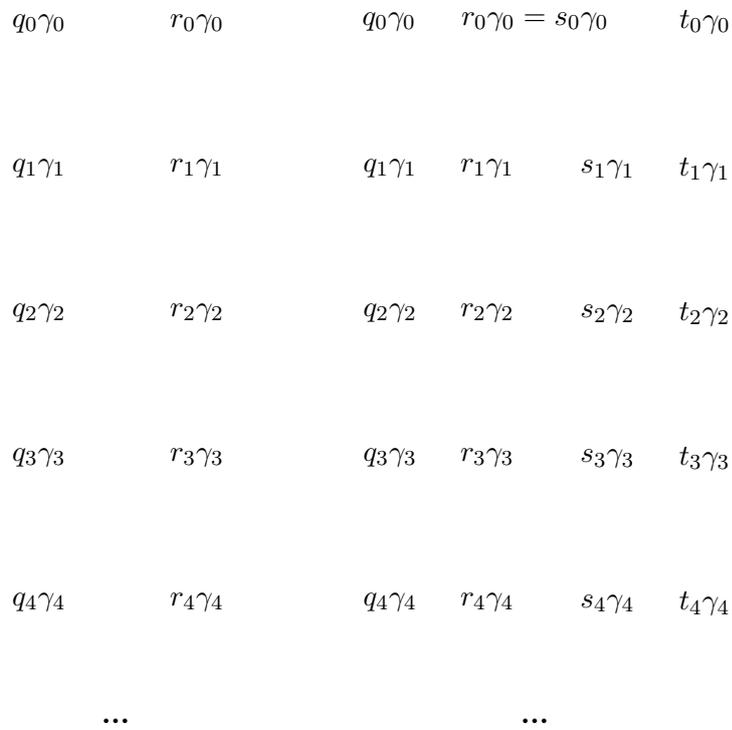


FIG. 2.8 – Deux types particuliers de chemins d’exploration de priorité c . Les lignes pointillées sont des sauts de priorité inférieure à c . Pour le graphe de gauche, une infinité de sauts sont de priorité c . Pour le graphe de droite, la boucle sur $r_0\gamma_0$ est de priorité c .

2.4.3.4 Tester l'existence d'un saut dans l'arbre codant une stratégie

Pour prouver le théorème 2.24, nous construisons tout d'abord un automate alternant $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ qui peut tester l'existence d'un saut dans un graphe $\mathcal{A}[\sigma][X]$. Une fois ceci fait, il est facile de le modifier afin de détecter les cycles et les chemins d'exploration.

Nous utilisons les notations suivantes Pour $\gamma \in \Gamma^*$ et $\text{Arb} : \Gamma^* \rightarrow 2^\Delta$, $\text{Arb}[\gamma]$ désigne l'arbre défini par $\text{Arb}[\gamma](\gamma') = \text{Arb}(\gamma\gamma')$. Soit \mathcal{C} un automate alternant sur les arbres Arb et un état q de cet automate, $\mathcal{C}[q]$ désigne l'automate obtenu en redéfinissant l'état initial de \mathcal{C} comme étant q .

Lemme 2.30. *Il existe un automate de Büchi alternant $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ d'espace d'état $(C \cup \{\text{pop}\}) \times Q^2$ tel que, étant donné $(c, q, r) \in \{0, \dots, d\} \times Q^2$, un arbre $(\text{Arb}_\sigma, \text{Arb}_X)$ codant la sous-arène $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[\sigma][X]$ et une pile $\gamma \in \Gamma^*$,*

$(\mathcal{C}_{\text{saut}}[(c, q, r)] \text{ accepte } \text{Arb}[\gamma]) \iff \text{il existe un saut de priorité } c \text{ de } q\gamma \text{ à } r\gamma \text{ dans } \mathcal{A} .$

Démonstration. Afin de donner l'intuition derrière la construction de l'automate $\mathcal{C}_{\text{saut}}$, on commence par analyser comment un saut sur une pile γ se factorise en un produit de sauts sur des piles du type $\gamma\alpha$. Supposons qu'il existe un saut j de priorité c de $q\gamma$ à $r\gamma$ et soit $j = (q_0\gamma_0, q_1\gamma_1, \dots, q_n\gamma_n)$, où $q_0\gamma_0 = q\gamma$ et $q_n\gamma_n = r\gamma$. Considérons l'ensemble $I = \{i \in \{0, \dots, n\} \mid \gamma_i = \gamma\}$ des instants auxquels le saut j revient sur la pile γ . Nous trions cet ensemble : $I = \{i_0 < i_1 < \dots < i_k = n\}$.

Remarquons qu'on peut supposer $k \leq |Q| + 1$. En effet, si l'on efface tous les cycles inclus dans j , sauf celui de priorité maximale, alors on obtient toujours un saut de $q_0\gamma_0$ à $q_n\gamma_n$, de même priorité que j . De cette façon, nous pouvons supposer que les états $q_{i_0}, q_{i_1}, \dots, q_{i_k}$ sont tous différents, à part peut-être pour deux d'entre eux, ce qui implique $k \leq |Q| + 1$.

Le saut j se factorise donc en :

$$j = (q_{i_0}\gamma) \cdot j_0 \cdot (q_{i_1}\gamma) \cdots j_k \cdot (q_{i_k}\gamma). \quad (2.5)$$

où les j_i sont des chemins non vides.

Cette factorisation a les propriétés suivante . Pour chaque $1 \leq i \leq k$, le chemin j_i est soit un simple état, soit un saut d'une configuration $r_i\gamma\alpha_i$ à une autre configuration $s_i\gamma\alpha_i$, où $r_i, s_i \in Q$ et $\alpha_i \in \Gamma$. De plus, puisque j est un chemin dans \mathcal{A} , on en déduit que pour chaque $1 \leq l \leq k - 1$, $(q_{i_l}\gamma, r_l\gamma\alpha_l)$ et $(s_l\gamma\alpha_l, q_{i_{l+1}}\gamma)$ sont des transitions de \mathcal{A} , respectivement une α_l -transition d'empilement et une transition de dépilement. Enfin d'après la définition de la priorité d'un chemin fini, on déduit que :

$$\text{col}(j) = \max\{\text{col}(q_{i_l}), \text{col}(j_l) \mid l \in \{0, \dots, k\}\}.$$

La construction de $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ est directement inspirée par ces remarques. Quand $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ est dans l'état (c, q, r) sur la pile γ , il devine la suite

$$(q_{i_l}, r_l, \alpha_l, s_l, q_{i_{l+1}}, c_l)_{0 \leq l \leq k-1} \in (Q^2 \times \Gamma \times Q^2 \times C)^{\leq |Q|+1},$$

où $k \leq |Q| + 1$. Puis, $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ vérifie que cette suite est réellement associée à un saut j de $q\gamma$ à $r\gamma$. Pour cela, $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ doit vérifier que pour $0 \leq l \leq k - 1$:

1. $q_{i_0} = q$ and $q_{i_{k+1}} = r$,
2. $t(\gamma)$ contient une transition d'empilement $(q_{i_l}, \cdot, \alpha_l, r_l)$.
3. $(r_l = s_l$ et $\text{col}(r_l) = c_l)$ ou $r_l \gamma \alpha_l \xrightarrow{c_l} s_l \gamma \alpha_l$,
4. $t(\gamma \alpha_l)$ contient une transition de dépilement $(s_l, \alpha_l, -1, q_{i_{l+1}})$,
5. $\max\{\text{col}(q_l), c_l \mid 0 \leq l \leq k\} = c$.

La vérification des conditions 1,2 et 5 peut être faite en restant sur le noeud γ .

Pour vérifier la condition 4, $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ se duplique dans la direction α_l , pour vérifier que la transition $(s_l, \alpha_l, -1, q_{l+1})$ est dans l'étiquette du noeud $\gamma \alpha_l$. Cette copie doit mémoriser le couple $(s_l, q_{l+1}) \in Q^2$ et son état est (pop, s, q_{l+1}) .

Pour vérifier la condition 3, on programme $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ de la façon suivante. Si $r_l = s_l$ et $\text{col}(r_l) = c_l$, la condition 3 est nécessairement vérifiée et $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ ne fait rien. Dans l'autre cas, l'automate $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ se duplique dans la direction α_l afin de vérifier l'existence d'un saut de priorité c_l de $r_l \gamma \alpha_l$ à $s_l \gamma \alpha_l$. Cette copie doit mémoriser le triplet $(c_l, r_l, s_l) \in C \times Q^2$ et son état est (c_l, r_l, s_l) .

Finalement, l'espace d'état de $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ est $\{\text{pop}\} \times Q^2 \cup C \times Q^2$, tous les états ont priorité 1, et la table de transition est :

$$\forall A \subseteq \Delta \text{ et } \forall \alpha \in \Gamma \cup \{\perp\},$$

$$T((\text{pop}, s, q), A) = \begin{cases} \top & \text{si une transition de dépilement } (s, \cdot, -1, q) \text{ est dans } A \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$T((c, r, s), A) = \bigvee_{\substack{(q_l, r_l, \alpha_l, s_l, q_{l+1}, c_l)_{0 \leq l \leq k \leq |Q|} \\ \text{tq les conditions 1,2 et 5 sont vérifiées.}}} \bigwedge_{0 \leq l \leq k} \left((\alpha_l, (\text{pop}, s_l, q_{l+1})) \wedge \left((\alpha_l, (c_l, r_l, s_l)) \vee \prod_{\substack{r_l = s_l \\ p(r_l) = c_l}} \right) \right)$$

où \prod_C signifie $\begin{cases} \top & \text{si } C \text{ est vérifiée} \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$

Puisque tous les états sont de priorité 1 paire, un calcul acceptant de $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ est un calcul fini dans lequel toutes les copies finissent dans l'état \top . Une induction sur la profondeur de ce calcul prouve le lemme 2.30. \square

2.4.3.5 Preuve du théorème 2.24

On peut maintenant terminer la preuve du théorème 2.24.

Preuve du théorème 2.24. D'après le lemme 2.26, il suffit de construire des automates alternants qui vérifient les conditions du tableau 2.1.

En utilisant la caractérisation du lemme 2.28, on peut facilement modifier l'automate $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ du lemme 2.30 afin qu'il détecte l'existence d'un cycle de priorité c dans une arène $\mathcal{AP}[\sigma][X]$ définie par un couple d'arbres $(\text{Arb}_\sigma, \text{Arb}_X)$. Cet automate se déplace

non déterministiquement jusqu'à une pile γ , puis utilise $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ pour vérifier qu'il existe un saut de priorité c d'une configuration $q\gamma$ à elle-même dans $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}[\sigma][X]$.

Nous devons également construire un automate $\mathcal{C}_{\text{expl}}$ détectant l'existence d'un chemin d'exploration de priorité c . L'automate $\mathcal{C}_{\text{expl}}$ devine soit une suite $(q_i, r_i, \gamma_i, \delta_i)$ qui vérifie les conditions 1.a à 1.c du lemme 2.29 ou une suite $(q_i, r_i, s_i, t_i, \gamma_i, \delta_i, \lambda_i)$ qui vérifient les conditions 2.a à 2.c du lemme 2.29.

Premier cas du lemme 2.29. Pendant le calcul, une des copies de $\mathcal{C}_{\text{expl}}$, que nous appellerons la copie principale, suit le trajet $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ tout en devinant les suites $\delta_0 = (r_0, \cdot, \cdot, q_1), \delta_1 = (r_1, \cdot, \cdot, q_2), \dots$ et c_1, c_2, \dots . La copie principale utilise des copies auxiliaires qui vérifient l'existence des sauts $q_i \gamma_i \xrightarrow{c_i} r_i \gamma_i$.

Dans son état initial, la copie principale se déplace de façon non-déterministe vers le noeud γ_0 . Une fois atteint γ_0 , la copie principale devine $\delta_0 = (r_0, \cdot, \cdot, q_1), r_1$ et c_1 , tels que δ_0 est dans l'étiquette de γ_0 . Si $q_1 = r_1$ et $\text{col}(q_1) = c_1$ alors la copie principale ne se duplique pas. Sinon la copie principale se duplique dans la direction α_0 et dans l'état (c_1, q_1, r_1) afin de vérifier l'existence d'un saut de priorité c_1 de $q_1 \gamma_0 \alpha_0 = q_1 \gamma_1$ à $r_1 \gamma_1$.

Ensuite, la copie principale se déplace dans la direction α_0 . Cette copie doit mémoriser d'une part l'état r_1 , et d'autre part si oui ou non $c_1 = c$. Si $c_1 = c$, son état est un état de priorité 2 appelé (hit, \mathbf{r}_1), sinon c'est un état de priorité 1 appelé (norm, \mathbf{r}_1).

Ainsi le calcul est acceptant si et seulement si $c_i = c$ pour une infinité de i , ce qui exprime la condition 1.c du lemme 2.29. Ainsi, notre automate accepte $\mathcal{A}[\sigma]$ si et seulement si il existe un chemin d'exploration dans $\mathcal{A}[\sigma]$ de priorité c qui vérifie les conditions 1.a, 1.b et 1.c du lemme 2.29. L'espace d'états de cet automate est de taille $1 + |\mathcal{C}_{\text{saut}}| + 2|Q|$.

Second cas du lemme 2.29. La construction est similaire au cas précédent. Une copie principale de l'automate devine la suite des transitions d'empilement et de dépilement et utilise $\mathcal{C}_{\text{saut}}$ pour vérifier l'existence des différents sauts. L'espace d'états de cet automate est de taille $1 + |\mathcal{C}_{\text{saut}}| + 2|Q^2|$.

Finalement, pour reconnaître le langage L_{Vic} du théorème 2.24, on a besoin de l'automate donné par le lemme 2.25, ainsi que de d automates de chacun des deux types ci-dessus, afin de vérifier les conditions du tableau 2.1. L'automate alternant obtenu a donc $\mathcal{O}(d|Q^2| + |\Gamma|)$ états. \square

2.4.4 Calcul des ensembles d'états gagnants

Théorème 2.31. *Soit \mathcal{P} un système à pile coloré par $0, \dots, d$. Soit \mathcal{J} un joueur et $\text{Vic} \in \{\text{Par}_d, \text{Exp}, \text{Exp} \cup \text{Par}_d\}$ une condition de victoire. Alors l'arbre $\Gamma^* \rightarrow 2^Q$, qui associe à une pile γ l'ensemble*

$$\{q \in Q \mid q\gamma \text{ est gagnant pour } \mathcal{J} \text{ au jeu } (\mathcal{A}_{\mathcal{P}}, \text{Vic})\}$$

est régulier. On peut calculer effectivement un graphe de taille $2^{\mathcal{O}(d|Q|^2 + |\Gamma|)}$ dont cet arbre est le dépliage.

Démonstration. Le théorème 2.24 entraîne qu'on peut construire un automate alternant à trois priorités et avec $\mathcal{O}(d|Q|^2 + |\Gamma|)$ états, qui reconnaît le langage L_4 des quadruplets $(\sigma_{\text{Max}}, X_{\text{Max}}, \sigma_{\text{Min}}, X_{\text{Min}})$ tels que

- $(X_{\text{Max}}, X_{\text{Min}})$ est une partition de $S_{\mathcal{P}}$,
- X_{Max} est un piège pour Min,
- X_{Min} est un piège pour Max,
- σ_{Max} gagne le jeu $(\mathcal{A}[X_{\text{Max}}], \text{Vic})$,
- et σ_{Min} gagne le jeu $(\mathcal{A}[X_{\text{Min}}], \text{Vic})$.

Il existe un tel quadruplet si et seulement si X_{Max} est l'ensemble gagnant du joueur Max et X_{Min} est l'ensemble gagnant du joueur Min. En effet, d'après le théorème 2.4, les jeux Exp et $\text{Exp} \cup \text{Par}_d$ sont positionnels, et d'après [Mos91], le jeu de parité est positionnel sur les arènes infinies. Comme de plus ces conditions sont préfixe-indépendantes, le lemme 2.8 entraîne que les ensembles gagnants à ces jeux sont des pièges pour l'adversaire.

On en déduit que le langage L_4 est non vide. De plus d'après le théorème 2.24, il est reconnu par un automate alternant à parité avec trois priorités et $\mathcal{O}(d|Q|^2 + |\Gamma|)$ états. Soit L_2 le projeté du langage L_4 sur les composantes X_{Max} et X_{Min} . Alors comme L_4 est non vide, L_2 est non vide, et contient un unique couple $(X_{\text{Max}}, X_{\text{Min}})$ qui décrit la partition des états de $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ entre les états gagnants pour Max et les états gagnants pour Min.

