

Suites numériques

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

7 décembre 2015

Définition

Une suite est une fonction définie sur \mathbb{N} . Une suite numérique est une suite à valeurs dans \mathbb{R} . L'image de n par une suite u se note u_n et est appelé terme de rang n de la suite.

Une suite u est aussi notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition

Une suite est une fonction définie sur \mathbb{N} . Une suite numérique est une suite à valeurs dans \mathbb{R} . L'image de n par une suite u se note u_n et est appelé terme de rang n de la suite.

Une suite u est aussi notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple

① u définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{1}{n+2}$

$$u_0 = \frac{1}{2}, u_1 = \frac{1}{3}, u_2 = \frac{1}{4}, \dots$$

② v définie pour tout $n \geq 3$ par $v_n = \frac{1}{n-2}$

$$v_3 = 1, v_4 = \frac{1}{2}, v_5 = \frac{1}{3}, \dots$$

Deux façons de définir une suite

Explicitement en fonction du rang

Toute fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ (ou sur un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$) permet de définir une suite telle que pour tout $n \geq 0$ (resp. $n \geq a$) : $u_n = f(n)$.

Deux façons de définir une suite

Explicitement en fonction du rang

Toute fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ (ou sur un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$) permet de définir une suite telle que pour tout $n \geq 0$ (resp. $n \geq a$) : $u_n = f(n)$.

Exemple

Calculer les premiers termes de la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = 2n^2 - 5n - 1$.

Deux façons de définir une suite

Explicitement en fonction du rang

Toute fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ (ou sur un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$) permet de définir une suite telle que pour tout $n \geq 0$ (resp. $n \geq a$) : $u_n = f(n)$.

Exemple

Calculer les premiers termes de la suite définie sur \mathbb{N} par

$$u_n = 2n^2 - 5n - 1.$$

$$u_0 = 2 \times 0^2 - 5 \times 0 - 1 = -1 ; u_1 = 2 \times 1^2 - 5 \times 1 - 1 = -4 ;$$

$$u_2 = 2 \times 2^2 - 5 \times 2 - 1 = -3 ; u_3 = 2 \times 3^2 - 5 \times 3 - 1 = 2 ;$$

$$u_4 = 2 \times 4^2 - 5 \times 4 - 1 = 11 \dots$$

Deux façons de définir une suite

Les propriétés des nombres entiers permettent aussi de définir explicitement des suites qui ne peuvent pas être obtenues simplement par une fonction définie sur \mathbb{R} .

Deux façons de définir une suite

Les propriétés des nombres entiers permettent aussi de définir explicitement des suites qui ne peuvent pas être obtenues simplement par une fonction définie sur \mathbb{R} .

Exemple

Calculer les premiers termes des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $u_n = (-1)^n$ et v_n est le nombre de diviseurs de n .

Deux façons de définir une suite

Les propriétés des nombres entiers permettent aussi de définir explicitement des suites qui ne peuvent pas être obtenues simplement par une fonction définie sur \mathbb{R} .

Exemple

Calculer les premiers termes des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $u_n = (-1)^n$ et v_n est le nombre de diviseurs de n .

$$u_0 = 1 ; u_1 = -1 ; u_2 = 1 ; u_3 = -1 ; \dots$$

$$v_1 = 1 ; v_2 = 2 ; v_3 = 2 ; v_4 = 3 ; v_5 = 2 ; v_6 = 4 \dots$$

Deux façons de définir une suite

Par récurrence

Une suite peut aussi être définie par son premier terme (ou ses premiers termes) et par une relation permettant de calculer chaque terme en fonction du précédent (ou des précédents).

Deux façons de définir une suite

Par récurrence

Une suite peut aussi être définie par son premier terme (ou ses premiers termes) et par une relation permettant de calculer chaque terme en fonction du précédent (ou des précédents).

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$. Alors la suite $(u_n)_{n \geq p}$ est définie par la donnée de son premier terme u_p ($u_p \in I$) et d'une relation de la forme pour tout $n \geq p$: $u_{n+1} = f(u_n)$ (relation de récurrence).

