

Recherche Opérationnelle

Épisode V

Programmation linéaire

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

March 19, 2023

université
de **BORDEAUX**

LABORATOIRE
BORDELAIS
DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE

LaBRI

1. Méthode graphique

Problème

Un artisan fabrique deux types de jouets en bois A et B , suivant les informations suivantes :

- Il consacre quotidiennement 24 kg de bois + 8 heures de travail.
- Il limite la production quotidienne de jouets A à 7 unités.
- Jouet A : nécessite $1/2$ heure + 3 kg de bois → vendu 12€.
- Jouet B : nécessite 1 heure + 2 kg de bois → vendu 18€.

Problème

Un artisan fabrique deux types de jouets en bois A et B , suivant les informations suivantes :

- Il consacre quotidiennement 24 kg de bois + 8 heures de travail.
- Il limite la production quotidienne de jouets A à 7 unités.
- Jouet A : nécessite $1/2$ heure + 3 kg de bois → vendu 12€.
- Jouet B : nécessite 1 heure + 2 kg de bois → vendu 18€.

Question

En supposant que l'artisan vende tous les jouets produits, combien de jouets A et B doit-il fabriquer et vendre quotidiennement **pour que son bénéfice soit maximal ?**

Modélisation du problème

Soit x_A le nombre de jouets A produits et vendus, et x_B pour les jouets B .

Modélisation du problème

Soit x_A le nombre de jouets A produits et vendus, et x_B pour les jouets B .

Fonction objectif/bénéfice :

$$B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B.$$

Modélisation du problème

Soit x_A le nombre de jouets A produits et vendus, et x_B pour les jouets B .

Fonction objectif/bénéfice :

$$B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B.$$

Contraintes :

Énoncé	Contrainte
Un jouet A nécessite 1/2 heure de travail Un jouet B nécessite 1 heure de travail L'artisan travaille au plus 8 heures par jour	$0,5x_A$ x_B $0,5x_A + x_B \leq 8$
Un jouet A nécessite 3 kg de bois Un jouet B nécessite 2 kg de bois L'artisan ne dispose que de 24 kg de bois par jour	$3x_A$ $2x_B$ $3x_A + 2x_B \leq 24$
Limitation de la production de jouets A à 7 unités	$x_A \leq 7$
Les productions de jouets A et B sont positives	$x_A \geq 0$ et $x_B \geq 0$

Programme linéaire

Le problème se formule donc comme suit (**programme linéaire**) :

$$\text{maximiser : } B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B,$$

$$\text{sachant que : } 0,5x_A + x_B \leq 8,$$

$$3x_A + 2x_B \leq 24,$$

$$x_A \leq 7,$$

$$(x_A, x_B \geq 0.)$$

Programme linéaire

Le problème se formule donc comme suit (**programme linéaire**) :

$$\text{maximiser : } B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B,$$

$$\text{sachant que : } 0,5x_A + x_B \leq 8,$$

$$3x_A + 2x_B \leq 24,$$

$$x_A \leq 7,$$

$$(x_A, x_B \geq 0.)$$

La solution est donc un couple (x_A, x_B) , avec x_A, x_B positifs, vérifiant :

- $0,5x_A + x_B \leq 8,$
- $3x_A + 2x_B \leq 24,$
- $x_A \leq 7.$

Programme linéaire

Le problème se formule donc comme suit (**programme linéaire**) :

$$\text{maximiser : } B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B,$$

$$\text{sachant que : } 0,5x_A + x_B \leq 8,$$

$$3x_A + 2x_B \leq 24,$$

$$x_A \leq 7,$$

$$(x_A, x_B \geq 0.)$$

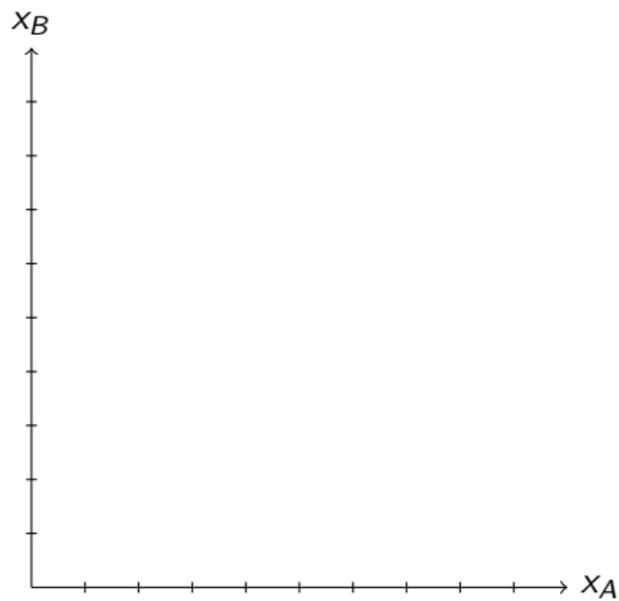
La solution est donc un couple (x_A, x_B) , avec x_A, x_B positifs, vérifiant :