Pour construire le graphe dont le dépliage est L_2 , on commence par non-déterminiser l'automate alternant reconnaissant L_4 . On obtient un automate non-déterministe à trois priorités qui possède $2^{\mathcal{O}(d|Q|^2 + |\Gamma|)}$ états. En projetant sur les composantes X_{Max} et X_{Min} , on obtient un automate non-déterministe de même taille, qui reconnaît l'unique arbre contenu dans L_2 . Il est standard d'en extraire un arbre régulier de même taille, en temps quadratique en la taille de l'automate. \square

Théorème 2.32. *Soit \mathcal{P} un système à pile coloré par $\{0, \dots, d\}$ et $\mathcal{J} \in \{\text{Max}, \text{Min}\}$ un joueur. Alors l'arbre $\Gamma^* \rightarrow 2^Q$, qui associe à une pile γ l'ensemble*

$$\{q \in Q \mid q\gamma \text{ est gagnant pour } \mathcal{J} \text{ au jeu } (\mathcal{A}_{\mathcal{P}}, \text{Exp} \cap \text{Par}_d)\}$$

est régulier. On peut calculer effectivement un graphe de taille $2^{\mathcal{O}(d^2|Q|^2 + |\Delta|)}$ dont cet arbre est le dépliage.

Démonstration. On se base sur la caractérisation du théorème 2.13. On suppose d impair. On définit la notion de d -preuve de victoire qui est un $5\frac{d}{2}$ -uplet,

$$(X_0, \sigma_{\text{Exp}}^0, \sigma_{\text{Att}}^0, X_1, \sigma_{\text{Piege}}^1, X_2, \sigma_{\text{Exp}}^2, \dots, X_d, \sigma_{\text{Piege}}^d),$$

tel que $\emptyset = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_3 \dots \subseteq X_d$, et pour $0 \leq c \leq \frac{d-1}{2}$:

1. $\mathcal{A}_{2c} = \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[\sigma_{\text{Piege}}^{2c+1}[X_{2c}]]$ est une arène colorée de 0 à $2c$,
2. $\mathcal{A}_{2c+1} = \mathcal{A}_{\mathcal{P}}[X_{2c+1}]$ est une arène colorée de 0 à $2c+1$,
3. σ_{Exp}^{2c} est une stratégie pour Max dans \mathcal{A}_{2c} qui gagne le jeu $(\mathcal{A}_{2c}, \text{Exp})$ sur X_{2c} ,

4. σ_{Attr}^{2c} est une stratégie pour Max dans \mathcal{A}_{2c} qui gagne le jeu $(\mathcal{A}_{2c}, Attr(2c))$ sur $X_{2c} \setminus X_{2c-1}$,
5. σ_{Piege}^{2c+1} est une stratégie pour Max dans \mathcal{A}_{2c+1} qui gagne le jeu $(\mathcal{A}_{2c+1}, Piege(X_{2c}))$ sur X_{2c+1} .

En utilisant les mêmes techniques que précédemment, on montre que le langage des preuves de victoire est reconnaissable par un automate alternant à trois priorités. En effet, les conditions 1. et 2. sont vérifiables par un automate similaire à celui du lemme 2.25, et les conditions 3., 4. et 5. par un automate similaire à celui du théorème 2.24. Finalement, le langage des preuves de victoires est reconnu par un automate de taille $\mathcal{O}(d^2|Q|^2 + |\Gamma|)$.

D'après le théorème 2.13 et le théorème 2.20, X_d est l'ensemble gagnant du joueur Max si et seulement si il existe

1. une preuve de victoire vérifiant les conditions . à 5. ci-dessus,
2. tel que X_d est un piège pour Min dans $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$,
3. et tel qu'il existe une stratégie positionnelle pour Min gagnant le jeu $Exp \cap Par_d$ sur $S_{\mathcal{P}} \setminus X_d$.

On conclut comme dans le théorème 2.31. □

Chapitre 3

Positionnalité des jeux stochastiques

Résumé. Ce chapitre a pour cadre les jeux stochastiques à information complète, et à nombre fini d'états. On reprend la problématique du chapitre 1, dans le cadre plus large des jeux stochastiques : quelles fonction de paiement assurent l'existence de stratégies optimales positionnelles ?

Notre résultat principal établit toute fonction de paiement préfixe-indépendante et vérifiant une propriété simple appelée propriété de séparation, est positionnelle pour les jeux à un joueur. Ce résultat est énoncé dans le théorème 3.17, section 3.7. Les sections précédentes établissent les propriétés des jeux stochastiques nous permettant d'aboutir à ce théorème. Dans la section 3.3 on décrit une propriété remarquable des jeux à zéro joueur (c'est-à-dire des chaînes de Markov) munis de fonctions de paiement préfixe-indépendantes. La démonstration du théorème 3.17 se fait par induction sur le nombre d'actions disponibles et dans la section 3.4, nous introduisons la notion de split d'une arène qui permet de réaliser cette induction. Les deux sections suivantes établissent des propriétés des parties qui ne reviennent jamais ou au contraire infiniment souvent dans leur état de départ. (théorèmes 3.14 et 3.16). Enfin, dans la section 3.7, on effectue la synthèse de ces différentes propriétés afin d'obtenir le théorème 3.17, c'est-à-dire la preuve que toute fonction de paiement séparante et préfixe-indépendante est positionnelle pour les jeux à un joueur.

Ces résultats sont ensuite transférés dans la section 3.8 au cadre plus général des jeux à deux joueurs (théorème 3.19). Un résultat similaire avait été présenté dans la section 1.4, dans le cadre plus restreint des jeux non-stochastiques (théorème 1.8).

Des applications de ces résultats sont présentées dans la section 3.9. D'une part, on reprove simplement et de manière unifiée plusieurs preuves connues de positionnalité, et d'autre part on génère de nouveaux exemples de fonctions de paiement positionnelles pour les jeux stochastiques à deux joueurs ou les processus de décision markoviens.

3.1 Introduction

Ce chapitre a pour cadre les jeux stochastiques à information complète et à nombre fini d'états. On reprend la problématique du chapitre 1, dans le cadre plus large des jeux stochastiques : quelles fonctions de paiement assurent l'existence de stratégies optimales positionnelles, quelle que soit l'arène dans laquelle on joue ?

Pour répondre à cette question, il suffit en fait de s'intéresser au cas particulier des jeux stochastiques à un joueur, communément appelés processus de décision markoviens. En effet, comme dans le cas des jeux sur des graphes finis, on établit dans le théorème 3.19 que la caractérisation des jeux positionnels se réduit au cas des jeux stochastiques à un joueur. Cela fait écho au théorème 1.8.

L'existence de stratégies optimales positionnelles dans les jeux stochastiques en général et les processus de décision markoviens en particulier a attiré l'attention de nombreux auteurs, que ce soit dans le cadre des jeux de parité [CY90, CJH03, Zie04], des jeux escomptés [Sha53, CMH06], de la limite supérieure [MS96] ou du paiement en moyenne [Bie87, NS03]. Les différentes preuves présentées dans la littérature sont très hétérogènes. En particulier la preuve présentée dans [Bie87] est complexe et repose sur d'autres résultats et la preuve présentée dans le second chapitre de [NS03] est complexe et non adaptable à d'autres exemples.

Dans ce chapitre, on présente un théorème qui unifie et simplifie tous ces résultats. En effet, tous ces jeux, ou plutôt toutes les fonctions de paiement définissant ces jeux ont une propriété commune. Cette propriété, appelée propriété de séparation est présentée dans la définition 3.9. Nous établissons dans le théorème 3.17 que toute fonction de paiement séparante et préfixe-indépendante sont positionnelles pour les processus de décision markoviens.

Ce résultat permet d'une part d'unifier plusieurs résultats connus, et d'autre part de générer de nouveaux exemples de fonctions de paiement positionnelles pour les jeux stochastiques à deux joueurs ou les processus de décision markoviens (section 3.9).

Comme dans le cas des jeux sur des graphes finis, nos motivations pour étudier l'existence de stratégies positionnelles dans les jeux stochastiques peuvent se résumer comme suit : les jeux positionnels ont de bonnes propriétés algorithmiques et sont donc des outils utilisables en théorie du contrôle.

En effet, si l'on sait qu'une fonction de paiement est positionnelle pour les jeux stochastiques à deux joueurs, alors on a un algorithme exponentiel pour calculer les valeurs et des stratégies optimales, pour peu qu'on sache calculer les valeurs des jeux à 0 joueur. Cet algorithme est similaire à celui présenté dans la section 1.1.2. Dans le cadre stochastique, un jeu à 0 joueur est une chaîne de Markov, et le calcul des valeurs d'un tel jeu est donc moins trivial que dans le cadre des jeux sur des graphes. Toutefois, ce calcul peut s'effectuer en temps polynomial dans tous les exemples que nous connaissons. D'autre part, l'existence de stratégies positionnelles dans les processus de décision markoviens est un argument clé pour obtenir des algorithmes polynomiaux calculant les valeurs de ces processus [FV97].

En terme de contrôle des systèmes stochastiques, nos résultats permettent d'obtenir un langage de spécifications quantitatives pour les systèmes stochastiques et ayant de

bonnes propriétés algorithmiques, dans la lignée de [BS78, dA97, dAHK98, dAHM01, dAM01, dA03, dAHM03, dAFH⁺04, CHJ04, CHJ05, Cha06, CMH06]. Plus de détails sont donnés dans l'introduction du chapitre 1.

3.2 Processus de décision Markoviens

Les processus de décision Markoviens sont des modèles naturels des systèmes à événements discrets qui sont contrôlables et dont les transitions sont stochastiques [dA97, dA03]. En d'autres termes, ce sont des jeux stochastiques à un joueur.

Dans cette section, on introduit formellement les notions d'arène stochastique, de stratégie, de mesure de probabilité associée à une stratégie, d'espérance de gain et de valeur d'un état. Cette présentation n'est pas tout à fait standard, car on sépare distinctement la notion d'*arène de jeu*, qui spécifie la façon dont les joueurs interagissent, et la notion de *fonction de paiement*, qui spécifie les intérêts des deux joueurs.

3.2.1 Arènes et parties

Similairement au cadre non-stochastique du chapitre 1, les jeux que l'on considère se jouent dans des *arènes*. Toutefois, on considère maintenant des arènes stochastiques, dans le sens où le choix d'une action par un joueur ne détermine pas totalement l'état suivant du jeu, mais juste une distribution de probabilité selon laquelle le nouvel état du jeu est choisi aléatoirement. Étant donné un ensemble S , l'ensemble des distributions de probabilités sur S est noté

$$\mathcal{D}(S) = \{p \in [0, 1]^S \mid \sum_{s \in S} p(s) = 1\}.$$

Formellement, la notion d'arène est redéfinie de la manière suivante.

Définition 3.1. Soit C un ensemble quelconque, appelé l'ensemble des couleurs. Une arène \mathcal{A} à un joueur colorée par C est un quintuplet

$\mathcal{A} = (S, A, (A(s))_{s \in S}, \delta(\cdot|\cdot, \cdot), \text{col})$, où

- S est l'ensemble des états,
- A est l'ensemble des actions et pour $s \in S$, $A(s) \subseteq A$ est l'ensemble des actions disponibles dans l'état s ,
- pour chaque $s, t \in S$ et $a \in A(s)$, $\delta(t|s, a) \in \mathcal{D}(S)$ est la probabilité de transition vers l'état t quand le jeu est dans l'état s et qu'on choisit l'action a . Un triplet $(s, a, t) \in S \times A \times S$ tel que $\delta(t|s, a) > 0$ est appelé une *transition*.
- La fonction $\text{col} : S \times A \times S \rightarrow C$ associe une couleur à chaque transition.

Une *partie infinie* dans \mathcal{A} est une suite $h = s_0 a_1 s_1 \cdots \in S(AS)^\omega$ telle que pour tout $i \geq 0$, (s_i, a_{i+1}, s_{i+1}) est une transition. L'état s_0 est appelé la *source* de q . L'ensemble des parties infinies est noté $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^\omega$ et l'ensemble des parties infinies de source s est noté $\mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega$. Une *partie finie* dans \mathcal{A} est une suite $h = s_0 a_1 \cdots a_{n-1} s_n \in S(AS)^*$ telle que pour tout $i < n$, (s_i, a_{i+1}, s_{i+1}) est une transition. L'état s_0 est appelé la *source* de q et l'état s_n sa *cible*. L'ensemble des parties finies est noté $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}^*$, et $\mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$ si on se restreint aux parties de sources s .

3.2.2 Stratégies et mesures associées

Une stratégie dans \mathcal{A} est une application $\sigma : \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^* \rightarrow \mathcal{D}(A)$ telle que pour toute partie finie $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^*$ de cible t , la distribution $\sigma(h)$ ne charge avec probabilité non-nulle que les actions disponibles dans t :

$$(\sigma(h)(a) > 0) \implies (a \in A(t)).$$

L'ensemble des stratégies dans l'arène \mathcal{A} est noté $\Sigma_{\mathcal{A}}$. Certains types de stratégies nous intéressent tout particulièrement :

Définition 3.2. Soit $\sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ une stratégie. Elle est dite

- *pure* si $(\sigma(h)(a) > 0) \implies (\sigma(h)(a) = 1)$,
- *stationnaire* si $\sigma(s_0 \dots s_n)$ dépend uniquement de s_n ,
- *positionnelle* si elle est pure et stationnaire.

La donnée d'un état initial s et d'une stratégie σ définit naturellement une mesure de probabilités \mathbb{P}_s^σ sur l'ensemble $\mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega$ des parties infinies de source s .

Avant de définir cette mesure de probabilité, nous munissons $\mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega$ d'une tribu, construite comme suit. On note \sqsubseteq l'ordre préfixe sur les mots finis et infinis. Pour toute partie finie $h = sa_1s_1 \dots s_n \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$ de source s , on note \mathcal{O}_h l'ensemble des parties infinies de source s qui ont h pour préfixe, c'est-à-dire :

$$\mathcal{O}_h = \{h' \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega \mid h \sqsubseteq h'\} .$$

L'ensemble $\mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega$ est muni de la tribu engendrée par la famille d'ensembles $(\mathcal{O}_h)_{h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*}$.

On travaillera principalement avec les variables aléatoires suivantes :

$$\begin{aligned} S_n(s_0a_1s_1 \dots) &= s_n && \text{le } (n+1)\text{-ième état visité,} \\ A_n(s_0a_1s_1 \dots) &= a_n && \text{la } n\text{-ième action choisie,} \\ H_n &= S_0A_1 \dots A_nS_n && \text{l'histoire des } n \text{ premiers tours de jeu,} \\ N_s &= |\{n > 0 : S_n = s\}| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} && \text{le nombre de passage dans un état } s. \end{aligned}$$

Par abus de notation, pour toute partie finie $h = s_0a_1 \dots s_n \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$, et pour toute action $a \in A$, l'évènement $\{H_n = h\}$ sera souvent noté $\{h\}$, et l'évènement $\{H_n = h, A_{n+1} = a\}$ sera noté $\{ha\}$.

Un théorème de I. Tulcea [BS78] implique le résultat suivant.

Proposition 3.3. Soit \mathcal{A} une arène stochastique et s un état de \mathcal{A} . Il existe une unique mesure de probabilité \mathbb{P}_s^σ sur $\mathbf{P}_{\text{arn},s}^\omega$ telle que :

$$\mathbb{P}_s^\sigma(ha \mid h) = \sigma(h)(a) , \tag{3.1}$$

$$\mathbb{P}_s^\sigma(har \mid ha) = \delta(r \mid t, a) . \tag{3.2}$$

De manière équivalente, la mesure \mathbb{P}_s^σ de l'évènement $\{h\}$ est définie inductivement comme suit.

$$\forall t \in S, \quad \mathbb{P}_s^\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = s \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $t \in S$ un état, $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$ une partie finie de source s et de cible t , et $a \in A(h)$. Alors :

$$\mathbb{P}_s^\sigma(har) = \mathbb{P}_s^\sigma(h) \cdot \sigma(h)(a) \cdot \delta(r|t, a).$$

Par le théorème de Caratheodory, \mathbb{P}_s^σ s'étend de manière unique en une mesure sur $\mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega$. Dans la suite de ce chapitre, chaque variable aléatoire X que l'on considérera sera soit minorée, soit majorée. Cette condition assure que, quel que soit la stratégie σ considérée, l'espérance sous \mathbb{P}_s^σ de X est bien définie. On note $\mathbb{E}_s^\sigma[X]$ cette espérance.