Deux façons de définir une suite

Exemples

Calculer les premiers termes des suites définies sur \mathbb{N} .

$$u \text{ est définie par } \begin{cases} u_0 = -6 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n - 1 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

$$v \text{ est définie par } \begin{cases} v_0 = 1 ; v_1 = 1 \\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

Deux façons de définir une suite

Exemples : solutions

$$u_1 = -\frac{1}{2}u_0 - 1 = -\frac{1}{2} \times (-6) - 1 = 2$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}u_1 - 1 = -\frac{1}{2} \times 2 - 1 = -2$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}u_2 - 1 = -\frac{1}{2} \times (-2) - 1 = 0$$

$$u_4 = -\frac{1}{2}u_3 - 1 = -\frac{1}{2} \times 0 - 1 = -1$$

Deux façons de définir une suite

Exemples : solutions

$$u_1 = -\frac{1}{2}u_0 - 1 = -\frac{1}{2} \times (-6) - 1 = 2$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}u_1 - 1 = -\frac{1}{2} \times 2 - 1 = -2$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}u_2 - 1 = -\frac{1}{2} \times (-2) - 1 = 0$$

$$u_4 = -\frac{1}{2}u_3 - 1 = -\frac{1}{2} \times 0 - 1 = -1$$

$$v_2 = v_1 + v_0 = 1 + 1 = 2; \quad v_3 = v_2 + v_1 = 2 + 1 = 3;$$

$$v_4 = v_3 + v_2 = 3 + 2 = 5; \quad v_5 = v_4 + v_3 = 5 + 3 = 8;$$

$$v_6 = v_5 + v_4 = 8 + 5 = 13$$

Théorème

u est croissante si et seulement si pour tout entier n , $u_n \leq u_{n+1}$.

u est décroissante si et seulement si pour tout entier n ,

$u_n \geq u_{n+1}$.

Théorème

u est croissante si et seulement si pour tout entier n , $u_n \leq u_{n+1}$.
 u est décroissante si et seulement si pour tout entier n ,
 $u_n \geq u_{n+1}$.

Remarques

- Ne pas mélanger u_{n+1} et $u_n + 1$
- Dans la pratique, pour déterminer le sens de variation d'une suite, on s'intéresse au signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
- Dans le cas où tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut aussi comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exercice

Déterminer le sens de variation des suites suivantes :

- u est définie sur \mathbb{N} par $u_n = 3n + (-1)^n$.

- v est définie sur \mathbb{N} par

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = -v_n^2 + v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- w est définie sur \mathbb{N}^* par $w_n = \frac{2^n}{n}$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ et u la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = f(n)$.

Si f est croissante sur $[0 ; +\infty[$ alors u est croissante.

Si f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ alors u est décroissante.

Théorème

Soit f une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ et u la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = f(n)$.

Si f est croissante sur $[0 ; +\infty[$ alors u est croissante.

Si f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ alors u est décroissante.

Exercice

Déterminer le sens de variation de la suite u définie sur \mathbb{N} par $u_n = (n+3)^2$.

Définition

Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n \leq M$.

Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n \geq m$.

Une suite (u_n) majorée et minorée est bornée.

Définition

Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n \leq M$.

Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n \geq m$.

Une suite (u_n) majorée et minorée est bornée.

Exemples

Une suite croissante est minorée par son premier terme.

(car $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots$)

Une suite décroissante est majorée par son premier terme.

(car $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq \dots$)

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et r un réel.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Suites arithmétiques

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et r un réel.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple

La suite des nombres impairs est une suite arithmétique de raison 2.

Suites arithmétiques

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et r un réel.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple

La suite des nombres impairs est une suite arithmétique de raison 2.

Exercice

Les suites u et v définies sur \mathbb{N} par $u_n = 3n - 4$ et $v_n = n^2 + 2$ sont-elles arithmétiques ?

Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

Si $r > 0$ alors u est strictement croissante.

Si $r = 0$ alors u est constante.