- $0,5x_A + x_B \leq 8,$
- $3x_A + 2x_B \leq 24,$
- $x_A \leq 7.$

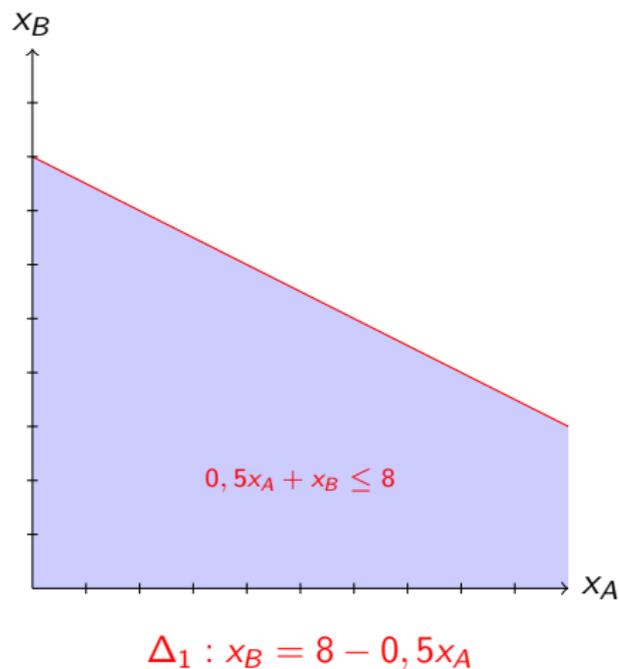
⇒ **Résolution graphique** : étudier l'intersection des trois droites représentant les trois fonctions :

- $\Delta_1 : x_B = 8 - 0,5x_A,$
- $\Delta_2 : x_B = \frac{24-3x_A}{2},$
- $\Delta_3 : x_A = 7.$

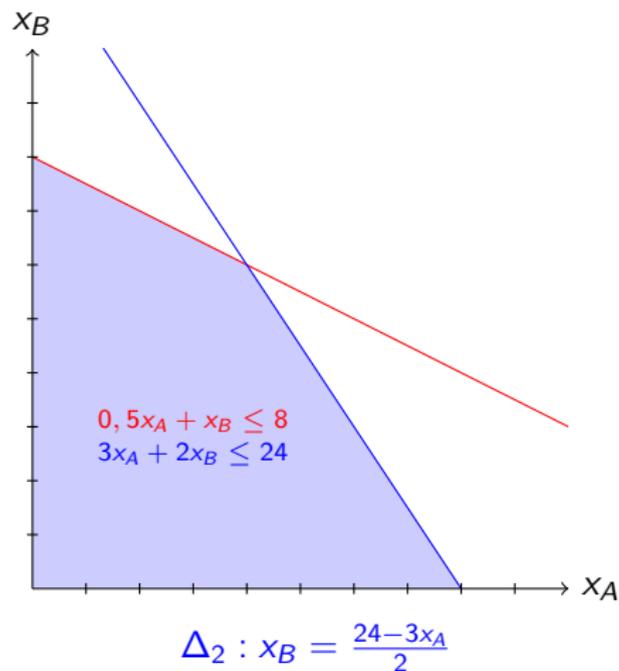
Intersection de $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$



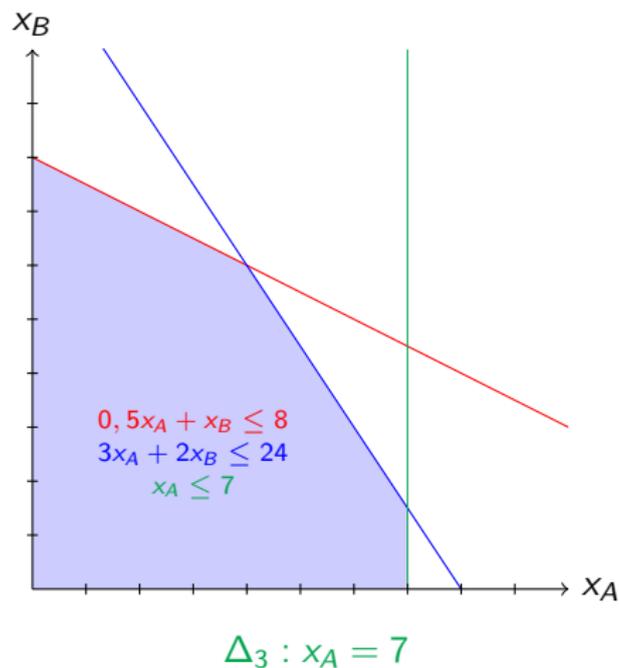
Intersection de $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$