Les propriétés suivantes de S_n , A_n et H_n nous seront très utiles.

Lemme 3.4 (de décalage). *Soit \mathcal{A} une arène, $s, t \in S$ des états, $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$ une partie finie de source s et de cible t , σ une stratégie dans \mathcal{A} , et X une variable aléatoire minorée ou majorée. Alors*

$$\mathbb{E}_s^\sigma[X | h] = \mathbb{E}_t^{\sigma[h]}[X[h]], \quad (3.3)$$

où $\sigma[h]$ et $X[h]$ sont définies par $\sigma[h](s_0a_1 \cdots s_n) = \sigma(ha_1 \cdots s_n)$ et $X[h](s_0a_1s_1 \cdots) = X(ha_1s_1 \cdots)$.

Démonstration. Remarquons que puisque $\sup X \neq +\infty$ ou $\inf X \neq -\infty$, les valeurs de (3.3) sont bien définies. Soit $l \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$ et X_l la fonction indicatrice de l'événement $\{h\}$. Nous commençons par montrer que (3.3) est vérifiée quand $X = X_l$.

Supposons que l est un préfixe de h , alors $\mathbb{E}_s^\sigma[X_l | h] = 1$ et $X_l[h] = 1$ donc (3.3) est vérifiée dans ce cas.

Maintenant supposons que h est un préfixe de l , alors il existe $a_1s_1a_2 \cdots s_n \in (AS)^*$ tel que $l = ha_1s_1a_2 \cdots s_n$. Alors, par définition de \mathbb{P}_s^σ , c'est-à-dire les équations (3.1) et (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_s^\sigma[X_l | h] &= \mathbb{P}_s^\sigma(l | h) \\ &= \sigma(h)(a_1) \cdot \delta(s_1|t, a_1) \cdots \sigma(ha_1s_1 \cdots s_{n-1})(a_n) \cdot \delta(s_n|s_{n-1}, a_n) \\ &= \mathbb{P}_t^{\sigma[h]}(ta_1s_1 \cdots a_ns_n) \\ &= \mathbb{E}_t^{\sigma[h]}[X_l[h]]. \end{aligned}$$

Donc (3.3) est bien vérifiée dans ce cas.

Maintenant supposons que h n'est pas un préfixe de l , et l n'est pas un préfixe de h . Alors les événements $\{l\}$ et $\{h\}$ sont disjoints, et $X_l[h]$ est uniformément égal à 0. On en déduit $\mathbb{E}_s^\sigma[X_l | h] = \mathbb{P}_s^\sigma(\mathcal{O}_l | \mathcal{O}_h) = 0 = \mathbb{E}_t^{\sigma[h]}[X_l[h]]$, et de nouveau (3.3) est vérifiée dans ce cas.

Donc, pour tout $l \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$, l'équation (3.3) est vérifiée pour $X = X_l = \mathbf{1}_{\mathcal{O}_l}$. Puisque la classe des ensembles \mathcal{O}_h engendre la tribu de $\mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega$, nous en déduisons que (3.3) est vérifiée pour toute variable aléatoire. \square

Le lemme suivant nous sera également très utile.

Lemme 3.5. Soit \mathcal{A} une arène, s un état de \mathcal{A} , $E \subseteq \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega$ un évènement, et σ et τ deux stratégies. Supposons que σ et τ coïncident sur E , au sens où pour toute partie $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$ qui est le préfixe d'une partie infinie dans E alors $\sigma(h) = \tau(h)$. Dans ce cas,

$$\mathbb{P}_s^\sigma(\cdot \mid E) = \mathbb{P}_s^\tau(\cdot \mid E) . \quad (3.4)$$

Démonstration. On commence par prouver :

$$\mathbb{P}_s^\sigma(E) = \mathbb{P}_s^\tau(E) \quad (3.5)$$

Soit $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$ et $E = \mathcal{O}_h$. Alors l'égalité (3.5) est une conséquence directe de la définition de \mathbb{P}_s^σ et \mathbb{P}_s^τ . Puisque les ensembles \mathcal{O}_h engendrent la tribu sur $\mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega$, l'équation (3.5) est vraie pour tout évènement E .

Soit $F \subseteq \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega$ un évènement. Alors σ et τ coïncident sur $E \cap F$. En appliquant (3.5) avec $E \cap F$, on obtient $\mathbb{P}_s^\sigma(E \cap F) = \mathbb{P}_s^\tau(E \cap F)$. Avec (3.5), on en déduit (3.4). \square

3.2.3 Fonctions de paiements, jeux et valeur d'un état

On introduit maintenant la notion de fonction de paiement. La définition diffère légèrement de celle du cadre non-stochastique du chapitre 1. On doit en effet s'assurer que pour toute stratégie σ et tout état initial s , l'espérance de ϕ sous la probabilité \mathbb{P}_s^σ est toujours définie.

Définition 3.6. Une fonction de paiement sur un ensemble fini de couleurs C est une application $\phi : C^\omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui est mesurable et qui est soit majorée soit minorée.

On vérifie sans mal que toutes les fonctions introduites dans la section 1.3 sont bien des fonctions de paiement, au sens de la définition précédente.

Un jeu à un joueur est un couple $G = (\mathcal{A}, \phi)$ où \mathcal{A} est une arène stochastique à un joueur et ϕ une fonction de paiement sur l'ensemble des couleurs de \mathcal{A} .

L'espérance de gain associée à une stratégie σ dans un jeu G est la valeur $\mathbb{E}_s^\sigma[\phi]$, où pour alléger les notations $\phi : C^\omega \rightarrow \mathbb{R}$ s'étend naturellement en $\phi : \mathbf{P}_{\mathcal{A}}^\omega \rightarrow \mathbb{R}$, en posant $\phi(s_0 a_1 s_1 \cdots) = \phi(\text{col}(s_0, a_1, s_1)(s_1, a_2, s_2) \cdots)$.

La valeur d'un état s dans le jeu $G = (\mathcal{A}, \phi)$ est l'espérance de gain maximum :

$$\text{val}_G(s) = \sup_{\sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}}} \mathbb{E}_s^\sigma[\phi].$$

Soit $\mathcal{A} = (S, A, \delta(\cdot|\cdot, \cdot), \text{col})$ une arène à un joueur colorée par C . Une stratégie $\sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ est dite optimale pour le jeu G si pour tout état $s \in S$,

$$\mathbb{E}_s^\sigma[\phi] = \text{val}_G(s).$$

3.3 Chaînes de Markov

Le cas particulier des arènes stochastiques dans lesquelles une seule action est disponible dans chaque état correspond à la classe des chaînes de Markov.

Définition 3.7. Soit $\mathcal{A} = (S, A = \cup_{s \in S} A(s), \delta(\cdot|\cdot, \cdot), \text{col})$ une arène. Si $\forall s \in S, |A(s)| = 1$, on dit que \mathcal{A} est une arène à 0 joueurs, où encore une chaîne de Markov. Dans ce cas, on peut voir \mathcal{A} comme une chaîne de Markov dont l'ensemble des états est S et la probabilité de transition d'un état s à un état t est $\delta(t|s, a_s)$, où a_s est l'unique action disponible dans s . De plus, il existe une unique stratégie disponible, et on écrit donc \mathbb{P}_s à la place de \mathbb{P}_s^σ et \mathbb{E}_s à la place de \mathbb{E}_s^σ . Comme S est fini, chaque état $s \in S$ est soit *transient* c'est-à-dire tel que $\mathbb{P}_s(N_s) = 0$, soit *récurrent*, c'est-à-dire tel que $\mathbb{P}_s(N_s) = 1$.

Dans cette section, on établit une propriété intéressante des parties jouées dans une arène à 0 joueurs et qui sont issues d'un état récurrent.

Théorème 3.8. Soit $G = (\mathcal{A}, \phi)$ un jeu à 0 joueurs, et s un état de \mathcal{A} . Supposons que ϕ est préfixe-indépendante, et que s est récurrent. Alors

$$\mathbb{P}_s(\phi > \text{val}_G(s)) = 0. \quad (3.6)$$

On verra avec le théorème 3.16 que ce résultat reste vrai pour les jeux à un joueur.

Démonstration. Soit E l'évènement :

$$E = \{\phi > \text{val}_G(s)\} .$$

On commence par montrer que E est indépendant de l'évènement $\{h\}$, pour tout $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$. Soit $t \in S$ un état et $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$ une partie finie de cible t . Le cas où $\mathbb{P}_s(h) = 0$ est clair donc nous supposons $\mathbb{P}_s(h) > 0$. Puisque ϕ est préfixe-indépendante, $\mathbf{1}_E[h] = \mathbf{1}_E$. D'après le lemme de décalage 3.4 on obtient :

$$\mathbb{P}_s(E | h) = \mathbb{P}_t(E). \quad (3.7)$$

Soit $C_{t,s}$ l'ensemble des parties finies de source t , de cible s et qui n'atteignent s qu'une fois. Puisque $\mathbb{P}_s(h) > 0$, les états s et t sont dans la même classe de récurrence, donc :

$$1 = \mathbb{P}_t(\{\exists n, S_n = s\}) = \sum_{l \in C_{s,t}} \mathbb{P}_t(l) . \quad (3.8)$$

$$\text{Donc} \quad \mathbb{P}_t(E) = \sum_{l \in C_{s,t}} \mathbb{P}_t(l) \cdot \mathbb{P}_t(E | l) = \sum_{l \in C_{s,t}} \mathbb{P}_t(l) \cdot \mathbb{P}_s(E) = \mathbb{P}_s(E) , \quad (3.9)$$

où la première inégalité vient de (3.8), la seconde est similaire à (3.7) et la troisième vient de (3.8). Avec (3.7), on obtient :

$$\mathbb{P}_s(E | h) = \mathbb{P}_s(E) . \quad (3.10)$$

Ainsi nous avons prouvé que pour chaque $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$, l'évènement E est indépendant de \mathcal{O}_h . Mais E est un élément d de la tribu engendrée par les ensembles \mathcal{O}_h . Cela implique que E est indépendant de lui-même, donc :

$$\mathbb{P}_s(E) = \mathbb{P}_s(E \cap E) = \mathbb{P}_s(E)^2 ,$$

ce qui prouve que $\mathbb{P}_s(E)$ est soit nul soit égal à 1 ¹.

Supposons un instant que $\mathbb{P}_s(E) = 1$ et cherchons une contradiction. Alors $\mathbb{P}_s(\phi > \text{val}_G(s)) = 1$, donc $\mathbb{E}_s[\phi] > \text{val}_G(s)$, ce qui contredit la définition de $\text{val}_G(s)$.

Nous en déduisons que $\mathbb{P}_s(E) = 0$, ce qui implique (3.6) et termine la preuve de ce théorème. \square

3.4 Fonctions de paiement séparantes et split d'une arène

Le résultat principal de ce chapitre établit que les fonctions de paiement préfixes–indépendantes et *séparantes* sont positionnelles. La définition d'une fonction de paiement séparantes est proche de la définition des fonctions de paiement *fairly–mixing* introduites dans [GZ04] et des conditions de victoire *concaves* introduites dans [Kop06].

Définition 3.9. Soit C un alphabet et $u, v, w \in C^\omega$ trois mots finis ou infinis. On dit que w est un mélange de u et v si il existe des factorisations $u = u_0u_1u_2 \cdots$ et $v = v_0v_1v_2 \cdots$ de u et v , telles que $w = u_0v_0u_1v_1 \cdots$.

Une fonction de paiement $\phi : C^\omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite *séparante* si pour tous mots $u, v, w \in C^\omega$ tels que w est un mélange de u et v ,

$$\phi(w) \leq \max\{\phi(u), \phi(v)\} .$$

Pour établir le théorème 3.17, on utilise une preuve par induction sur le nombre d'actions. Pour réaliser cette induction, on introduit dans cette section la notion de *split* d'une arène. On établit plusieurs résultats élémentaires à propos du split d'une arène et des fonctions de paiement séparantes.

Définition 3.10. Soit \mathcal{A} une arène et $s \in S$ un état tel que $|A(s)| > 1$. Soit $(A_0(s), A_1(s))$ une partition de $A(s)$ en deux ensembles non–vides. Soit $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$ le couple d'arènes obtenues à partir de \mathcal{A} en restreignant l'ensemble des actions disponibles dans s à $A_0(s)$ et $A_1(s)$ respectivement, et en posant $A_0(t) = A_1(t) = A(t)$ pour $t \neq s$. Alors $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$ est appelé le *split* de \mathcal{A} associé à $(A_0(s), A_1(s))$. Soit $G = (\mathcal{A}, u)$ un jeu, et $G_0 = (\mathcal{A}_0, u)$, $G_1 = (\mathcal{A}_1, u)$. On dit également que (G_0, G_1) est un split de G sur s .

Étant donné un split $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$ de \mathcal{A} sur s , il existe une projection naturelle (π_0, π_1) des parties finies $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$ vers les couples $(h_0, h_1) \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^* \times \mathbf{P}_{\mathcal{A}_1,s}^*$. Considérons une partie $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$. Alors h se factorise en $h = h_0h_1 \cdots h_kh_{k+1}$, où pour $0 \leq i \leq k$, h_i est un cycle simple sur s et h_{k+1} une partie issue de s qui ne revient pas dans s . Pour chaque $0 \leq i \leq k+1$, la source de h_i est s donc h_i débute soit par une action de $A_0(s)$ soit par une action de $A_1(s)$. Alors $\pi_0(h)$ est obtenue en effaçant de h tous les h_i , $0 \leq i \leq k+1$ qui débutent par une action de $A_1(s)$, et $\pi_1(h)$ est obtenue symétriquement.

¹ Par souci de complétude, nous donnons tous les détails mais cette partie de la preuve est classique. Un évènement E qui vérifie (3.10) est appelé un *tail–event*. Le fait que la probabilité d'un *tail–event* soit égale à 0 ou 1 est appelée loi de Levy ou encore loi de Kolmogorov [Dur96].

Formalisons maintenant cette construction. On commence par définir inductivement le *mode* d'une partie. Pour $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$, $a \in A(h)$ et $t \in S$

$$\text{Mode}(hat) = \begin{cases} 0 & \text{si la cible de } h \text{ est } s \text{ et } a \in A_0(s) \\ 1 & \text{si la cible de } h \text{ est } s \text{ et } a \in A_1(s) \\ \text{Mode}(h) & \text{si la cible de } h \text{ n'est pas } s. \end{cases} \quad (3.11)$$

Pour $i \in \{0, 1\}$, la projection π_i est définie par $\pi_i(s) = s$, et pour $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$, $a \in A(h)$ et $t \in S$,

$$\pi_i(hat) = \begin{cases} \pi_i(h)at & \text{si } \text{Mode}(hat) = i \\ \pi_i(h) & \text{si } \text{Mode}(hat) = 1 - i. \end{cases} \quad (3.12)$$

On peut étendre naturellement le domaine de définition des applications π_0 et π_1 à $\mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega$. En effet, soit $h = s_0 a_1 s_1 \cdots \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega$ et pour tout n , $h_n = s_0 a_1 \cdots s_n$. Alors pour tout n le mot $\pi_0(h_n)$ est un préfixe du mot $\pi_0(h_{n+1})$. Si la suite $\pi_0(h_n)$ est stationnaire égale à un certain mot fini $h' \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^*$, on pose $\pi_0(h) = h'$. Sinon, la suite $\pi_0(h_n)$ tend vers un mot infini $h' \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^\omega$, et on pose $\pi_0(h) = h'$. Une fois qu'on a étendu le domaine de définition de π_0 à tout $\mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega$, la projection π_0 consiste à effacer tous les cycles simples sur s débutant par une action de $A_1(s)$, plus éventuellement, si il existe, un suffixe infini débutant par une action de $A_1(s)$ et ne repassant jamais par s .