Si $r < 0$ alors u est strictement décroissante.

Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

Si $r > 0$ alors u est strictement croissante.

Si $r = 0$ alors u est constante.

Si $r < 0$ alors u est strictement décroissante.

Preuve

En exercice...

Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

Pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

En particulier, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

Pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

En particulier, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Preuve

En exercice...

Somme de termes consécutifs

Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

Pour tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

Pour tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Remarque : On a aussi $u_1 + u_2 \cdots + u_{n-1} + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$

Somme de termes consécutifs

Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

Pour tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Remarque : On a aussi $u_1 + u_2 \cdots + u_{n-1} + u_n = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$

Théorème bis

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r .

Pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{1}^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Somme de termes consécutifs

Preuve

Posons $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

On a ainsi $2S =$

$$(u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \dots + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0)$$

Or, pour tout $k \leq n$,

$$u_k + u_{n-k} = u_0 + kr + u_0 + (n-k)r = u_0 + u_0 + nr = u_0 + u_n.$$

On a donc : $2S = (n+1) \times (u_0 + u_n)$

$$\text{Donc } S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Somme de termes consécutifs

Preuve

Posons $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

On a ainsi $2S =$

$$(u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \cdots + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0)$$

Or, pour tout $k \leq n$,

$$u_k + u_{n-k} = u_0 + kr + u_0 + (n-k)r = u_0 + u_0 + nr = u_0 + u_n.$$

On a donc : $2S = (n+1) \times (u_0 + u_n)$

$$\text{Donc } S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Exercice

Déterminer la somme des n premiers nombres impairs.

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et q un réel.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Remarque : Si $q \neq 0$ et $u_0 \neq 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

Suites géométriques

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et q un réel.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Remarque : Si $q \neq 0$ et $u_0 \neq 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

Exemple

La suite des puissances de 2 est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

Suites géométriques

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et q un réel.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q si pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Remarque : Si $q \neq 0$ et $u_0 \neq 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

Exemple

La suite des puissances de 2 est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.

Exercice

Les suites u et v définies sur \mathbb{N} par $u_n = -4 \times 3^n$ et $v_n = n^2 + 1$ sont-elles géométriques ?

Théorème

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .

Pour tous entiers naturels n et p :

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

En particulier, pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n$$

Théorème

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .
Pour tous entiers naturels n et p :

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

En particulier, pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n$$

Preuve

En exercice...

Théorème

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$.

Si $q > 1$ alors $\begin{cases} \text{si } v_0 > 0, v \text{ est strictement croissante.} \\ \text{si } v_0 < 0, v \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$

Si $q = 1$ alors v est constante.

Si $0 < q < 1$ alors $\begin{cases} \text{si } v_0 > 0, v \text{ est strictement décroissante.} \\ \text{si } v_0 < 0, v \text{ est strictement croissante.} \end{cases}$

Si $q < 0$ alors v n'est pas monotone.

Théorème

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$.

Si $q > 1$ alors $\begin{cases} \text{si } v_0 > 0, v \text{ est strictement croissante.} \\ \text{si } v_0 < 0, v \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$

Si $q = 1$ alors v est constante.

Si $0 < q < 1$ alors $\begin{cases} \text{si } v_0 > 0, v \text{ est strictement décroissante.} \\ \text{si } v_0 < 0, v \text{ est strictement croissante.} \end{cases}$

Si $q < 0$ alors v n'est pas monotone.

Preuve

Pour tout n , $v_{n+1} - v_n = v_0 \times q^{n+1} - v_0 \times q^n = v_0 \times q^n (q - 1)$

Le signe de $v_{n+1} - v_n$ s'obtient donc en fonction du signe de v_0 , du signe de q^n et du signe de $q - 1$.

Théorème

Soit q un réel différent de 1.

Pour tout entier naturel n :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

Pour tout entier naturel n :

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Théorème bis

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q .

