

T.D. n° 4 : suites numériques

Exercice 1

- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
 - Sachant que $r = 5$ et $u_0 = 1$, calculer u_4 et S_{10} .
 - Sachant que $u_3 = 5$ et $S_4 = 15$, déterminer r et u_0 .
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est cette fois une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .
 - Sachant que $u_0 = 3$ et $q = -5$, calculer u_3 et S_3 .
 - Sachant que $u_0 = 1$ et $q = 2$, déterminer le rang N pour lequel $S_N = 65\,535$.

Exercice 2

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Donner l'expression de u_n en fonction de n .
- Quelle est la somme des n premiers termes de u ?
- Déterminer la somme des n premiers termes de rang impair de u .

Exercice 3

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$u_0 = 2 \text{ et pour } n \geq 0 : u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1.$$

- La suite est-elle arithmétique ? géométrique ?
- Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = 4u_n - 6n + 15$ est géométrique (on précisera le premier terme et la raison).
- Déterminer alors v_n et u_n en fonction de n .
- Exprimer en fonction de n la somme : $\sum_{k=0}^n u_k$.

Exercice 4

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$u_0 = a \in \mathbb{N} \text{ et pour } n \geq 0 : u_{n+1} = \frac{3u_n}{2+5u_n}.$$

- Pour quelle valeur de u_0 la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est-elle pas définie ?
- Que se passe-t-il si $a = 0$?
- On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$ avec $v_0 = b \in \mathbb{N}$ et $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{5}{3}$.
 - En déduire b pour que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit stationnaire.
 - Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 5

Au cours d'une année, appelée année 0, un industriel sort un article qu'il vend au prix initial P_0 .

Le prix de vente de cet article suit au cours des années la loi suivante :

$P_n = 0,4P_{n-1} + 120$ dans laquelle P_n désigne le prix de l'article au cours de l'année n .

1. On pose $Q_n = P_n + k$ (k étant une constante réelle). Montrer qu'il existe une valeur de k pour laquelle (Q_n) est géométrique.
2. En déduire Q_n puis P_n en fonction de n et du prix initial.
3. Montrer qu'il existe une valeur de P_0 pour laquelle il y a stabilité du prix de vente de l'article.

Exercice 6

Une entreprise propose à ses ingénieurs deux types de contrats relatifs au paiement des primes.

Contrat de type 1 (les primes sont versées à la fin de chaque année) :

1^{ère} année : 2500 euros puis augmentation de 300 euros chaque année.

Contrat de type 2 (les primes sont versées à la fin de chaque semestre) :

1^{er} semestre : 1000 euros puis augmentation de 100 euros chaque semestre.

Déterminer u_n et v_n , les sommes perçues avec le contrat de type 1 et 2 à la fin de la $n^{\text{ème}}$ année.

Quel est le contrat le plus avantageux ? (discuter suivant le nombre d'années)

Exercice 7

On se propose de former au 1^{er} janvier 2019 un capital d'un montant de C € au moyen de trois annuités de montants A_0 , A_1 et A_2 versées respectivement au 1^{er} janvier 2016, 2017 et 2018.

1. Le taux d'intérêt annuel (constant) étant noté r , exprimer C en fonction de A_0 , A_1 , A_2 et r .
2. Le taux d'intérêt est de 10% ($r = 0,1$). Combien valent A_1 et A_2 sachant que $C = 39\,820$, $A_0 = 11\,000$ et $A_1 + A_2 = 21\,810$.

Exercice 8

Vous empruntez un capital C pendant deux ans, remboursable en deux annuités égales d'un montant A . La première année, le taux d'intérêt annuel est r . La deuxième année il change et prend la valeur r' .

Calculer A en fonction de C , r et r' .

Application numérique : $C = 4200$, $r = 5\%$, $r' = 10\%$.

Exercice 9

Un emprunt de 10 000 € au taux d'intérêt annuel de 10% est remboursé en n annuités A_1, A_2, \dots, A_n .

1. Sachant que $n = 3$, $A_1 = 0$ et $A_2 = A_3$, déterminer la valeur de l'annuité A_2 .
2. Sachant que $n = 10$ et que $A_k = A$ pour tout k (annuités constantes), déterminer la valeur de A .