

## TD 2 : Limites-Dérivation

### Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(1-2x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(1 - \frac{12}{x}\right)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^3 - x^2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{-2 + 3x^3}$
$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)^3}{x^2 - 2}$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 + 3}{2 - x}$	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{-3x^2 - 7x + 6}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \sqrt{\frac{2x + 3}{5x^3 + 3x^2 + 7}}$
$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{\sqrt{x+1} - 2}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 - 3} + x$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 3x}{2x - 4}$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x - \sqrt{x}}{2x}$

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{x - 3}$  et soit  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. En déduire d'éventuelles asymptotes.
2. Effectuer la division euclidienne de  $x^2 - 4x - 1$  par  $x - 3$  puis en déduire toutes les asymptotes de  $\mathcal{C}$ .

### Exercice 3

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes dérivables sur leur ensemble de définition :

1.  $f_1$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_1(x) = \frac{5}{3x^2 + x + 1}$
2.  $f_2$  est définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f_2(x) = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^2$
3.  $f_3$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_3(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$
4.  $f_4$  est définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f_4(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2+2}}$
5.  $f_5$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  par  $f_5(x) = \frac{x^2 + 3}{2 - x}$
6.  $f_6$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_6(x) = \frac{(5x+2)^2}{x^2+1}$
7.  $f_7$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f_7(x) = \left(2 + \frac{x^2}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right)$
8.  $f_8$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f_8(x) = x \left(1 - \frac{2}{x}\right)$

### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  par :  $f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 7}{4x - 2}$ .

On appelle  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

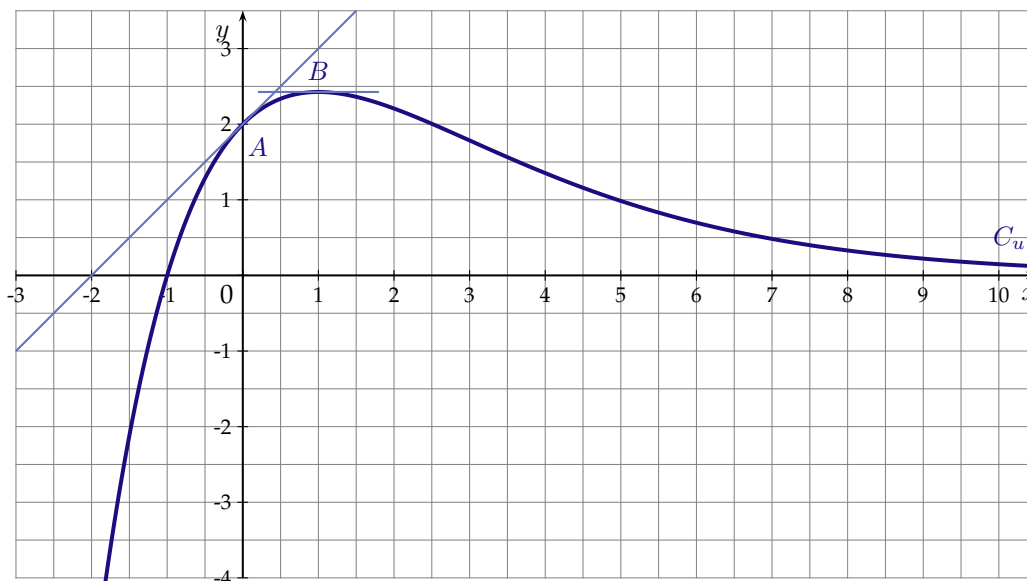
1. Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} f(x)$ , qu'en déduit-on pour la courbe  $\mathcal{C}_f$  ?
2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - (a) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{4x - 2}$ .
  - (b) En déduire que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet pour asymptote la droite  $\Delta$  d'équation  $y = \frac{x}{2} - 3$ .
  - (c) Étudier les positions relatives de la courbe  $\mathcal{C}_f$  et de la droite  $\Delta$ .
  - (d) Résoudre sur  $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$  l'inéquation  $\frac{1}{4x - 2} \leq 0,001$ .
  - (e) Calculer mentalement, une valeur approchée au millième près de l'image par  $f$  de 500.

3. Calculer la dérivée de la fonction  $f$ .
4. Étudier les variations de  $f$ .
5. Donner une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse 1.

### Exercice 5

La courbe  $C_u$  ci-dessous représente une fonction  $u$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $u'$  la fonction dérivée de la fonction  $u$ . On sait que :

- la courbe  $C_u$  coupe l'axe des ordonnées au point  $A(0; 2)$  et la tangente ( $T$ ) à la courbe au point  $A$  passe par le point de coordonnées  $(-2; 0)$ ;
- la courbe  $C_u$  est située en-dessous de ( $T$ ) sur  $\mathbb{R}$ ;
- la courbe  $C_u$  admet au point  $B$  d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe  $C_u$  en  $+\infty$ .



1. À partir du graphique et des renseignements fournis :
  - (a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ .
  - (b) Déterminer  $u'(0)$  et  $u'(1)$ .
  - (c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe  $C_u$  au point  $A$ .
  - (d) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x)$ .
2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ .
  - (a) Étudier les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son intervalle de définition. La courbe représentative de la fonction  $f$  admet-elle des asymptotes ?
  - (b) Déterminer  $f'(0)$  et  $f'(1)$ .
3. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = [u(x)]^2$ .
  - (a) Étudier les limites de la fonction  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . La courbe représentative de la fonction  $g$  admet-elle des asymptotes ?
  - (b) Déterminer  $g'(0)$  et  $g'(1)$ .