Définition 3.11. Les deux variables aléatoires :

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \pi_0(S_0 A_1 S_1 \cdots) \text{ à valeur dans } \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^* \cup \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^\omega \\ \Pi_1 &= \pi_1(S_0 A_1 S_1 \cdots) \text{ à valeur dans } \mathbf{P}_{\mathcal{A}_1,s}^* \cup \mathbf{P}_{\mathcal{A}_1,s}^\omega \end{aligned}$$

sont appelées les projections associées au split $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$.

Les propriétés utiles de π_0 et π_1 sont résumées dans le lemme suivant.

Proposition 3.12. Soit \mathcal{A} une arène, s, t des états de \mathcal{A} , $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$ un split de \mathcal{A} sur s , et Π_0 et Π_1 les projections associées. Soit $h_0 \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^*$ une partie finie dans \mathcal{A}_0 , de source s et de cible t , et $a \in A_0(t)$, alors

$$\forall r \in S, \quad \mathbb{P}_s^\sigma(h_0 ar \sqsubseteq \Pi_0 \mid h_0 a \sqsubseteq \Pi_0) = \delta(r|t, a). \quad (3.13)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et ϕ une fonction de paiement préfixe-indépendante, séparante. Alors

$$\begin{aligned} \{N_s = \infty \text{ et } \phi > x\} &\subseteq \\ &\{\Pi_0 \text{ est infinie et } N_s(\Pi_0) = \infty \text{ et } \phi(\Pi_0) > x\} \\ &\cup \{\Pi_1 \text{ est infinie et } N_s(\Pi_1) = \infty \text{ et } \phi(\Pi_1) > x\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Démonstration. Prouvons tout d'abord (3.13). Rappelons que \sqsubseteq dénote la relation d'ordre préfixe sur $\mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^* \cup \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^\omega$. Posons :

$$Y = \{h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^* \mid \pi_0(h) = h_0 \text{ et } \forall r \in S, \text{Mode}(har) = 0\}.$$

Soient π_0 et π_1 les fonctions définies par (3.12) et (3.11).

Prouvons tout d'abord :

$$\forall r \in S, \bigcup_{h \in Y} \{\mathcal{O}_{har}\} = \{h_0ar \sqsubseteq \pi_0\} . \quad (3.15)$$

On commence avec l'inclusion \sqsubseteq . Soient $r \in S$, $h \in Y$ et $l \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega$ tels que $har \sqsubseteq l$. Puisque $h \in Y$, et des définitions (3.11) et (3.12), on déduit que $\forall r, \text{Mode}(har) = 0$ and $\pi_0(har) = h_0ar$. Puisque π_0 est \sqsubseteq -croissante et que $har \sqsubseteq l$, on obtient $\pi_0(har) \sqsubseteq \pi_0(l)$, donc $h_0ar \sqsubseteq \pi_0(l)$ et $l \in \{h_0ar \sqsubseteq \Pi_0\}$. Cela prouve l'inclusion \sqsubseteq de (3.15).

Prouvons maintenant l'inclusion \supseteq de (3.15). Soient $r \in S$ et $l \in \{h_0ar \sqsubseteq \Pi_0\}$. Alors $h_0ar \sqsubseteq \pi_0(l)$. Récrivons l comme $l = s_0a_1s_1 \cdots$. Puisque π_0 est \sqsubseteq -croissante, $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $h_0ar \sqsubseteq \pi_0(s_0 \cdots s_{n-1}a_n s_n)$ et $h_0ar \not\sqsubseteq \pi_0(s_0 \cdots s_{n-1})$. Définissons $h = s_0a_1 \cdots s_{n-1}$, alors la dernière équation se récrit en $h_0ar \not\sqsubseteq \pi_0(h)$ et $h_0ar \sqsubseteq \pi_0(ha_n s_n)$. D'après la définition (3.12) de π_0 , cela signifie nécessairement que $h_0 = \pi_0(h)$ et $h_0ar = \pi_0(h)a_n s_n$. Donc $h \in Y$, $a_n = a$ et $s_n = r$, ainsi $har \sqsubseteq l$ et $l \in \cup_{h \in Y} \{har\}$. Cela achève la preuve de (3.15).

Soit X la fermeture préfixe de Y , c'est-à-dire :

$$X = \{h \in Y \mid \exists h' \in Y \text{ tel que } h' \neq h \text{ et } h' \sqsubseteq h\} .$$

Alors :

$$\forall r \in S, \bigcup_{h \in Y} \{har\} = \bigcup_{h \in X} \{har\},$$

et la seconde union est en fait une union disjointe. Donc,

$$\forall r \in S, (\mathcal{O}_{har})_{h \in X} \text{ est une partition de } \{h_0ar \sqsubseteq \pi_0\} , \quad (3.16)$$

$$\text{et } (\mathcal{O}_{ha})_{h \in X} \text{ est une partition de } \{h_0a \sqsubseteq \pi_0\} . \quad (3.17)$$

D'après (3.16), on en déduit que pour tout $r \in S$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_s^\sigma(h_0ar \sqsubseteq \pi_0) &= \sum_{h \in X} \mathbb{P}_s^\sigma(\mathcal{O}_{har}) \\ &= \sum_{h \in X} \delta(r|t, a) \cdot \mathbb{P}_s^\sigma(ha) && \text{d'après (3.2)} \\ &= \delta(r|t, a) \cdot \sum_{h \in X} \mathbb{P}_s^\sigma(ha) \\ &= \delta(r|t, a) \cdot \mathbb{P}_s^\sigma(h_0a \sqsubseteq \pi_0) && \text{d'après (3.17),} \end{aligned}$$

Cela achève la preuve de (3.13).

Maintenant, prouvons (3.14). Soit ϕ une fonction préfixe-indépendante et séparante et $x \in \mathbb{R}$. Soit $h \in \{N_s = +\infty \text{ and } \phi > x\}$.

Supposons tout d'abord que $\pi_1(h)$ est un mot fini. Alors d'après (3.12), l'ensemble $\{h' \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^* \mid h' \sqsubseteq h \text{ and } \text{Mode}(h') = 1\}$ est fini. D'après (3.12) de nouveau, cela implique que h et $\pi_0(h)$ sont identiques, mis à part un préfixe fini.

Puisque ϕ est préfixe-indépendante, cela implique $\phi(h) = \phi(\pi_0(h))$. De plus, puisque $N_s(h) = +\infty$, nous avons $N_s(\pi_0(h)) = +\infty$. Ces deux dernières égalités prouvent (3.14) dans le cas où $\pi_1(h)$ est fini.

Le cas où $\pi_0(h)$ est fini est symétrique.

Supposons maintenant que $\pi_0(h)$ et $\pi_1(h)$ sont tous deux infinis. Alors nous prouvons qu'il existe $u_0, v_0, u_1, v_1 \in (SA)^*$ tel que :

$$\begin{aligned} h &= u_0 v_0 u_1 v_1 \cdots \\ \pi_0(h) &= u_0 u_1 u_2 \cdots \\ \pi_1(h) &= v_0 v_1 v_2 \cdots \end{aligned} \quad (3.18)$$

Écrivons $h = s_0 a_1 s_1 \cdots$. Alors :

$$\begin{aligned} \{n_0 < n_1 < \dots\} &= \{n > 0 \mid \text{Mode}(s_0 a_1 \cdots s_n) = 0 \text{ et } \text{Mode}(s_0 a_1 \cdots s_{n+1}) = 1\} , \\ \{m_0 < m_1 < \dots\} &= \{m > 0 \mid \text{Mode}(s_0 a_1 \cdots s_m) = 1 \text{ et } \text{Mode}(s_0 a_1 \cdots s_{m+1}) = 0\} . \end{aligned}$$

Alors, par définition (3.11),

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad s_{n_i} = s_{m_i} = s . \quad (3.19)$$

Sans perte de généralité, on suppose $a_1 \in A_0(s)$. Alors par (3.11), $\text{Mode}(s_0 a_1 s_1) = 0$ donc $0 < n_0 < m_0 < n_1 < \dots$. Définissons $u_0 = s_0 a_1 \cdots s_{n_0-1} a_{n_0}$ et pour $i \in \mathbb{N}$ définissons $v_i = s_{n_i} \cdots a_{m_i}$ et $u_{i+1} = s_{m_i} \cdots a_{n_{i+1}}$. Alors par (3.12) on obtient (3.18).

Puisque ϕ est séparante, l'équation (3.18) implique $\phi(h) \leq \max\{\phi(\pi_0(h)), \phi(\pi_1(h))\}$. Puisque $\phi(h) > x$ on en déduit $x < \max\{\phi(\pi_0(h)), \phi(\pi_1(h))\}$, c'est-à-dire :

$$(\phi(\pi_0(h)) < x) \text{ ou } (\phi(\pi_1(h)) < x). \quad (3.20)$$

De plus, par (3.19) et (3.18), les parties $\pi_0(h)$ et $\pi_1(h)$ atteignent infiniment souvent s , donc $N_s(\pi_0(h)) = N_s(\pi_1(h)) = +\infty$. Cette dernière observation et l'équation (3.20) impliquent (3.14) ce qui achève cette preuve. \square

Le théorème suivant est un des points vitaux de la démonstration du théorème 3.17. Intuitivement, il indique qu'on peut simuler toute stratégie σ dans l'arène \mathcal{A} par une stratégie σ_0 dans l'arène \mathcal{A}_0 , de manière à ce que pour tout événement E dans l'arène \mathcal{A} , qui est Π_0 -mesurable, la probabilité de E sous σ dans l'arène \mathcal{A} est majorée par la probabilité de E sous σ_0 dans \mathcal{A}_0 . Il paraît possible de réutiliser ce théorème afin de prouver, par induction, d'autres propriétés des jeux stochastiques à information complète.

Théorème 3.13. *Soit \mathcal{A} une arène, σ une stratégie dans \mathcal{A} , s un état de \mathcal{A} tel que $|A(s)| \geq 2$, $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$ un split de \mathcal{A} sur s , et Π_0 la projection associée. Alors il existe une stratégie σ_0 dans l'arène \mathcal{A}_0 telle que pour tout ensemble mesurable $E_0 \subseteq \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0, s}^\omega$,*

$$\mathbb{P}_{\sigma, s}(\Pi_0 \in E_0) \leq \mathbb{P}_{\sigma_0, s}(E_0). \quad (3.21)$$

Démonstration. Pour chaque état $t \neq s$, choisissons arbitrairement une action $a_t \in A(t)$, et choisissons également une action $a_s \in A_0(s)$. Rappelons qu'on note \sqsubseteq l'ordre préfixe sur $\mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^* \cup \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^\omega$: par définition, $h_0 \sqsubseteq h'_0$ (resp. $h_0 \sqsubset h'_0$) si et seulement si h_0 est un préfixe (resp. un préfixe strict) de h'_0 . Pour tout $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^*$, de cible t et pour toute action $a \in A(t)$, on pose

$$\sigma_0(h)(a) = \begin{cases} \mathbb{P}_s^\sigma(ha \sqsubseteq \Pi_0 \mid h \sqsubset \Pi_0) & \text{si } \mathbb{P}_s^\sigma(h \sqsubset \Pi_0) > 0 \\ 1 & \text{si } \mathbb{P}_s^\sigma(h \sqsubset \Pi_0) = 0 \text{ et } a = a_t \\ 0 & \text{si } \mathbb{P}_s^\sigma(h \sqsubset \Pi_0) = 0 \text{ et } a \neq a_t \end{cases}$$

Alors σ_0 est une stratégie dans \mathcal{A}_0 puisque par définition de \sqsubset ,

$$\mathbb{P}_s^\sigma(h \sqsubset \Pi_0) = \sum_{a \in A(t)} \mathbb{P}_s^\sigma(ha \sqsubseteq \Pi_0) .$$

On commence par montrer (3.21) dans le cas particulier où il existe $h_0 \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^*$ tel que $E_0 = \{l \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^\omega \mid h \sqsubseteq l\}$.

On prouve (3.22) inductivement.

$E_0 \subseteq \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^\omega$ est du type $\{h \text{ est un préfixe de } S_0A_1S_1 \cdots\}$, avec $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^*$. Rappelons que par abus de notation, cet évènement est noté $\{h\}$. Avec cette notation, notre but est de prouver :

$$\forall h' \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^*, \quad \mathbb{P}_s^\sigma(h' \sqsubseteq \Pi_0) \leq \mathbb{P}_s^{\sigma_0}(h'). \quad (3.22)$$

On procède inductivement. Si $h = s$ alors puisque l'ensemble image de Π_0 est $\mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^* \cup \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega$, on a $\mathbb{P}_s^\sigma(s \sqsubseteq \Pi_0) = 1 = \mathbb{P}_s^{\sigma_0}(s)$. Supposons maintenant (3.22) prouvée pour une partie $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^*$. Soit t la cible de h , $a \in A_0(t)$. Si $\mathbb{P}_s^\sigma(h \sqsubset \Pi_0) = 0$, alors a fortiori $\mathbb{P}_s^\sigma(har \sqsubseteq \Pi_0) = 0$, et (3.22) est évidente. Supposons donc $\mathbb{P}_s^\sigma(h \sqsubset \Pi_0) \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_s^\sigma(har \sqsubseteq \pi_0) &= \delta(r|t, a) \cdot \mathbb{P}_s^\sigma(ha \sqsubseteq \Pi_0) \\ &= \delta(r|t, a) \cdot \mathbb{P}_s^\sigma(ha \sqsubseteq \Pi_0 \mid h \sqsubset \Pi_0) \cdot \mathbb{P}_s^\sigma(h \sqsubset \Pi_0) \\ &= \delta(r|t, a) \cdot \sigma_0(h)(a) \cdot \mathbb{P}_s^\sigma(h \sqsubset \Pi_0) \\ &\leq \delta(r|t, a) \cdot \sigma_0(h)(a) \cdot \mathbb{P}_s^\sigma(h \sqsubseteq \Pi_0) \\ &\leq \delta(r|t, a) \cdot \sigma_0(h)(a) \cdot \mathbb{P}_s^{\sigma_0}(h) \\ &= \mathbb{P}_s^{\sigma_0}(har). \end{aligned}$$

La première égalité vient de (3.13), et la troisième est par définition de σ_0 . La dernière inégalité est par hypothèse d'induction et la dernière égalité est par (3.1) et (3.2).

On peut maintenant achever la preuve du théorème 3.13. Soit \mathcal{E} la collection des évènements $E_0 \subseteq \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^\omega$ qui vérifient (3.21). Alors clairement \mathcal{E} est stable par union disjointe dénombrables et par unions dénombrables croissantes. D'après (3.22), \mathcal{E} contient tous les évènements $(\mathcal{O}_{h_0})_{h_0 \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^*}$. Puisque \mathcal{E} est stable par union disjointe dénombrable, elle contient la collection $\{\bigcup_{h_0 \in H_0} \mathcal{O}_{h_0} \mid H_0 \subseteq \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^*\}$. Cette collection est une algèbre booléenne. Puisque \mathcal{E} est stable par unions dénombrables croissantes, cela implique que \mathcal{E} contient la tribu engendrée par $(\mathcal{O}_{h_0})_{h_0 \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^*}$, c'est-à-dire tous les ensembles mesurables de $\mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^\omega$. Cela achève la preuve. \square

3.5 Valeur des parties qui quittent définitivement un état

Le théorème suivant énonce que la valeur moyenne des parties qui ne reviennent jamais dans leur état initial est inférieure à la valeur de cet état.

Théorème 3.14. *Soit $G = (\mathcal{A}, \phi)$ un jeu, s un état de \mathcal{A} et σ une stratégie. Supposons que ϕ est préfixe-indépendante. Alors*

$$\mathbb{E}_s^\sigma[\phi \mid N_s = 0] \leq \text{val}_G(s). \quad (3.23)$$

Démonstration. Montrons (3.23). Soit $f : \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^* \rightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$ la fonction d'oubli des cycles sur s , définie par $f(s_0 a_1 \cdots s_n) = s_k a_{k+1} \cdots s_n$, où $k = \max\{i \mid s_i = s\}$. Soit τ la stratégie qui consiste à oublier tous les cycles sur s puis à appliquer σ , c'est à dire $\tau(h) = \sigma(f(h))$. On va montrer que

$$\mathbb{E}_s^\sigma[\phi \mid N_s = 0] = \mathbb{E}_s^\tau[\phi], \quad (3.24)$$

ce qui implique immédiatement (3.23), par définition de la valeur d'un état. Bien que (3.24) puisse paraître évidente, la suite de cette démonstration est un peu technique, et nous la donnons par souci de rigueur.