❶ Si $q = 1$ alors

$$\sum_{k=0}^n v_k = (n+1) \times v_0 = \text{nombre de termes} \times (1^{\text{er}} \text{ terme})$$

❷ Si $q \neq 1$ alors

$$\sum_{k=0}^n v_k = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Somme de termes consécutifs

Preuve

Posons $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n$. On a alors

$$qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$$

$$\text{Ainsi, } S - qS = 1 - q^{n+1}$$

$$\text{D'où : } S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Somme de termes consécutifs

Preuve

Posons $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n$. On a alors

$$qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$$

Ainsi, $S - qS = 1 - q^{n+1}$

$$\text{D'où : } S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exercice

Déterminer la somme des n premières puissances de 2 ($1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$).

Définition

On appelle suite arithmético-géométrique toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = au_n + b \quad \text{avec } a \neq 1 \text{ et } b \neq 0$$

Expression de u_n en fonction de n

Méthode

- 1 Soit α la solution de l'équation $x = ax + b$.
- 2 Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$.
- 3 Ainsi $v_{n+1} = \dots = av_n$.
- 4 La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique...
- 5 $u_n = a^n(u_0 - \alpha) + \alpha$.

Expression de u_n en fonction de n

Méthode

- 1 Soit α la solution de l'équation $x = ax + b$.
- 2 Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$.
- 3 Ainsi $v_{n+1} = \dots = av_n$.
- 4 La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique...
- 5 $u_n = a^n(u_0 - \alpha) + \alpha$.

Exercice

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n ,

$u_{n+1} = 4u_n - 1$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Exprimer S_n en fonction de n .

Définition : Suites convergentes

Une suite u converge vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que u est convergente et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

Définition : Suites convergentes

Une suite u converge vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que u est convergente et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

On peut formuler la définition comme suit :

Définition : Suites convergentes

- u converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.
- u converge vers ℓ si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ , il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies u_n \in I$.

Définition : Suites convergentes

Une suite u converge vers un réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que u est convergente et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

On peut formuler la définition comme suit :

Définition : Suites convergentes

- u converge vers l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.
- u converge vers l si pour tout intervalle ouvert I contenant l , il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \implies u_n \in I$.

Théorème

Si une suite converge alors sa limite est unique.

Suites divergentes

Une suite divergente est une suite qui n'est pas convergente.

Suites de limite infinie : définition

Une suite u a pour limite $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que u diverge vers $+\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On définit de la même façon une suite qui diverge vers $-\infty$.

Suites divergentes

Une suite divergente est une suite qui n'est pas convergente.

Suites de limite infinie : définition

Une suite u a pour limite $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que u diverge vers $+\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On définit de la même façon une suite qui diverge vers $-\infty$.

Suites qui n'ont pas de limite

Une suite n'est pas nécessairement convergente ou divergente vers l'infini. Il existe des suites qui n'ont pas de limite. Elles sont aussi appelées suites divergentes.

Suites divergentes

Une suite divergente est une suite qui n'est pas convergente.

Suites de limite infinie : définition

Une suite u a pour limite $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit alors que u diverge vers $+\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On définit de la même façon une suite qui diverge vers $-\infty$.

Suites qui n'ont pas de limite

Une suite n'est pas nécessairement convergente ou divergente vers l'infini. Il existe des suites qui n'ont pas de limite. Elles sont aussi appelées suites divergentes.

Exemple

u définie sur \mathbb{N} par $u_n = (-1)^n$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ et soit u la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = f(n)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ et soit u la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = f(n)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Conséquence

Toutes les propriétés vues sur les limites de fonctions s'appliquent aux suites définies par $u_n = f(n)$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ et soit u la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = f(n)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Conséquence

Toutes les propriétés vues sur les limites de fonctions s'appliquent aux suites définies par $u_n = f(n)$.

Exercice

Déterminer la limite de la suite u définie sur \mathbb{N} par

$$u_n = \frac{-2n^2 + n}{3n^2 + 1}$$

Théorème bis...

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$).

Si f a une limite (finie ou infinie) en $+\infty$ alors la suite (u_n) telle que $u_n = f(n)$ a la même limite que f .

Théorème bis...

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$).

