Optimisation des fonctions d’une variable réelle

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

26 octobre 2015

Maximum et minimum

Définition

Soit f une fonction définie sur I et a un point de I.

1. On dit que f admet un maximum local (resp : minimum local) en a si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $J \subset I$ et pour tout $x \in J$ on a : $f(x) \leq f(a)$ (resp : $f(x) \geq f(a)$)
2. On dit que f admet un maximum global (resp : minimum global) en a si et seulement si pour tout $x \in I$ on a : $f(x) \leq f(a)$ (resp : $f(x) \geq f(a)$)
3. On dit que f admet un extremum en a si et seulement si f admet un maximum ou un minimum en a.

Maximum et minimum

Définition

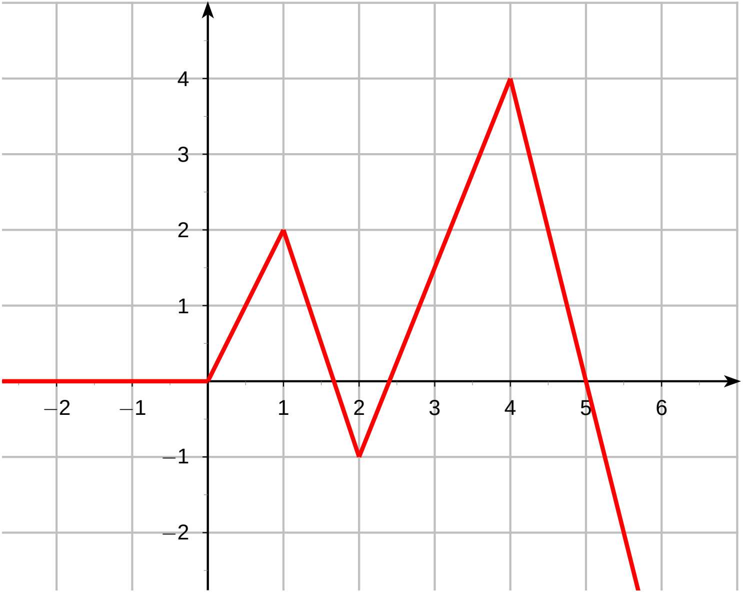
Soit f une fonction définie sur I et a un point de I.

1. On dit que f admet un maximum local (resp : minimum local) en a si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $J \subset I$ et pour tout $x \in J$ on a : $f(x) \leq f(a)$ (resp : $f(x) \geq f(a)$)
2. On dit que f admet un maximum global (resp : minimum global) en a si et seulement si pour tout $x \in I$ on a : $f(x) \leq f(a)$ (resp : $f(x) \geq f(a)$)
3. On dit que f admet un extremum en a si et seulement si f admet un maximum ou un minimum en a.

Remarque

Un extremum global est un extremum local.

Maximum et minimum



Maximum et minimum

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle fermé borné $I = [a; b]$. Alors f admet un maximum et un miminum global sur cet intervalle.

Conditions du premier ordre

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur un ouvert I et si f admet en un point x_0 de I un extremum, alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.

Conditions du premier ordre

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur un ouvert I et si f admet en un point x_0 de I un extremum, alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.

Remarques :

- La réciproque de cette propriété est fausse.
  Contre-exemple : la fonction cube (en zéro, la dérivée s'annule mais ce n'est pas un extremum).

Conditions du premier ordre

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur un ouvert I et si f admet en un point x_0 de I un extremum, alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.

Remarques :

- La réciproque de cette propriété est fausse.
  Contre-exemple : la fonction cube (en zéro, la dérivée s'annule mais ce n'est pas un extremum).
- Si $f'(x_0) = 0$ pour un point x_0 de I ouvert, on dit que x_0 est un point critique (ou stationnaire) de f. Le théorème précédent dit que les extremums sur l'ouvert I sont à chercher parmi les points critiques.

Conditions du premier ordre

Théorème

Si f est une fonction dérivable sur un ouvert I et si f admet en un point x_0 de I un extremum, alors nécessairement $f'(x_0) = 0$.