Soit $e = \mathbb{P}_{\sigma,s}(N_s = 0)$. Alors on peut supposer $e > 0$, sinon (3.23) n'est pas définie. Commençons par montrer que

$$\mathbb{P}_s^\tau(N_s = \infty) = 0. \quad (3.25)$$

Soit $K \subseteq \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$ l'ensemble des cycles simples sur s c'est-à-dire :

$$K = \{s_0 a_1 \cdots s_n \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^* \mid s_0 = s_n = s \text{ et pour } 0 < k < n, s_k \neq s\}.$$

Alors pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_s^\tau(N_s \geq n+1) &= \sum_{h \in K} \mathbb{P}_s^\tau(N_s \geq n+1 \mid h) \cdot \mathbb{P}_s^\tau(h) \\ &= \sum_{h \in K} \mathbb{P}_s^{\tau[h]}(N_s \geq n) \cdot \mathbb{P}_s^\tau(h) \\ &= \sum_{h \in K} \mathbb{P}_s^\tau(N_s \geq n) \cdot \mathbb{P}_s^\tau(h) \\ &= \mathbb{P}_s^\tau(N_s \geq n) \cdot \mathbb{P}_s^\tau(N_s > 0) \\ &= \mathbb{P}_s^\tau(N_s \geq n) \cdot (1 - e) \end{aligned}$$

La première égalité est un conditionnement sur la date de premier retour en s , la seconde une application du lemme 3.4. La troisième égalité est vraie car par définition de τ et K , $\forall h \in K, \tau[h] = \tau$. La quatrième égalité est par définition de K , et la cinquième par définition de e . Puisque $e > 0$, en faisant tendre n vers $+\infty$, cette dernière équation implique bien (3.25).

Ainsi, une partie conforme à τ et issue de s ne passe qu'un nombre fini de fois par s . On peut maintenant terminer la démonstration. Définissons Last_s , l'instant de dernier passage dans s , par

$$\text{Last}_s = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid S_n = s\}.$$

Alors $\{N_s = \infty\} = \{\text{Last}_s = \infty\}$ donc (3.25) implique $\mathbb{P}_s^\tau(\text{Last}_s < \infty) = 1$ et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_s^\tau[\phi] &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_s^\tau[\phi \mid \text{Last}_s = n] \cdot \mathbb{P}_s^\tau(\text{Last}_s = n). \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*} \mathbb{E}_s^\tau[\phi \mid \text{Last}_s = n, H_n = h] \cdot \mathbb{P}_s^\tau(\text{Last}_s = n, H_n = h). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$ tel que $\mathbb{P}_{\tau,s}(\text{Last}_s = n, H_n = h) > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_s^\tau[\phi \mid \text{Last}_s = n, H_n = h] &= \mathbb{E}_s^{\tau[h]}[\phi \mid \text{Last}_s = 0] \\ &= \mathbb{E}_s^\tau[\phi \mid \text{Last}_s = 0] \\ &= \mathbb{E}_s^\sigma[\phi \mid \text{Last}_s = 0]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

La première égalité est une conséquence du lemme 3.4 et de la préfixe-indépendance de ϕ . La seconde égalité vient du fait que si $\mathbb{P}_{\tau,s}(\text{Last}_s = N, H_N = h) > 0$ alors h est un cycle sur s donc par définition de τ , $\tau[h] = \tau$. La troisième égalité s'obtient en remarquant que τ et σ coïncident sur l'ensemble $\{\text{Last}_s = 0\}$, et en appliquant le lemme 3.5.

Finalement, (3.27) et (3.26) impliquent $\mathbb{E}_s^\tau[\phi] = \mathbb{E}_s^\sigma[\phi \mid \text{Last}_s = 0]$. Or $\{N_s = 0\} = \{\text{Last}_s = 0\}$, et par définition de $\text{val}_G(s)$, on sait que $\text{val}_G(s) \geq \mathbb{E}_s^\tau[\phi]$. Cela prouve (3.23), et achève la preuve de ce théorème. \square

On déduit du théorème 3.14 précédent le résultat suivant, qui relie la valeur moyenne des parties qui ne reviennent qu'un nombre fini de fois dans leur état initial avec les valeurs de cet état initial dans un split sur cet état initial.

Théorème 3.15. *Soit $G = (\mathcal{A}, \phi)$ un jeu, s un état, σ une stratégie et (G_0, G_1) un split de G sur s . Supposons que ϕ est préfixe-indépendante. Alors*

$$\mathbb{E}_s^\sigma[\phi \mid N_s < \infty] \leq \max\{\text{val}_{G_0}(s), \text{val}_{G_1}(s)\}. \quad (3.28)$$

Démonstration. Posons $v_0 = \text{val}_{G_0}(\phi)$ et $v_1 = \text{val}_{G_1}(\phi)$. Pour toute action $a \in A(s)$, notons σ_a la stratégie dans \mathcal{A} définie pour $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$ par :

$$\begin{cases} \sigma_a(h) = \sigma(h) \text{ si la cible de } h \text{ n'est pas } s \\ \sigma_a(h) \text{ choisit l'action } a \text{ avec probabilité } 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que la stratégie σ_a choisie toujours la même action quand la partie atteint l'état s , et c'est donc une stratégie soit dans l'arène \mathcal{A}_0 , soit dans l'arène \mathcal{A}_1 . D'après le théorème 3.14, on en déduit :

$$\forall a \in A(s), \quad \mathbb{E}_{\sigma_a,s}[\phi \mid N_s = 0] \leq \max\{v_0, v_1\} .$$

3.6. Valeurs des parties qui reviennent infiniment souvent dans leur état initial

D'autre part, puisque σ et σ_a coïncident sur $\{N_s = 0, A_1 = a\}$, le lemme 3.5 implique :

$$\mathbb{E}_{\sigma,s}[\phi \mid A_1 = a, N_s = 0] = \mathbb{E}_{\sigma_a,s}[\phi \mid N_s = 0] .$$

Ces deux dernières équations entraînent :

$$\mathbb{E}_{\sigma,s}[\phi \mid N_s = 0] \leq \max\{v_0, v_1\} ,$$

et ceci quelque soit la stratégie σ . En conditionnant sur l'histoire de la partie lors du dernier passage dans s , et en utilisant le lemme 3.4 et la préfixe-indépendance de ϕ , cette dernière équation implique :

$$\mathbb{E}_{\sigma,s}[\phi \mid N_s < \infty] \leq \max\{v_0, v_1\}.$$

Cela achève la preuve du théorème 3.15. □

3.6 Valeurs des parties qui reviennent infiniment souvent dans leur état initial

Le théorème 3.17 suivant synthétise une partie des résultats obtenus dans les sections précédentes.

Théorème 3.16. *Soit $G = (\mathcal{A}, \phi)$ un jeu, s un état et σ une stratégie. Supposons que ϕ est préfixe-indépendante et séparante. Alors :*

$$\mathbb{P}_{\sigma,s}(\phi > \text{val}_G(s) \mid N_s = \infty) = 0. \tag{3.29}$$

De plus, supposons que $|A(s)| \geq 2$, et soit (G_0, G_1) un split de G sur s . Alors :

$$\mathbb{P}_{\sigma,s}(\phi > \max\{\text{val}_{G_0}(s), \text{val}_{G_1}(s)\} \mid N_s = \infty) = 0 . \tag{3.30}$$

Démonstration. On prouve ce théorème par récurrence sur $N(\mathcal{A}) = \sum_{s \in S} (|A(s)| - 1)$. Si $N(\mathcal{A}) = 0$ alors \mathcal{A} est une arène à 0 joueurs. Dans ce cas, le théorème 3.16 est une conséquence directe du théorème 3.8. En effet, $\mathbb{P}_s^\sigma(N_s = \infty) > 0$ implique que s est un état récurrent de la chaîne de Markov sous-jacente, et dans ce cas, $\mathbb{P}_s^\sigma(N_s = \infty) = 1$.

Supposons maintenant $N(\mathcal{A}) > 0$ et le théorème 3.16 prouvé pour toute arène \mathcal{A}' telle que $N(\mathcal{A}') < N(\mathcal{A})$. On prouve tout d'abord (3.30). Soit s un état, σ une stratégie, supposons que $|A(s)| > 2$ et soit $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$ un split de \mathcal{A} sur s . Soit $G_0 = (\mathcal{A}_0, \phi)$, $G_1 = (\mathcal{A}_1, \phi)$, $v_0 = \text{val}_{G_0}(\phi)$, $v_1 = \text{val}_{G_1}(\phi)$, et Π_0, Π_1 les projections associées. Soit :

$$\begin{aligned} E_0 &= \{h_0 \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}_0,s}^\omega \mid \phi(h_0) > v_0 \text{ and } N_s(h_0) = +\infty\} \\ E &= \{h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^\omega \mid \pi_0(h) \in E_0\} . \end{aligned}$$

On commence par prouver que :

$$\mathbb{P}_s^\sigma(E) = 0. \tag{3.31}$$

D'après le théorème 3.13, il existe une stratégie σ_0 dans \mathcal{A}_0 telle que $\mathbb{P}_s^\sigma(\Pi_0 \in E_0) \leq \mathbb{P}_s^{\sigma_0}(E_0)$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\sigma,s}(E) &= \mathbb{P}_{\sigma,s}(\Pi_0 \in E_0) \leq \mathbb{P}_{\sigma_0,s}(E_0) \\ &= \mathbb{P}_{\sigma_0,s}(\phi > v_0 \text{ and } N_s = +\infty) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou cette dernière égalité est vraie par hypothèse d'induction, puisque $N(\mathcal{A}_0) < N(\mathcal{A})$. Donc nous avons montré (3.31) et par symétrie on obtient pour $i \in \{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}_s^\sigma(\Pi_i \text{ est infini et } N_s(\Pi_i) = \infty \text{ et } \phi(\Pi_i) > v_i) = 0 . \quad (3.32)$$

Maintenant, considérons (3.14) de la proposition 3.12, avec $x = \max\{v_0, v_1\}$. Avec l'équation (3.32), on obtient (3.30).

Maintenant, nous prouvons (3.29).

Tout d'abord, montrons (3.29) pour tout état s tel que $|A(s)| \geq 2$. Toute stratégie dans \mathcal{A}_0 ou \mathcal{A}_1 est une stratégie dans \mathcal{A} , donc $\text{val}_G(s) \geq \max\{v_0, v_1\}$ et nous déduisons de (3.30) que $\mathbb{P}_s^\sigma(\phi > \text{val}_G(s) \mid N_s = \infty) = 0$. Donc l'ensemble :

$$T = \left\{ s \in S \mid \forall \sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}}^\sigma, \mathbb{P}_s^\sigma(\phi > \text{val}_G(s) \text{ et } N_s = \infty) = 0 \right\} \quad (3.33)$$

contient tous les états $s \in S$ tels que $|A(s)| \geq 2$. On en déduit que (3.29) est vérifiée pour tout s tel que $|A(s)| \geq 2$. Soit $U = S \setminus T$. Nous avons montré que :

$$\forall s \in U, \quad |A(s)| = 1 . \quad (3.34)$$

Pour terminer la preuve de (3.29) nous devons prouver que $T = S$, c'est-à-dire $U = \emptyset$. Supposons le contraire, et cherchons une contradiction. Si $U \neq \emptyset$, alors l'ensemble :

$$W = \left\{ s \in U \mid \text{val}_G(s) = \min_{t \in U} \text{val}_G(t) \right\}$$

est non vide et contient un état $s \in W$. D'après (3.34), il existe une unique action a disponible dans s .

Maintenant montrons que $\forall t \in S$ tel que $\delta(t|s, a) > 0$,

$$\text{si } t \in U \text{ alors } \text{val}_G(t) \geq \text{val}_G(s) \quad (3.35)$$

$$\text{si } t \in T \text{ alors } \text{val}_G(t) > \text{val}_G(s) . \quad (3.36)$$

Le cas où $t \in U$ est clair car nous avons choisi s de valeur minimale dans U . Soit maintenant $t \in T$ tel que $\delta(t|s, a) > 0$ et prouvons 3.36. Puisque $s \in U$, $s \notin T$ et par définition de t ,

$$\exists \sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}}^\sigma \text{ tel que } \mathbb{P}_s^\sigma(\phi > \text{val}_G(s) \text{ et } N_s = \infty) > 0 . \quad (3.37)$$

Maintenant, remarquons que puisque $\delta(t|s, a) > 0$, nous avons $\mathbb{P}_s^\sigma(N_t = \infty \mid N_s = \infty) = 1$. Avec (3.37), cela implique :

$$\mathbb{P}_s^\sigma(\phi > \text{val}_G(s) \text{ et } N_t = \infty) > 0 .$$

En conditionnant sur le premier moment où la partie atteint l'état t , nous en déduisons qu'il existe une partie finie $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A},s}^*$ de source s et de cible t telle que :

$$\mathbb{P}_s^\sigma(\phi > \text{val}_G(s) \text{ et } N_t = \infty \mid h) > 0 .$$

Puisque ϕ est préfixe-indépendante, et d'après le lemme de décalage, cela implique :

$$\mathbb{P}_t^{\sigma[h]}(\phi > \text{val}_G(s) \text{ et } N_t = \infty) > 0 .$$

Puisque $t \in T$, la définition de T implique :

$$\mathbb{P}_t^{\sigma[h]}(\phi > \text{val}_G(t) \text{ et } N_t = \infty) = 0 .$$

Ces deux dernières équations impliquent $\text{val}_G(t) > \text{val}_G(s)$, ce qui achève la preuve de (3.36).

Il reste encore un dernier effort à faire pour obtenir la contradiction recherchée. Puisque ϕ est préfixe-indépendante, on en déduit :

$$\text{val}_G(s) = \sum_{t:\delta(t|s,a)>0} \delta(t|s,a) \cdot \text{val}_G(t) .$$

Avec (3.36) on obtient :

$$\forall t \in S, \quad (\delta(t|s,a) > 0) \implies (t \in U) \text{ et } (\text{val}_G(t) = \text{val}_G(s)) .$$

Cette dernière équation est vérifiée pour tout $s \in W$. Ainsi, toute transition dont la source est dans W a sa cible dans W . Cela implique que toute partie dans \mathcal{A} dont la source est dans W reste dans W avec probabilité 1. On en déduit que la restriction $\mathcal{A}[W]$ de \mathcal{A} à l'ensemble d'états W est une arène stochastique, et :

$$\forall s \in W, \quad \text{val}_G(s) = \text{val}_{G[W]}(s) \tag{3.38}$$

Soit $G[W] = (\mathcal{A}[W], \phi)$. Par définition de U , il existe une stratégie σ dans $\mathcal{A}[W]$ telle que $\mathbb{P}_{\sigma,s}(\phi > \text{val}_G(s) \text{ et } N_s = \infty) > 0$ et avec (3.38) on a :

$$\mathbb{P}_s^\sigma(\phi > \text{val}_{G[W]}(s) \text{ et } N_s = \infty) > 0 .$$

Puisque $W \subseteq U$ et d'après (3.34), $\mathcal{A}[W]$ est une chaîne de Markov. D'après la dernière équation, $\mathbb{P}_s N_s = \infty > 0$ donc s est un état récurrent de cette chaîne. On obtient ainsi une contradiction avec le théorème 3.8.

Finalement, nous obtenons une contradiction, donc $U = \emptyset$. Cela achève la preuve du théorème 3.16. \square

3.7 Positionnalité des jeux à un joueur

Le théorème suivant établit qu'il suffit qu'une fonction de paiement soit préfixe-indépendante et séparante pour que tout jeu stochastique à un joueur muni de cette fonction de paiement admette des stratégies optimales positionnelles.

Théorème 3.17. *Soit ϕ une fonction de paiement séparante et préfixe-indépendante. Alors ϕ est positionnelle pour les jeux à un joueur.*

Des applications de ce théorème sont donnés dans la section 3.9. Avant de passer à la preuve, remarquons qu'on peut synthétiser une partie des résultats des sections précédentes comme suit.

