Continuité

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

22 septembre 2015

Continuité

Définition : Fonction continue

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

- On dit que f est **continue en** a si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

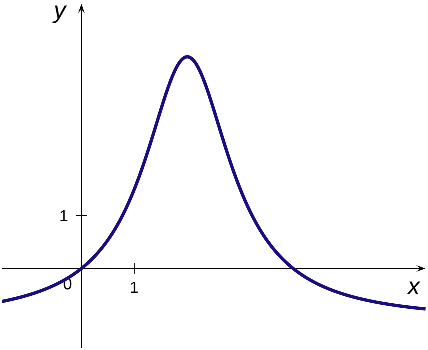
- On dit que f **est continue sur** I si f est continue en tout point a de I.

Représentation graphique

Graphiquement, une fonction continue est celle dont la courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).

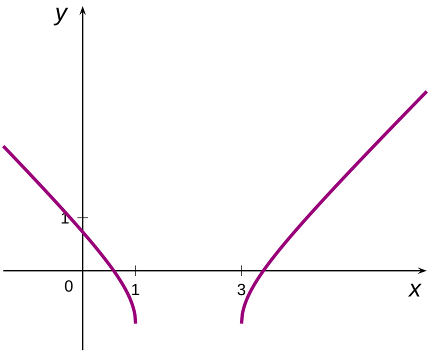
Représentation graphique

Graphiquement, une fonction continue est celle dont la courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).



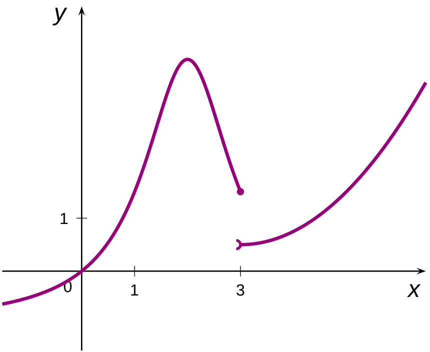
La fonction f est défine et continue sur $\mathbb{R}$.

Représentation graphique



La fonction f n'est pas définie sur $[1;3]$. f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Représentation graphique



La fonction f est défine sur $\mathbb{R}$ mais f n'est pas continue en 3.

Continuité et équations

Théorème des « valeurs intermédiaires »

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b des points de I ($a < b$).
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Continuité et équations

Théorème des « valeurs intermédiaires »

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b des points de I $(a < b)$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Théorème dit de la « bijection »

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$.
Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution **unique** dans $[a,b]$.

Continuité et équations

Théorème des « valeurs intermédiaires »

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b des points de I ($a < b$).
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

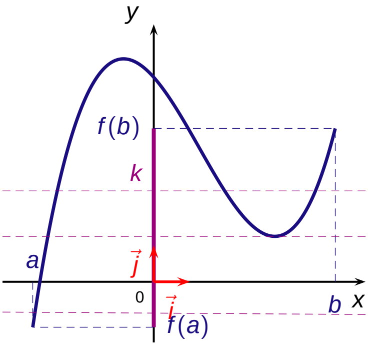
Théorème dit de la « bijection »

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$.
Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution **unique** dans $[a,b]$.

Extension

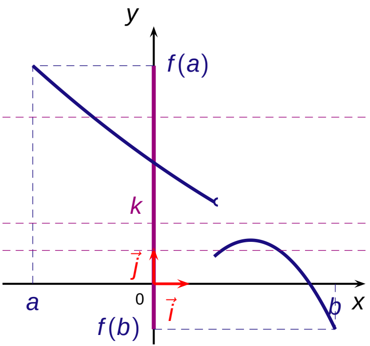
Le théorème précédent reste vrai si a ou b sont infinis.

Interprétation graphique



f est continue sur $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une ou plusieurs solutions.

Interprétation graphique



f est définie sur $[a;b]$ mais f n'est pas continue sur $[a;b]$.
Il existe des réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ tels que l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.

Application

Exercice

Un marcheur a parcouru 10 Km en une heure.
Existe-t-il un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 Km ?

Application

Exercice

Un marcheur a parcouru 10 Km en une heure.
Existe-t-il un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 Km ?

Indications

Considérer la fonction g définie sur $[0; \frac{1}{2}]$ par :
$g(t) = f(t + \frac{1}{2}) - f(t)$ où $f(t)$ est la distance (en Km) parcourue à l'instant t (en heures) avec $t \in [0; 1]$.