

## T.D. n° 1 : Polynômes

### Exercice 1

---

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

1.  $2x^2 - 8x + 6 = 0$
2.  $-x^2 + 6x - 10 = 0$
3.  $x^2 + 4x - 21 = 0$
4.  $x^4 + 4x^2 - 21 = 0$
5.  $x^4 + 4x^2 + 21 = 0$
6.  $x^2 + 4x = 0$
7.  $(x + 1)^3 + x + 1 = 0$
8.  $x^2 = 9$
9.  $2x^4 + 4x^2 + 2 \geq 0$
10.  $-2x^2 + 7x - 5 \leq 0$
11.  $(x^2 + 2x + 1)^2 < 16$
12.  $\frac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3x - 10} > 0$

### Exercice 2

---

Existe-t-il deux nombres ayant pour somme 9 et pour produit -70 ?

Si oui, les calculer.

### Exercice 3

---

La somme des âges de deux amis est 53 ans. Dans 5 ans, le produit de leurs âges sera 990.

Quels sont les âges des deux amis ?

### Exercice 4

---

Soit le polynôme  $P(x) = x^2 + 6x - 7$ . Déterminer les racines de  $P$  sans calculer son discriminant.

Même question avec le polynôme  $Q(x) = 3x^2 - 9x - 12$ .

### Exercice 5

---

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1.  $A(x) = 4x^3 - 13x - 5$  par  $B(x) = 2x + 1$ .
2.  $A(x) = x^8$  par  $B(x) = x^4 + x^2 + 1$ .
3.  $A(x) = x^3 - 4x + 5$  par  $B(x) = x^2 - 3x + 2$ .
4.  $A(x) = x^4 + 1$  par  $B(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ .

### Exercice 6

---

Soient les polynômes  $P(x) = 6x^5 - 14x^4 + 11x^3 - 17x^2 + ax + b$  et  $Q(x) = 2x^2 + 1$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels. Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$  de sorte que  $Q(x)$  divise  $P(x)$ .

### Exercice 7

---

1. Montrer que le polynôme  $D(x) = x + 1$  divise le polynôme  $P(x) = x^5 + 1$ , et déterminer le quotient de  $P(x)$  par  $D(x)$ .
2. Même question avec  $D(x) = x^2 - 1$  et  $P(x) = x^8 - 1$ . Quelles sont les racines de  $P(x)$  ?

**Exercice 8**

Calculer le reste de la division euclidienne de  $P(x) = x^n + x + 1$  par  $(x - 1)^2$  (où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2).

**Exercice 9**

Soit  $P$  un polynôme tel que le reste de la division de  $P(x)$  par  $x + 1$  est 2 et le reste de la division de  $P(x)$  par  $x - 1$  est  $-4$ .

Quel est le reste de la division de  $P(x)$  par  $x^2 - 1$  ?

**Exercice 10**

Factoriser les polynômes suivants.

1.  $P_1(x) = 3x^3 + x^2$ . En déduire la factorisation de  $P_2(x) = 3x^3 + x^2 + 3x + 1$ .
2.  $P_3(x) = x^4 - 6x^2 + 8$ .
3.  $P_4(x) = x^4 - x^2 - 12$ .
4.  $P_5(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 20$  (vérifier que  $-2$  est une racine).

**Exercice 11**

Déterminer l'ordre des racines des polynômes suivants :

1.  $P_1(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ .
2.  $P_2(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$ .

**Exercice 12**

Soit le polynôme  $P(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ . À l'aide l'algorithme de Horner, calculer  $P(5)$ .  
Même question avec le polynôme  $P(x) = x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 4x - 10$  à évaluer en  $-4$ .