Corollaire 3.18. *Soit $G = (\mathcal{A}, \phi)$ un jeu, s un état de \mathcal{A} et (G_0, G_1) un split de G sur s . Supposons que ϕ est préfixe-indépendante et séparante. Alors*

$$\text{val}_G(s) = \max\{\text{val}_{G_0}(s), \text{val}_{G_1}(s)\}. \quad (3.39)$$

Démonstration. Soit σ une stratégie quelconque dans l'arène \mathcal{A} . Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_s^\sigma[\phi] &= \mathbb{E}_s^\sigma[\phi \mid N_s < \infty] \cdot \mathbb{P}_s^\sigma(N_s < \infty) + \mathbb{E}_s^\sigma[\phi \mid N_s = \infty] \cdot \mathbb{P}_s^\sigma(N_s = \infty) \\ &\leq \max\{\text{val}_{G_0}(s), \text{val}_{G_1}(s)\} \cdot (\mathbb{P}_s^\sigma(N_s < \infty) + \mathbb{P}_s^\sigma(N_s = \infty)) \\ &= \max\{\text{val}_{G_0}(s), \text{val}_{G_1}(s)\} \end{aligned}$$

La deuxième inégalité est une conséquence des théorèmes 3.16 et 3.15. Pour conclure, il suffit de remarquer qu'une stratégie pour le jeu G_0 ou G_1 est également une stratégie pour le jeu G , donc $\text{val}_{G_0}(s) \leq \text{val}_G(s)$ et $\text{val}_{G_1}(s) \leq \text{val}_G(s)$. \square

Démonstration. du théorème 3.17. On prouve le théorème 3.17 par induction sur $N(\mathcal{A}) = \sum_{s \in \mathcal{S}} (|A(s)| - 1)$.

Le premier cas est celui où $N(\mathcal{A}) = 0$, c'est à dire le cas où \mathcal{A} est une arène à 0 joueurs. Dans ce cas, il existe une unique stratégie, qui est nécessairement optimale et positionnelle.

Supposons maintenant que $N(\mathcal{A}) = \sum_{s \in \mathcal{S}} (|A(s)| - 1) > 0$ et que le théorème 3.17 a été prouvé pour toute arène \mathcal{A}' telle que $N(\mathcal{A}') < N(\mathcal{A})$. Puisque $N(\mathcal{A}) > 0$, il existe un état s de \mathcal{A} tel que $|A(s)| \geq 2$. Soit (G_0, G_1) un split de G sur s . Sans perte de généralité, on peut supposer que :

$$\text{val}_{G_0}(s) \geq \text{val}_{G_1}(s), \quad (3.40)$$

et d'après le corollaire 3.18, on en déduit

$$\text{val}_{G_0}(s) = \text{val}_G(s). \quad (3.41)$$

Par hypothèse d'induction, il existe une stratégie $\sigma_0^\#$ positionnelle et optimale pour le jeu G_0 , et d'après (3.41), on en déduit que $\sigma_0^\#$ assure le paiement $\text{val}_G(s)$ à partir de s , c'est-à-dire $\mathbb{E}_s^{\sigma_0^\#}[\phi] = \text{val}_G(s)$. Pour prouver que $\sigma_0^\#$ est optimale pour le jeu G , il reste à montrer que cette égalité est vraie pour s quelconque. Il suffit pour cela de conditionner sur la date de premier retour dans s , et d'utiliser le lemme 3.4 et la préfixe-indépendance de ϕ . On en déduit que pour tout état t de \mathcal{A} ,

$$\mathbb{E}_t^{\sigma_0^\#}[\phi] = \text{val}_G(t).$$

Ainsi la stratégie $\sigma_0^\#$ est également optimale pour le jeu G , et comme c'est une stratégie positionnelle dans l'arène \mathcal{A}_0 , c'est également une stratégie positionnelle dans l'arène G . Cela termine la preuve du pas inductif, et du théorème 3.17. \square

3.8 Jeux stochastiques à deux joueurs et à somme nulle

Dans cette section, on s'intéresse à la positionnalité des jeux stochastiques à deux joueurs et à information complète. Après avoir introduit le formalisme nécessaire, on montre que, comme dans le cadre déterministe, une fonction de paiement positionnelle pour les jeux stochastiques à un joueur est positionnelle pour les jeux stochastiques à deux joueurs.

3.8.1 Notations

Commençons par étendre les différentes notions présentées dans la section 3.2 au cadre plus général des jeux à deux joueurs et à information complète. Dans ce cadre, deux joueurs appelés Max et Min ont des intérêts totalement opposés et s'affrontent dans une arène, au cours d'une suite infinie de tours de jeux. Une arène stochastique à deux joueurs \mathcal{A} est similaire à une arène stochastique à un joueur, mis à part que l'ensemble des états S est partitionné en $(S_{\text{Max}}, S_{\text{Min}})$, où S_{Max} est appelé l'ensemble des états contrôlés par le joueur Max et S_{Min} l'ensemble des états contrôlés par le joueur Min :

$$\mathcal{A} = (S, S_{\text{Max}}, S_{\text{Min}}, A, (A(s))_{s \in S}, \delta(\cdot | \cdot, \cdot), \text{col}) .$$

Les notions de parties finies ou infinies, de fonctions de paiement et de jeu ne changent pas. Soit $\mathcal{J} \in \{\text{Max}, \text{Min}\}$ un joueur. La notion de stratégie est légèrement modifiée. Il existe deux types de stratégies : les stratégies pour Max et les stratégies pour Min. Une stratégie pour Max est une stratégie au sens de la section 3.2, mais dont le domaine de définition est restreint à l'ensemble des parties finies dont la cible est un état contrôlé par Max. Les stratégies pour Min sont définies symétriquement, et l'ensemble des stratégies pour un joueur \mathcal{J} dans \mathcal{A} est noté $\Sigma_{\mathcal{A}}^{\mathcal{J}}$. Ainsi, l'ensemble des couples de stratégies (σ, τ) pour Max et Min s'identifie à l'ensemble des stratégies dans \mathcal{A} vue comme arène à un joueur. Avec cette correspondance, un couple de stratégie (σ, τ) induit la mesure de probabilité $\mathbb{P}_s^{\sigma, \tau}$ sur $\mathbf{P}_{\mathcal{A}, s}^{\omega}$, définie de la même manière que dans le cadre à un joueur.

Dans un jeu $G = (\mathcal{A}, \phi)$, à la fin d'une partie infinie $h \in \mathbf{P}_{\mathcal{A}, s}^{\omega}$, le joueur Min verse la somme $\phi(h)$ au joueur Max. Quand Max et Min ont choisi des stratégies σ et τ , l'espérance de gain du joueur Max est par définition l'espérance de la fonction ϕ sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}_s^{\sigma, \tau}$, notée $\mathbb{E}_s^{\sigma, \tau}[\phi]$. Cette espérance de gain est également notée $\text{val}_G(\sigma, \tau)(s)$. Comme dans le cas déterministe, un couple de stratégies $(\sigma^{\#}, \tau^{\#})$ est optimal si $\forall s \in S, \forall \sigma \in \Sigma_{\text{Max}}, \forall \tau \in \Sigma_{\text{Min}}$,

$$\text{val}_G(\sigma, \tau^{\#})(s) \leq \text{val}_G(\sigma^{\#}, \tau^{\#})(s) \leq \text{val}_G(\sigma^{\#}, \tau)(s)$$

ou en d'autres termes si $\forall s \in S$,

$$\text{val}_G(\sigma^{\#}, \tau^{\#})(s) = \sup_{\sigma \in \Sigma_{\text{Max}}^{\mathcal{A}}} \inf_{\tau \in \Sigma_{\text{Min}}^{\mathcal{A}}} \text{val}_G(\sigma, \tau)(s) = \inf_{\tau \in \Sigma_{\text{Min}}^{\mathcal{A}}} \sup_{\sigma \in \Sigma_{\text{Max}}^{\mathcal{A}}} \text{val}_G(\sigma, \tau)(s).$$

Si un tel couple de stratégie existe, cette valeur est appelée la valeur de s , et notée $\text{val}_G(s)$. D'après le théorème de Martin [Mar98], cette valeur existe dès lors que ϕ est bornée. Toutefois, nous n'utiliserons pas ce théorème dans cette thèse.

3.8.2 Des jeux à deux joueurs vers les jeux à un joueur

Le théorème suivant montre que pour vérifier qu'une fonction ϕ est positionnelle pour les jeux à deux joueurs à somme nulle, on peut se restreindre à la classe des arènes à un joueur. C'est donc une extension du théorème 1.8 au cadre stochastique.

Théorème 3.19. *Soit ϕ une fonction de paiement telle que ϕ et $-\phi$ sont positionnelles pour les jeux à un joueur. Alors ϕ est positionnelle pour les jeux antagonistes à deux joueurs.*

Dans la preuve du théorème 3.19, on aura besoin de la notion de stratégie à mémoire finie.

Définition 3.20. Soit \mathcal{A} une arène. Une mémoire finie dans \mathcal{A} est un couple (M, up) où M est un ensemble fini et up une fonction $up : M \times (SAS) \rightarrow M$. Une stratégie à mémoire finie est un quadruplet $\tau = (M, m_0, up, \tau_f)$ où :

- (M, up) est une mémoire finie dans \mathcal{A} ,
- $m_0 \in M$ est l'état initial de la mémoire,
- τ_f est une application $\tau_f : M \times S_{\text{Min}} \rightarrow A$, telle que $\forall (m, s) \in M \times S_{\text{Min}}$, l'action $\tau_f(m, s)$ est disponible dans s .

À τ on peut naturellement associer une stratégie pure τ' pour Min dans \mathcal{A} définie par $\tau'(s_0 a_1 \cdots s_n) = \tau_f(m(s_0 a_1 \cdots s_n), s_n)$, où $m(s_0 a_1 \cdots s_n)$ est l'état de la mémoire défini inductivement par $m(s_0) = m_0$ et $m(s_0 a_1 s_1 \cdots s_n) = up(m(s_0 \cdots s_{n-1}), (s_{n-1}, a_n, s_n))$. Par abus de notation, on identifie τ et τ' : on dira que le quadruplet (M, m_0, up, τ_f) est une stratégie pure dans \mathcal{A} .

On utilisera également la notion de meilleure réponse :

Définition 3.21. Soit $G = (\mathcal{A}, \phi)$ un jeu et (σ, τ) un couple de stratégies pour Max et Min. On dit que σ est une meilleure réponse de Max à τ dans le jeu G si :

$$\forall t \in S, \quad \text{val}_G(\sigma, \tau)(t) = \sup_{\sigma' \in \Sigma_{\mathcal{A}}^{\text{Max}}} \text{val}_G(\sigma', \tau)(t) .$$

On obtient ainsi une définition alternative de la notion de stratégie optimale :

Proposition 3.22. *Soit G un jeu et $(\sigma^\#, \tau^\#)$ un couple de stratégies pour Max et Min. Alors $(\sigma^\#, \tau^\#)$ est un couple de stratégies optimales si et seulement si $\sigma^\#$ est une meilleure réponse de Max à $\tau^\#$ dans G et $\tau^\#$ est une meilleure réponse de Min à $\sigma^\#$ dans G .*

La démonstration du théorème 3.19 est basée sur le lemme suivant.

Lemme 3.23. *Soit $G = (\mathcal{A}, \phi)$ un jeu. Supposons que ϕ est positionnelle pour les jeux à un joueur. Soit (M, up) une mémoire finie dans \mathcal{A} et $\tau_f : M \times S_{\text{Min}} \rightarrow A$. Alors il existe $\sigma_f : M \times S_{\text{Max}} \rightarrow A$ telle que pour tout $m \in M$, la stratégie $\sigma_m = (M, m, up, \sigma_f)$ est une meilleure réponse de Max à $\tau_m = (M, m, up, \tau_f)$ dans G .*

Démonstration. On fait le produit synchronisé \mathcal{A}_M de \mathcal{A} et de (M, up) :

$$\mathcal{A}_M = (M \times S, M \times S_{\text{Max}}, M \times S_{\text{Min}}, A, (A(s))_{(m,s) \in S \times M}, \delta_M(\cdot|\cdot, \cdot), \text{col}_M)$$

où

$$\delta_M((m_2, t_2)|(m_1, t_1), a) = \begin{cases} 0 & \text{si } m_2 \neq up(m_1, (t_1, a, t_2)) \\ \delta(t_2|t_1, a) & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\text{col}_M((m_1, t_1), a, (m_2, t_2)) = \text{col}(t_1, a, t_2) .$$

Alors τ_f est une stratégie positionnelle pour Min dans l'arène \mathcal{A}_M . Notons $\mathcal{A}_M[\tau_f]$ l'arène obtenue à partir de \mathcal{A}_M en restreignant les actions de Min à celles autorisées par τ_f . Alors $\mathcal{A}_M[\tau_f]$ est une arène à un joueur. Par hypothèse, Max possède une stratégie positionnelle optimale $\sigma_f : M \times S_{\text{Max}} \rightarrow A$ pour le jeu $(\mathcal{A}_M[\tau_f], \phi)$.

Soit $m \in M$. Posons $\sigma_m = (M, m, up, \sigma_f)$ et $\tau_m = (M, m, up, \tau_f)$, et montrons que σ_m est une meilleure réponse de Max à τ_m dans le jeu G . Soit σ une stratégie quelconque pour Max dans \mathcal{A} . Soit σ' la stratégie pour Max dans \mathcal{A}_M qui consiste à oublier la mémoire et à appliquer σ , c'est-à-dire $\sigma'((m_0, t_0)a_1(m_1, t_1) \cdots (m, n, t_n)) = \sigma(t_0 a_1 t_1 \cdots t_n)$. Alors pour tout état $t \in S$,

$$\text{val}_{(\mathcal{A}_M[\tau_f], \phi)}(\sigma')(t, m) = \text{val}_{(\mathcal{A}_M, \phi)}(\sigma', \tau_f)(t, m) = \text{val}_{(\mathcal{A}, \phi)}(\sigma, \tau_m)(t) .$$

La première égalité est par définition de $\mathcal{A}_M[\tau_f]$ et la seconde par définition de \mathcal{A}_M . En particulier, si $\sigma = \sigma_m = (M, m, up, \sigma_f)$ alors $\sigma' = \sigma_f$. Comme σ_f est optimale dans $(\mathcal{A}_M[\tau_f], \phi)$, cela prouve que σ_m est une meilleure réponse de Max à τ_m . \square

Preuve du théorème 3.19. La démonstration du théorème 3.19 se fait par induction sur $N(\mathcal{A}) = \sum_{s \in S} (|A(s)| - 1)$. On se contente de montrer que Max possède une stratégie optimale positionnelle, le résultat pour Min s'obtenant de façon symétrique.

Si $N(\mathcal{A}) = 0$, il existe un unique couple de stratégies pour Max et Min, et chacune de ces stratégies est nécessairement optimale et positionnelle.

Supposons maintenant $N(\mathcal{A}) > 0$. Si dans chaque état contrôlé par Max, il existe une unique action disponible, alors Max possède une unique stratégie, nécessairement optimale et positionnelle, et il n'y a rien à prouver.

Supposons donc qu'il existe un état $s \in S_{\text{Max}}$ tel que $|A(s)| > 1$. Soit $(A_0(s), A_1(s))$ une partition de $A(s)$, et $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$ un split associé (cf. définition 3.10). Par hypothèse d'induction, il existe des couples $(\sigma_0^\#, \tau_0^\#)$ et $(\sigma_1^\#, \tau_1^\#)$ de stratégies positionnelles et optimales dans les jeux $G_0 = (\mathcal{A}_0, \phi)$ et $G_1 = (\mathcal{A}_1, \phi)$ respectivement.

Construisons une stratégie τ pour Min, tel qu'un des couples $(\sigma_0^\#, \tau)$ ou $(\sigma_1^\#, \tau)$ est optimal dans le jeu G . Informellement, τ est une stratégie à mémoire finie qui consiste à alterner entre les stratégies $\tau_0^\#$ et $\tau_1^\#$. La mémoire associée à τ peut être dans trois états : 0, 1 ou ?. L'alternance se fait à chaque passage dans l'état s : si lors du dernier passage dans s Max a choisit une action $a \in A_0(s)$ alors la mémoire est dans l'état 0 et Min applique $\tau_0^\#$. Si au contraire lors du dernier passage dans s Max

a choisit une action $a \in A_1(s)$ alors la mémoire est dans l'état 1 et Min applique $\tau_1^\#$. Enfin, lorsque la partie est dans l'état s , la mémoire est dans l'état ? jusqu'à ce que la partie quitte s .