Remarques :

- La réciproque de cette propriété est fausse.
  Contre-exemple : la fonction cube (en zéro, la dérivée s'annule mais ce n'est pas un extremum).
- Si $f'(x_0) = 0$ pour un point x_0 de I ouvert, on dit que x_0 est un point critique (ou stationnaire) de f. Le théorème précédent dit que les extremums sur l'ouvert I sont à chercher parmi les points critiques.
- Si on doit optimiser f sur $[a; b]$ fermé, on optimise f sur $]a; b[$ ouvert puis on regarde ce qui se passe en a et en b.

Conditions du second ordre

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point critique de f. Alors :

Conditions du second ordre

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point critique de f. Alors :

- Si $f''(x_0) > 0$, f présente en x_0 un minimum local.

Conditions du second ordre

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point critique de f. Alors :

- Si $f''(x_0) > 0$, f présente en x_0 un minimum local.
- Si $f''(x_0) < 0$, f présente en x_0 un maximum local.

Conditions du second ordre

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point critique de f. Alors :

- Si $f''(x_0) > 0$, f présente en x_0 un minimum local.
- Si $f''(x_0) < 0$, f présente en x_0 un maximum local.
- Si $f''(x_0) = 0$, on ne peut rien dire.

Fonctions convexes

Définition

La fonction f est dite convexe si

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1],\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Elle est dite concave si $-f$ est convexe.

Fonctions convexes

Définition

La fonction f est dite convexe si

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1],\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Elle est dite concave si $-f$ est convexe.

Définition bis

On dit que f est convexe (resp. concave) sur un intervalle I si pour tous points A et B de la courbe représentant f, l'arc de courbe est situé au-dessous (au-dessus) du segment $[AB]$.

Fonctions convexes

Définition

La fonction f est dite convexe si

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1],\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Elle est dite concave si $-f$ est convexe.

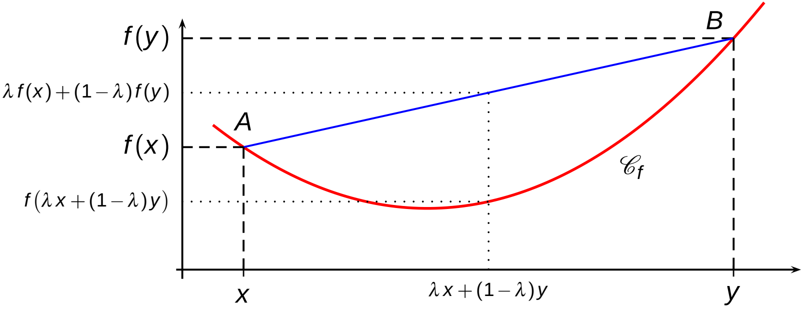
Définition bis

On dit que f est convexe (resp. concave) sur un intervalle I si pour tous points A et B de la courbe représentant f, l'arc de courbe est situé au-dessous (au-dessus) du segment $[AB]$.

Exemples

Les fonctions $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto |x|$ sont convexes.

Fonctions convexes : Interprétation graphique



Convexité des fonctions dérivables

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f est convexe sur $I \iff f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- f est concave sur $I \iff f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$

Convexité des fonctions dérivables

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f est convexe sur $I \iff f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- f est concave sur $I \iff f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$

Inégalités de convexité

Si f est dérivable et convexe sur I alors sa courbe représentative est au-dessus de chacune de ses tangentes :

$$\forall a, x \in I,\ f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$$

Pour les fonctions concaves l'inégalité est inversée.

L'intérêt des fonctions convexes ou concaves dans les problèmes d'optimisation s'explique par le résultat suivant :

L'intérêt des fonctions convexes ou concaves dans les problèmes d'optimisation s'explique par le résultat suivant :

Théorème

Soit f une fonction concave (resp. convexe) sur intervalle ouvert I. Si x_0 est un point critique pour f, alors f présente en x_0 un maximum (resp. minimum) global sur I.

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 12x + 3$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les dérivées première et seconde de f.
3. Déterminer les extrema de f.
4. Construire le tableau de variations de f.
5. Les extrema de f sont-ils globaux ?

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les dérivées première et seconde de f.
3. Déterminer les extrema de f.
4. Construire le tableau de variations de f.
5. Les extrema de f sont-ils globaux ?
6. Que peut-on dire des extrema si on restreint l'étude de f à chaque intervalle du domaine de définition ?