Une condition suffisante pour l'existence d'un attracteur dans les chaînes de Markov infinies

Christel Baier, Nathalie Bertrand & Philippe Schnoebelen

Contexte

- Le cas des chaînes de Markov infinies ne se traite pas aussi aisément que celui des chaînes de Markov finies.
- Les algorithmes concernant les PLCS sont basés sur l'existence d'un attracteur fini.
- Dans les différents papiers sur ce thème la preuve de l'existence de l'attracteur n'est pas rigoureuse, car le résultat semble simple mais une preuve complète est fastidieuse.

On donne ici un critère suffisant pour l'existence d'un attracteur dans les chaînes de Markov infinies.
Ce résultat s'applique aux Channel Systems avec plusieurs types d'erreurs (dont des pertes) probabilistes.

Définitions

Attracteur

Un ensemble d'états $A \subseteq S$ est un *attracteur* ssi pour tout état initial $s \in S$, la probabilité d'atteindre A est 1 : $\forall s \in S,\ \Pr(s \models \Diamond A) = 1$.

Soit $\mathcal{M} = (S, \mathbf{P})$ une chaîne de Markov, et $(S_i) i \in \mathbb{N}$ une partition en *niveaux* de l'espace des états.
On note $\mathbb{E}(s)$ l'espérance du niveau suivant depuis s : $\mathbb{E}(s) = \sum \mathbf{P}(s, S_j) \cdot j$.

Orientation gauche

Une chaîne de Markov $\mathcal{M}$ est *orientée à gauche* s'il existe une constante $\Delta > 0$ telle que $\mathbb{E}(s) \leq \mathrm{level}(s) - \Delta$ pour tout état s avec $\mathrm{level}(s) > 0$.

Orientation presque gauche

Une chaîne de Markov $\mathcal{M}$ est *presque orientée à gauche* s'il existe une constante $\Delta > 0$ et un entier $n_0 > 0$ tels que $\mathbb{E}(s) \leq \mathrm{level}(s) - \Delta$ pour tout état s avec $\mathrm{level}(s) \geq n_0$.

Théorème

Théorème
Si $\mathcal{M}$ est une chaîne de Markov orientée à gauche, alors S_0 est un attracteur.

Corollaire Si $\mathcal{M}$ est une chaîne de Markov presque orientée à gauche (pour n_0), si de plus les niveaux S_i pour $i \leq n_0$ sont finis, et S_0 est accessible depuis tous les états de $S_1 \cup \cdots \cup S_{n_0}$, alors S_0 est un attracteur.

Preuve

hyp : S_0 est un puits. Alors $\Pr(s \models \Diamond S_0) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n(s, S_0)$.
On montre par récurrence l'inégalité suivante

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}^n(s, S_j)\cdot j \le \mathrm{level}(s) - n\Delta + \Delta \sum_{l=1}^{n-1} \mathbf{P}^l(s, S_0) \quad (*)$$

Supposons ensuite qu'il existe un état s tel que $\Pr(s \models \Diamond S_0) < 1$.

On a alors $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}^n(s, S_j)\cdot j < -\mathrm{level}(s)$ en prenant
$n > \mathrm{level}(s)/\Delta(1 - \Pr(s \models \Diamond S_0))$.
Et en remplaçant dans $(*)$, $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}^n(s, S_j)\cdot j < 0$; d'où la contradiction.

Ainsi $\forall s \in S,\ \Pr(s \models \Diamond S_0) = 1$.

Applications

On s'intéresse aux «Lossy Channel Systems» avec pertes et duplications probabilistes de messages : τ est le taux de perte et λ le taux de duplication.

Théorème

Dans un PLCS avec $(1-\tau)(1+\lambda) < 1$, l'ensemble des configurations avec canaux vides est un attracteur (fini) de $\mathcal{M}$.

Peut-on mieux faire?

- $\mathbb{E}(s) \leq \mathrm{level}(s)$ ne permet pas de conclure
  - marche aléatoire sur $\mathbb{N}$; $\mathbb{E}(s) = \mathrm{level}(s)$ et l'état 0 est un attracteur
  - chaîne de Markov $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \mathbf{P})$ avec $\mathbf{P}(i,i) = 1$; pas d'attracteur non trivial
- $\mathbb{E}(s) > \mathrm{level}(s)$ n'implique pas l'absence d'attracteurs non triviaux. Et même il n'y a pas de fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\mathbb{E}(s) > f(\mathrm{level}(s))$ implique que le seul attracteur soit trivial.