Formellement, on pose $M = \{0, 1, ?\}$, $up : M \times (SAS) \rightarrow M$ défini par :

$$up(m, (t, a, u)) = \begin{cases} ? & \text{si } u = s \\ m & \text{si } u \neq s \text{ et } t \neq s \\ 0 & \text{si } u \neq s, t = s \text{ et } a \in A_0 \\ 1 & \text{si } u \neq s, t = s \text{ et } a \in A_1 \end{cases} \quad (3.42)$$

et $\tau_f : M \times S_M \rightarrow A$ défini par :

$$\tau_f(m, t) = \tau_m^\#(t) \text{ pour } m \in \{0, 1\} \quad (3.43)$$

Il est inutile de définir $\tau_f(?, t)$ car d'après (3.42), la mémoire est dans l'état "?" uniquement quand l'état courant est s , or cet état est contrôlé par Max. C'est volontairement que nous n'avons pas encore fixé l'état initial $m_0 \in \{0, 1\}$ de la mémoire tel que $\tau = (M, m_0, up, \tau_f)$.

Avant cela, appliquons le lemme 3.23 à M , up et τ_f . On obtient $\sigma_f : M \times S_{\text{Max}} \rightarrow A$ telle que $\forall m \in M, \forall s \in S$,

$$(M, m, up, \sigma_f) \text{ est une réponse optimale de Max à } (M, m, up, \tau_f) \text{ dans } G. \quad (3.44)$$

Comme $\sigma_f(?, s)$ est une action disponible dans s et que $A(s) = A_0(s) \cup A_1(s)$ alors de deux choses l'une, soit $\sigma_f(?, s) \in A_0(s)$, soit $\sigma_f(?, s) \in A_1(s)$. Par symétrie, sans perte de généralité, on peut supposer que :

$$\sigma_f(?, s) \in A_0(s) \quad (3.45)$$

Alors soit :

$$\tau = (M, 0, up, \tau_f) \quad (3.46)$$

Sous l'hypothèse (3.45), montrons maintenant que $(\sigma_0^\#, \tau)$ est un couple de stratégies optimales dans G . Soit $\sigma = (M, 0, up, \sigma_f)$ et σ_0 la restriction de σ aux parties jouées dans \mathcal{A}_0 . Alors :

$$\begin{aligned} \text{val}_G(\sigma_0^\#, \tau)(t) &= \text{val}_{G_0}(\sigma_0^\#, \tau_0^\#)(t) \\ &\geq \text{val}_{G_0}(\sigma_0, \tau_0^\#)(t) \\ &= \text{val}_G(\sigma, \tau)(t) \end{aligned}$$

La première égalité est vraie car $\sigma_0^\#$ est une stratégie dans \mathcal{A}_0 et la restriction de τ aux parties jouées dans \mathcal{A}_0 est $\tau_0^\#$. L'inégalité vient du fait que $(\sigma_0^\#, \tau_0^\#)$ est un couple de stratégies optimales dans G_0 . La dernière égalité est vraie car d'après (3.45) toute partie conforme à σ est une partie jouée dans \mathcal{A}_0 . D'après (3.44), on en déduit que $\sigma_0^\#$ est une réponse optimale de Max à τ dans G .

Réciproquement, soit τ' une stratégie quelconque pour Max dans \mathcal{A} , et τ'_0 sa restriction aux parties jouées dans \mathcal{A}_0 . Alors :

$$\begin{aligned} \text{val}_G(\sigma_0^\#, \tau')(t) &= \text{val}_{G_0}(\sigma_0^\#, \tau'_0)(t) \\ &\geq \text{val}_{G_0}(\sigma_0^\#, \tau_0^\#)(t) \\ &= \text{val}_G(\sigma_0^\#, \tau)(t) . \end{aligned}$$

La première égalité vient du fait que $\sigma_0^\#$ est une stratégie dans \mathcal{A}_0 et τ'_0 est la restriction de τ aux parties jouées dans \mathcal{A}_0 . L'inégalité vient du fait que $(\sigma_0^\#, \tau_0^\#)$ est un couple de stratégies optimales dans G_0 . La dernière égalité vient du fait que $\tau_0^\#$ est la restriction de τ aux parties jouées dans \mathcal{A}_0 . Cela prouve que τ est une meilleure réponse de Min à $\sigma_0^\#$ dans G .

Comme on a également prouvé que $\sigma_0^\#$ est une meilleure réponse de Max à τ dans G alors la proposition 3.22 achève la démonstration de ce théorème. \square

3.9 Applications

Dans cette section, on récolte les fruits de notre travail des sections précédentes. Les théorèmes 3.17 et 3.19 permettent de redémontrer rapidement plusieurs résultats classiques de positionnalité, ainsi que des résultats inédits.

3.9.1 Preuve unifiée de résultats connus

Proposition 3.24. *Les fonctions de paiement ϕ_{parite} , ϕ_{lsup} , ϕ_{linf} et $\phi_{\overline{\text{mean}}}$ sont séparantes et préfixes-indépendantes.*

Ces fonctions de paiement ont été introduites dans la section 1.3.

Démonstration. Soit $C \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble fini de réels. Soit $u, v, w \in C^\omega$ tel que w est un mélange de u et v relativement à des factorisations $u = u_0 u_1 \cdots \in C^\omega$, $v = v_0 v_1 \cdots \in C^\omega$ et $w = u_0 v_0 u_1 v_1 \cdots \in C^\omega$. Alors :

$$\phi_{\text{lsup}}(w) = \max\{\phi_{\text{lsup}}(u), \phi_{\text{lsup}}(v)\} . \quad (3.47)$$

Cela prouve que ϕ_{lsup} est séparante. De même ϕ_{linf} est séparante car :

$$\phi_{\text{linf}}(w) = \min\{\phi_{\text{linf}}(u), \phi_{\text{linf}}(v)\} . \quad (3.48)$$

Maintenant, supposons que $C = \{0, \dots, d\}$ est un ensemble de priorités. Par définition de ϕ_{parite} , $\phi_{\text{parite}}(w)$ vaut 1 si $\phi_{\text{lsup}}(w)$ est impair et 0 sinon. D'après (3.47) on en déduit que si $\phi_{\text{parite}}(w) \neq !$ alors soit $\phi_{\text{parite}}(u) = 1$ soit $\phi_{\text{parite}}(v) = 1$. Cela prouve que ϕ_{parite} est séparante.

L'équation (1.56) de la proposition 1.33 prouve que $\phi_{\overline{\text{mean}}}$ est séparante. Cela termine la preuve de la proposition 3.24 \square

Le théorème 3.17 entraîne en corollaire :

Corollaire 3.25. *Tout jeu stochastique à un joueur muni de la fonction de paiement $\phi_{\text{parite}}, \phi_{\text{lsup}}, \phi_{\text{linf}}$ ou ϕ_{mean} admet des stratégies optimales positionnelles.*

Pour étendre ce résultat aux jeux à deux joueurs, il nous faut également traiter le cas de la fonction ϕ_{mean} .

Proposition 3.26. *La fonction ϕ_{mean} est positionnelle pour les jeux stochastiques à un joueur. De plus, pour toute arène \mathcal{A} stochastique à un joueur,*

$$\text{val}(\mathcal{A}, \phi_{\text{mean}}) = \text{val}(\mathcal{A}, \phi_{\text{mean}}) . \quad (3.49)$$

Démonstration. Commençons par prouver (3.49) dans le cas où \mathcal{A} est une arène à 0 joueur. En utilisant la préfixe-indépendance de ϕ_{mean} et ϕ_{mean} , on se ramène aisément au cas où tous les états de la chaîne de Markov sous-jacente sont récurrents. On montre que la suite des moyennes partielles définissant ϕ_{mean} et ϕ_{mean} converge avec probabilité 1 vers une valeur constante.

Pour tout triplet $(s, a, t) \in \text{SAS}$, on note $r(s, a, t) \in \mathbb{R}$ le paiement immédiat correspondant. On va prouver que

$$K_n = \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leq i \leq n} r(S_i, A_{i+1}, S_{i+1}) \quad (3.50)$$

tend en probabilité vers une valeur constante. Cela suffit à conclure, puisque

$$\mathbb{E}_s[\phi_{\text{mean}}] = \mathbb{E}_s[\limsup_n K_n] \text{ et } \mathbb{E}_s[\phi_{\text{mean}}] = \mathbb{E}_s[\liminf_n K_n].$$

Soit $\tau_0 = 0$, $\tau_{i+1} = \min\{n > \tau_i : S_n = s\}$ la suite des instants de retour en s . Soit $C_n = S_{\tau_n} A_{\tau_n+1} \cdots S_{\tau_{n+1}-1}$ la suite des cycles simples effectués sur s . Puisque C_n^ω est un mot périodique, $\phi_{\text{mean}}(C_n^\omega) = \phi_{\text{mean}}(C_n^\omega) = \phi_{\text{mean}}(C_n^\omega)$.

Alors quand $n = \tau_m$, l'équation (3.50) peut se réécrire :

$$K_{\tau_m} = \frac{\sum_{0 \leq i \leq m} |C_i|}{\sum_{0 \leq i \leq m} |C_i|} \phi_{\text{mean}}(C_i^\omega).$$

De plus, comme \mathcal{A} est une chaîne de Markov, les variables C_n sont indépendantes et identiquement distribuées, donc d'après la loi des grands nombres,

$$K_{\tau_m} \xrightarrow{m} \frac{\mathbb{E}_s[|C_0| \phi_{\text{mean}}(C_0^\omega)]}{\mathbb{E}_s[|C_0|]} \text{ en probabilité.}$$

On n'a pas encore prouvé que K_n converge en probabilité vers une constante. Pour cela, il faut remarquer que pour $\tau_m \leq n < \tau_{m+1}$,

$$|K_n - K_{\tau_m}| \leq \frac{1}{n} (\tau_{m+1} - \tau_m) \cdot \max_{(s,a,t) \in \text{SAS}} |r(s, a, t)|.$$

Or les temps d'arrêt τ_n sont indépendants et identiquement distribués donc d'après la loi des grands nombres, cette expression converge en probabilité vers 0. Cela prouve que :

$$K_n \xrightarrow{n} \frac{\mathbb{E}_s[|C_0| \phi_{\text{mean}}(C_0^\omega)]}{\mathbb{E}_s[|C_0|]} \text{ en probabilité.}$$

On conclut en appliquant la proposition suivante, avec $\phi_0 = \phi_{\underline{\text{mean}}}$ et $\phi_1 = \phi_{\overline{\text{mean}}}$.

Proposition 3.27. *Soit ϕ_0 et ϕ_1 deux fonctions de paiement sur le même alphabet de couleurs C . Supposons que $\phi_0 \leq \phi_1$, et que pour toute arène à 0 joueur \mathcal{A} colorée par C ,*

$$\text{val}(\mathcal{A}, \phi_0) = \text{val}(\mathcal{A}, \phi_1) . \quad (3.51)$$

Alors si ϕ_1 est positionnelle pour les jeux à un joueur, ϕ_0 l'est également et dans ce cas (3.51) reste vrai quand \mathcal{A} est une arène à un joueur.

Démonstration. Si l'on fixe une stratégie positionnelle dans une arène à 1 joueur, on obtient une arène à 0 joueur. Ainsi, toute stratégie positionnelle optimale σ pour le jeu (\mathcal{A}, ϕ_0) assure le paiement $\text{val}(\mathcal{A}_1, \phi)(s)$ à partir d'un état s . Mais comme $\phi_0 \leq \phi_1$, $\text{val}(\mathcal{A}_0, \phi)(s) \leq \text{val}(\mathcal{A}_1, \phi)(s)$ donc σ est optimale pour le jeu (\mathcal{A}_0, ϕ) . \square

\square

Le corollaire suivant et sa preuve unifient, clarifient et simplifient plusieurs preuves de positionnalité [CY90, MS96, Zie04, CJH03, Bie87, NS03]. Ces preuves sont dispersées et disparates. En particulier, pour les jeux du paiement en moyenne, la preuve de [Bie87] utilise la théorie des martingales et est basée sur des résultats non-triviaux exposés dans d'autres articles et la preuve présentée dans le chapitre 2 de [NS03] est complexe et basée sur une réduction vers les jeux escomptés.

Corollaire 3.28. *Tout jeu stochastique à deux joueurs de parité, du supremum, de l'infimum ou du paiement en moyenne admet des stratégies optimales positionnelles.*

Démonstration. C'est un corollaire du corollaire 3.25, de la proposition 3.26 et du théorème 3.19. \square

3.9.2 Génération de fonctions de paiement séparantes

Dans la sous-section 1.7, on a présenté plusieurs opérations qui permettent de générer de nouveaux exemples de fonctions de paiement positionnelles pour les jeux sur les graphes finis. L'approximation consiste à composer une fonction de paiement par une fonction croissante. L'opération de produit prioritaire est définie dans la définition 1.36.

La proposition suivante indique que ces opérations sont également utilisables dans le cadre des jeux stochastiques.

Proposition 3.29. *Les opérations de binarisation, d'approximation et de produit prioritaire stabilisent la classe des fonctions de paiements séparantes et préfixes-indépendantes.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et ϕ une fonction de paiement. Puisque f est croissante, elle est mesurable, donc $f \circ \phi$ est une fonction de paiement. De plus la définition de la propriété de séparation implique que si ϕ est séparante, alors $f \circ \phi$ l'est aussi.

Soient ϕ_0 et ϕ_1 des fonctions de paiement séparantes et préfixe-indépendantes sur des alphabets C_0 et C_1 et $\phi = \phi_0 \triangleright \phi_1$ leur produit prioritaire. Soit $w \in C^\omega$, un mélange de $u, v \in C^\omega$. Montrons que

$$\phi(w) \leq \max\{\phi(u), \phi(v)\} . \quad (3.52)$$

On considère les différents cas possibles. Tout d'abord, supposons $\pi_0(w)$ infini et $\pi_0(v)$ fini. Alors $\phi(w) = \phi_0(\pi_0(w))$, de plus par préfixe-indépendance de ϕ_0 , $\phi_0(\pi_0(w)) = \phi_0(\pi_0(u))$. D'autre part $\pi_0(u)$ est infini donc $\phi(u) = \phi_0(\pi_0(u))$. Cela prouve que $\phi(w) = \phi(u)$, ce qui prouve (3.52). Le cas où $\pi_0(w)$ et $\pi_0(u)$ est fini est symétrique. Reste le cas où $\pi_0(u)$ et $\pi_0(v)$ sont tous deux infinis. Dans ce cas, $\phi(u) = \phi_0(\pi_0(u))$ et $\phi(v) = \phi_0(\pi_0(v))$. Or comme ϕ_0 est séparante, $\phi_0(\pi_0(w)) \leq \max\{\phi_0(\pi_0(u)), \phi_0(\pi_0(v))\}$, ce qui prouve (3.52).

Supposons $\pi_0(w)$ fini. Alors $\pi_0(u)$ et $\pi_0(v)$ sont finis, donc pour $x \in \{u, v, w\}$, $\phi(x) = \phi_1(\text{proj}_1(x))$. On conclut en utilisant le fait que ϕ est séparante. \square

D'après la proposition précédente, on dispose donc de trois opérations pour générer des fonctions de paiement positionnelles pour les jeux stochastiques à un joueur. La proposition suivante donne une quatrième méthode.

Proposition 3.30. *Soit $C \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble fini de couleurs et ϕ une fonction de paiement sur C . Supposons ϕ séparante et préfixe-indépendante. Alors la fonction de paiement $\phi + \phi_{\text{linf}}$ est également séparante et préfixe-indépendante.*

Démonstration. On utilise le fait que si w est un mélange de u et v alors $\phi_{\text{linf}}(w) = \min\{\phi_{\text{linf}}(u), \phi_{\text{linf}}(v)\}$. \square

On peut résumer les résultats précédents comme suit :

Proposition 3.31. *Soit ϕ une fonction de paiement obtenue à partir des fonctions $\phi_{\text{parite}}, \phi_{\text{lsup}}, \phi_{\text{linf}}$ et ϕ_{mean} en appliquant les opérations de binarisation, d'approximation, de produit prioritaire et de somme avec la fonction ϕ_{linf} . Alors ϕ est préfixe-indépendante et séparante.*

3.9.3 Génération de fonctions de paiement positionnelles pour les jeux stochastiques

D'après le théorème 3.17, toutes les fonctions de paiements décrites par la proposition 3.31 sont positionnelles pour les jeux stochastiques à un joueur. En particulier, cette famille contient le jeu du paiement en moyenne prioritaire ϕ_{meanp} et le jeu du compromis ϕ_{comp} .