Si f a une limite (finie ou infinie) en $+\infty$ alors la suite (u_n) telle que $u_n = f(n)$ a la même limite que f .

Attention

La réciproque est fausse!!!

Théorème bis...

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme

$[a; +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$).

Si f a une limite (finie ou infinie) en $+\infty$ alors la suite (u_n) telle que $u_n = f(n)$ a la même limite que f .

Attention

La réciproque est fausse!!!

Par exemple...

La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sin(2\pi n) = 0$ est convergente.

Alors que la fonction f définie par $f(x) = \sin(2\pi x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Théorème des gendarmes

Théorème

On considère trois suites u , v et w et un réel ℓ .

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \\ u_n \leq v_n \leq w_n \quad \text{à partir d'un certain rang} \end{cases}$$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

Théorème des gendarmes

Théorème

On considère trois suites u , v et w et un réel ℓ .

Si
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \\ u_n \leq v_n \leq w_n \quad \text{à partir d'un certain rang} \end{array} \right.$$

alors
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell.$$

Exercice

Déterminer la limite de la suite u définie sur \mathbb{N}^* par

$$u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$.
Soit (u_n) une suite à valeurs dans I (dont tous les termes sont éléments de I).

a et ℓ désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$.
Soit (u_n) une suite à valeurs dans I (dont tous les termes sont éléments de I).

a et ℓ désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \ell$.

Exercice

Soit la suite (u_n) telle que pour tout n de \mathbb{N} :
$$u_n = \frac{2 \cdot 3^n - 1}{3^n + 1}.$$

Suites adjacentes

Définition

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Suites adjacentes

Définition

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Approximation décimale de π

Pour tout $n \geq 1$, on désigne respectivement par d_n et e_n les approximations à n décimales du nombre π , respectivement par défaut et par excès.

Puisque $\pi = 3,1415926535\dots$, il en résulte que :

$$d_1 = 3,1 \quad d_2 = 3,14 \dots d_6 = 3,141592 \quad \text{etc...}$$

$$e_1 = 3,2 \quad e_2 = 3,15 \dots d_6 = 3,141593 \quad \text{etc...}$$

Il est clair que la suite (d_n) est croissante, et que la suite (e_n) est décroissante ; d'autre part :

$$e_n - d_n = 10^{-n} \quad \text{donc} \quad \lim(e_n - d_n) = 0$$

De plus, π appartient à chacun des intervalles emboîtés $[d_n; e_n]$.

Le théorème des suites adjacentes

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent et ont même limite ℓ . De plus, pour tout n :
 $u_n \leq \ell \leq v_n$ (si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante).

Théorème : Suites monotones non bornées

Si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors
 $\lim u_n = +\infty$.

Si une suite (v_n) est décroissante et non minorée, alors
 $\lim v_n = -\infty$.

Théorème : Suites monotones non bornées

Si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors
 $\lim u_n = +\infty$.

Si une suite (v_n) est décroissante et non minorée, alors
 $\lim v_n = -\infty$.

Le théorème de la convergence monotone

Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.

Si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Commentaires

Ce résultat, difficile à établir, car il découle de la construction des nombres réels, est capital en Analyse : il livre un résultat asymptotique sur une suite à partir de son comportement global. Cependant, il reste muet sur la valeur de sa limite. On ne peut pas tout avoir ...

Commentaires

Ce résultat, difficile à établir, car il découle de la construction des nombres réels, est capital en Analyse : il livre un résultat asymptotique sur une suite à partir de son comportement global. Cependant, il reste muet sur la valeur de sa limite. On ne peut pas tout avoir ...

Exemple

On pose

$$u_1 = 0,2 \quad u_2 = 0,23 \quad u_3 = 0,235 \dots u_7 = 0,2357111317$$

u_n s'écrit 0 virgule, suivi de la juxtaposition des n premiers nombres premiers. Cette suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc par le théorème précédent cette suite converge. Sa limite est un mystérieux nombre imaginé par Paul Erdős, figure marquante des mathématiques du XX^{ème} siècle.