On peut généraliser ce résultat aux jeux à deux joueurs, et à la fonction de paiement ϕ_{mean} :

Théorème 3.32. *Soit ϕ une fonction de paiement obtenue à partir des fonctions ϕ_{parite} , ϕ_{lsup} , ϕ_{linf} , $\phi_{\underline{\text{mean}}}$ et $\phi_{\overline{\text{mean}}}$ en appliquant les opérations de binarisation, d'approximation et de produit prioritaire. Alors ϕ est positionnelle pour les jeux stochastiques à deux joueurs.*

Démonstration. Soit ϕ une telle fonction, et ϕ' la fonction obtenue par les mêmes opérations, en remplaçant $\phi_{\underline{\text{mean}}}$ par $\phi_{\overline{\text{mean}}}$. Alors d'après la proposition 3.31, la fonction ϕ' est séparante et préfixes-indépendante. D'après le théorème 3.17, elle est positionnelle pour les jeux à un joueur.

D'autre part, par induction, on prouve que ϕ et ϕ' ont la même valeur dans les jeux à 0 joueur. En effet c'est le cas de $\phi_{\underline{\text{mean}}}$ et $\phi_{\overline{\text{mean}}}$ donc avec probabilité 1, $\phi_{\underline{\text{mean}}}(S_0 A_1 \dots) = \phi_{\overline{\text{mean}}}(S_0 A_1 \dots)$. Cette propriété est conservée par approximation et produit prioritaire, ce qui implique que dans tout jeu à 0 joueur, ϕ et ϕ' ont la même valeur avec probabilité 1.

Comme $\phi \leq \phi'$, on peut appliquer la proposition 3.27, donc ϕ est également positionnelle pour les jeux à un joueur. Par symétrie, $-\phi$ est également positionnelle pour les jeux à un joueur, et on peut donc conclure en appliquant le théorème 3.19. \square

3.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit une propriété vérifiée par tous les jeux positionnels et préfixes-indépendants, prouvé que cette propriété implique leur positionnalité, et utilisé ces résultats afin d'obtenir d'autres exemples de fonctions de paiement positionnelles.

Remarquons que les résultats que nous avons obtenu dans le cadre stochastique ne concernent que les jeux préfixes-indépendants, et excluent donc les jeux d'accessibilité et les jeux multi-escomptés. Toutefois, la positionnalité du jeu d'accessibilité est classique (voir par exemple [Con92]), et celle du jeu multi-escompté a été démontrée par Shapley dans [Sha53]. Cela nous pousse à conclure en formulant la conjecture suivante :

Conjecture 3.33. *Toute fonction de paiement positionnelle pour les jeux déterministes à 1 joueur est positionnelle pour les processus de décision Markoviens.*

Bibliographie

- [AN01] A. Arnold and D. Niwinski. *Rudiments of μ -calculus*, volume 146. Elsevier, 2001.
- [BEM97] A. Bouajjani, J. Esparza, and O. Maler. Reachability analysis of pushdown automata : Applications to model checking. In *CONCUR'97, LNCS*, volume 1243, pages 135–150, 1997.
- [Bie87] K.-J. Bierth. An expected average reward criterion. *Stochastic Processes and Applications*, 26 :133–140, 1987.
- [Bor21] E. Borel. La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique. *Comptes rendus de l'académie des sciences*, dec. 26, 1923 :1304–1308, 1921. Se reporter à T. H. Kjeldsen, 2001.
- [BS78] D. Bertsekas and S. Shreve. *Stochastic Optimal Control : The Discrete-Time Case*. Academic Press, 1978.
- [BSV04] Henrik Björklund, Sven Sandberg, and Sergei G. Vorobyov. Memoryless determinacy of parity and mean payoff games : a simple proof. *Theor. Comput. Sci.*, 310(1-3) :365–378, 2004.
- [BSW03] A. Bouquet, O. Serre, and I. Walukiewicz. Pushdown games with unboundedness and regular conditions. In *Proc. of FSTTCS'03, LNCS*, volume 2914, pages 88–99, 2003.
- [Cac02a] T. Cachat. Symbolic strategy synthesis for games on pushdown graphs. In *Proc. of ICALP'02, LNCS*, volume 2380, pages 704–715. Springer, 2002.
- [Cac02b] T. Cachat. Two-way tree automata solving pushdown games. In *Automata, Logics, and Infinite Games, LNCS*, volume 2500, pages 303–317, 2002.
- [Cac02c] T. Cachat. Uniform solution of parity games on prefix-recognizable graphs. In *Proc. of Infinity'02, ENTCS*, volume 68. Elsevier, 2002.
- [Cac03] T. Cachat. Higher order pushdown automata, the Caucal hierarchy of graphs and parity games. In *"Proc. of ICALP'03"*, volume 2719 of *LNCS*, pages 556–569. Springer, 2003.
- [CDT02] T. Cachat, J. Duparc, and W. Thomas. Pushdown games with a σ_3 winning condition. In *Proc. of CSL 2002, LNCS*, volume 2471, pages 322–336, 2002.
- [Cha06] K. Chatterjee. Concurrent games with tail objectives. In *CSL'06*, 2006.

-
- [CHJ04] K. Chatterjee, T. A. Henzinger, and M. Jurdzinski. Games with secure equilibria. In *LICS'04*, pages 160–169, 2004.
- [CHJ05] K. Chatterjee, T. A. Henzinger, and M. Jurdzinski. Mean-payoff parity games. In *LICS'05*, pages 178–187, 2005.
- [CJH03] K. Chatterjee, M. Jurdzinski, and T.A. Henzinger. Quantitative stochastic parity games. In *SODA*, 2003. to appear.
- [CMH06] K. Chatterjee, R. Majumdar, and T. A. Henzinger. Markov decision processes with multiple objectives. In *STACS*, pages 325–336, 2006.
- [CN05] T. Colcombet and D. Niwiński. On the positional determinacy of edge-labeled games. *submitted*, 2005.
- [Con92] A. Condon. The complexity of stochastic games. *Information and Computation*, 96 :203–224, 1992.
- [Cou38] A. Cournot. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Hachette, 1838. Reprinted New York : Augustus M. Kelley, 1971.
- [CY90] C. Courcoubetis and M. Yannakakis. Markov decision processes and regular events. In *ICALP'90*, volume 443 of *LNCS*, pages 336–349. Springer, 1990.
- [dA97] L. de Alfaro. *Formal Verification of Probabilistic Systems*. PhD thesis, Stanford University, december 1997.
- [dA03] L. de Alfaro. Quantitative verification and control via the mu-calculus. In *CONCUR*, pages 102–126, 2003.
- [dAFH⁺04] L. de Alfaro, M. Faella, T. A. Henzinger, R. Majumdar, and M. Stoelinga. Model checking discounted temporal properties. In *TACAS 2004*, volume 2988 of *LNCS*, pages 77–92. Springer, 2004.
- [dAHK98] L. de Alfaro, T.A. Henzinger, and O. Kupferman. Concurrent reachability games. In *FOCS'98*, pages 564–575. IEEE Computer Society Press, 1998.
- [dAHM01] L. de Alfaro, Thomas A. Henzinger, and Rupak Majumdar. From verification to control : Dynamic programs for omega-regular objectives. In *LICS*, pages 279–290, 2001.
- [dAHM03] L. de Alfaro, Thomas A. Henzinger, and Rupak Majumdar. Discounting the future in systems theory. In *ICALP 2003*, volume 2719 of *LNCS*, pages 1022–1037. Springer, 2003.
- [dAM01] L. de Alfaro and R. Majumdar. Quantitative solution to omega-regular games. In *STOC'01*, pages 675–683. ACM Press, 2001.
- [Dur96] R. Durrett. *Probability Theory and Examples*. Duxbury Press, 1996.
- [EF95] H-D Ebbinghaus and J. Flum. *Finite model theory*. Springer-Verlag, 1995.
- [EJ91a] E. A. Emerson and C. S. Jutla. Tree automata, mu-calculus and determinacy. In *Proc. of 32th FOCS*, pages 368–377. IEEE Computer Society Press, 1991.

- [EJ91b] E.A. Emerson and C. Jutla. Tree automata, μ -calculus and determinacy. In *Proc. of FOCS'91, IEEE Computer Society Press*, pages 368–377, 1991.
- [EM79] A. Ehrenfeucht and J. Mycielski. Positional strategies for mean-payoff games. *International Journal of Game Theory*, 8 :109–113, 1979.
- [ESTW01] K. Etessami, R. Schuller, and Thomas T. Wilke. Fair simulation relations, parity games, and state space reduction for buchi automata. In *Automata, Languages and Programming, 28th international colloquium*, volume 2076 of *LNCS*, pages 694–707. Springer, 2001.
- [FV97] J. Filar and K. Vrieze. *Competitive Markov Decision Processes*. Springer, 1997.
- [GH82] Y. Gurevich and L. Harrington. Trees, automata and games. In *Proc. of 14th annual Symposium on Theory of Computing, ACM*, pages 60–65, 1982.
- [Gil57] D. Gillette. Stochastic games with zero stop probabilities, 1957.
- [Gim04] H. Gimbert. Parity and exploration games on infinite graphs. In *Proc. of CSL'04*, volume 3210 of *LNCS*, pages 56–70. Springer, 2004.
- [Gim07] H. Gimbert. Pure stationary optimal strategies in markov decision processes. In *STACS'07*, 2007.
- [Grä04] E. Grädel. Positional determinacy of infinite games. In *Proc. of STACS'04*, volume 2996 of *LNCS*, pages 4–18, 2004.
- [GTW02] E. Grädel, W. Thomas, and T. Wilke. *Automata, Logics and Infinite Games*, volume 2500 of *LNCS*. Springer, 2002.
- [GZ04] H. Gimbert and W. Zielonka. When can you play positionally? In *Proc. of MFCS'04*, volume 3153 of *LNCS*, pages 686–697. Springer, 2004.
- [GZ05] H. Gimbert and W. Zielonka. Games where you can play optimally without any memory. In *CONCUR 2005*, volume 3653 of *LNCS*, pages 428–442. Springer, 2005.
- [GZ06] H. Gimbert and W. Zielonka. Deterministic priority mean-payoff games as limits of discounted games. In *Proc. of ICALP 06*, LNCS. Springer, 2006.
- [JPZ06] M. Jurdziński, M. Paterson, and U. Zwick. A deterministic subexponential algorithm for solving parity games. In *Proceedings of ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2006*, pages 117–123. ACM/SIAM, 2006.
- [Jur98] M. Jurdziński. Deciding the winner in parity games is in $\text{up} \cap \text{co-up}$. *Information Processing Letter*, 68(3) :119–124, 1998.
- [Jur00] M. Jurdziński. Small progress measures for solving parity games. *Lecture Notes in Computer Science*, 1770 :290–??, 2000.
- [Kec95] A.S. Kechris. *Classical descriptive set theory*. Springer-Verlag, 1995.
- [Kji01] T. H. Kjiildsen. John von neumann's conception of the minimax theorem. *Arch. Exact Sci.*, 56 :39–68, 2001.

-
- [Kla92] N. Klarlund. Progress measures, immediate determinacy, and a subset construction for tree automata. In *Proc. of LICS'92*, 1992.
- [Kop06] E. Kopczyński. Half-positional determinacy of infinite games. In *Proc. of ICALP'06*, LNCS. Springer, 2006.
- [KPV02] O. Kupferman, N. Piterman, and M. Vardi. Pushdown specifications. In *Proc. of LPAR'02*, LNCS, October 2002.
- [KV00] O. Kupferman and M.Y. Vardi. An automata-theoretic approach to reasoning about infinite state systems. In *Proc. of CAV'00*, LNCS, volume 1855, pages 36–52, 2000.
- [Mar75] D. Martin. Borel determinacy. *Annals of Mathematics*, 102 :363–371, 1975.
- [Mar98] D.A. Martin. The determinacy of Blackwell games. *Journal of Symbolic Logic*, 63(4) :1565–1581, 1998.
- [McN93] R. McNaughton. Infinite games played on finite graphs. *Ann. Pure Appl. Logic*, 65 :149–184, 1993.
- [MN81] J.F. Mertens and A. Neyman. Stochastic games. *International Journal of Games Theory*, 10 :53–56, 1981.
- [Mos91] A.W. Mostowski. Games with forbidden positions, 1991.
- [MS85] D. E. Muller and P. E. Schupp. The theory of ends, pushdown automata and second order logic. *Theoretical Computer Science*, 37 :51–75, 1985.
- [MS87] D. E. Muller and P. E. Schupp. Alternating automata on infinite trees. *Theoretical Computer Science*, 54 :267–276, 1987.
- [MS95] D. E. Muller and P. E. Schupp. Simulating alternating tree automata by non-deterministic automata. *Theoretical Computer Science*, 141 :69–107, 1995.
- [MS96] A. Maitra and W. Sudderth. *Discrete Gambling and Stochastic Games*. Springer-Verlag, 1996.
- [NS03] A. Neyman and S. Sorin. *Stochastic games and applications*. Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [Owe82] G. Owen. *Game Theory*. Academic Press, 1982.
- [PM03] N. Piterman and M. Vardi. From bidirectionality to alternation. *Theoretical Computer Science*, 295 :295–321, 2003.
- [PP04] Dominique Perrin and Jean-Eric Pin. *Infinite Words*, volume 141 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 2004.
- [PV01] Viktor Petersson and Sergei Vorobyov. A randomized subexponential algorithm for parity games. *Nordic J. of Computing*, 8(3) :324–345, 2001.
- [RW89] P. J. G. Ramadge and W. M. Wonham. The control of discrete event systems. In *Proc. of the IEEE; Special Issue on Dynamics of Discrete Event Systems*, volume 77(1), pages 81–98, 1989.
- [Sch01] U. Schwabe. Zermelo and the early history of game theory. *Games and economic behavior*, 34 :123–137, 2001.

-
- [Ser03] O. Serre. Note on winning positions on pushdown games with omega-regular conditions. *Information Processing Letters*, 85(6) :285–291, 2003.
- [Ser04] O. Serre. Games with winning conditions of high borel complexity, 2004.
- [Sha53] L. S. Shapley. Stochastic games. In *Proceedings of the National Academy of Science USA*, volume 39, pages 1095–1100, 1953.
- [Tho95] W. Thomas. On the synthesis of strategies in infinite games. In *Proc. of STACS'95, LNCS*, volume 900, pages 1–13, 1995.
- [Tho02] W. Thomas. Infinite games and verification. In *Proc. of CAV'02*, volume 2404, pages 58–64. Springer, 2002.
- [TV87] F. Thuijsman and O. J. Vrieze. *The Bad Match, a total reward stochastic game*, volume 9. 1987.
- [Var98] M. Vardi. Reasoning about the past with two-way automata. In *Proc. of ICALP'98, LNCS*, volume 1443, pages 628–641, 1998.
- [vM44] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, Princeton, 1944. Second edition in 1947, third in 1954.
- [Wad83] W.W. Wadge. *Reducibility and determinateness in the Baire Space*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1983.
- [Wal13] Waldegrave. Preface to Waldegrave's comments : excerpt from Montmort's letter to Nicholas Bernouilli. *Precursor in Mathematical economics : an anthology, 1968*, pages 3–6, 1713.
- [Wal96] I. Walukiewicz. Pushdown processes : Games and model checking. In *Proc. of CAV'96*, volume 1102, pages 62–74. Springer, 1996.
- [Wal01] I. Walukiewicz. Pushdown processes : Games and model checking. *Information and Computation*, 164(2) :234–263, 2001.
- [Wal04] I. Walukiewicz. A landscape with games in the background. In *IEEE LICS'04*, pages 356–366, 2004.
- [Wil01] T. Wilke. Alternating tree automata, parity games and modal μ -calculus. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, 8(2) :359–391, 2001.
- [Zer13] E. Zermelo. Uber eine anwendung der mengenlehre auf die theorie des schachspiels. In *Proc. of the Fifth International Congress of Mathematicians*, volume II, pages 501–504. Cambridge University Press, 1913.
- [Zie98] W. Zielonka. Infinite games on finitely coloured graphs with applications to automata on infinite trees. *Theoretical Computer Science*, 200 :135–183, 1998.
- [Zie04] W. Zielonka. Perfect-information stochastic parity games. In *FOSSACS 2004*, volume 2987 of *LNCS*, pages 499–513. Springer, 2004.