Intersection de $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

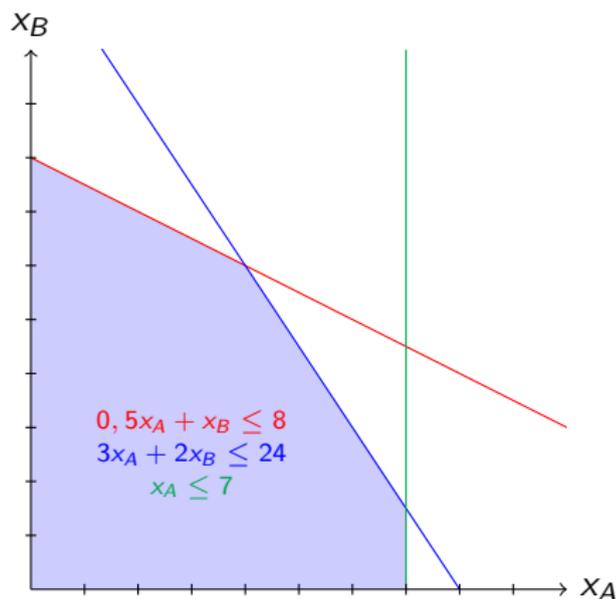


Intersection de $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$



Fonction bénéfice

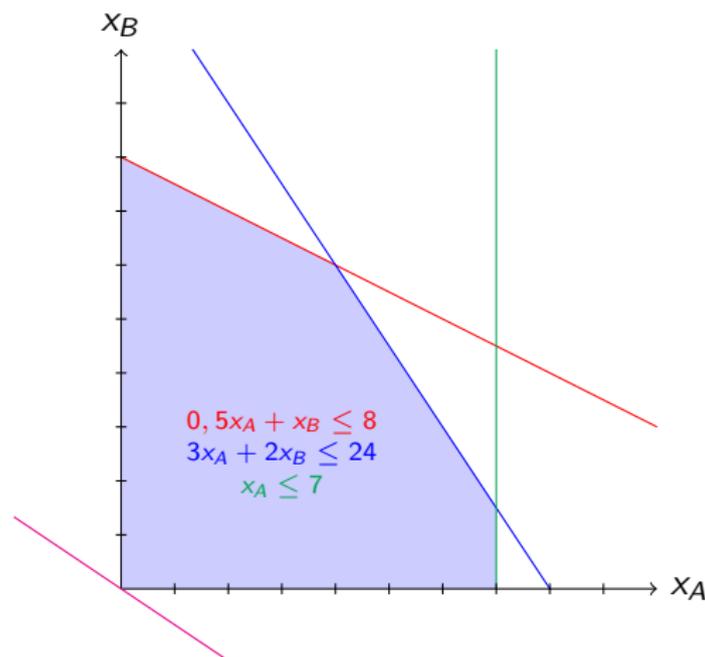
Veut : (x_A, x_B) dans la zone bleue maximisant $B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B$.



$$B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B \rightarrow x_B = \frac{B(x_A, x_B)}{18} - \frac{4}{9}x_A.$$

Fonction bénéfice

Veut : (x_A, x_B) dans la zone bleue maximisant $B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B$.

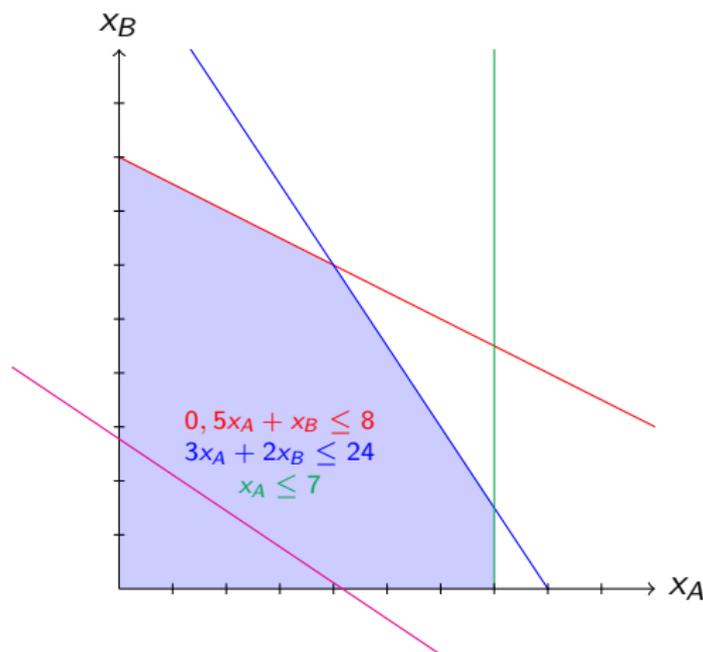


$$B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B \rightarrow x_B = \frac{B(x_A, x_B)}{18} - \frac{4}{9}x_A.$$

$$\text{Bénéfice } 0 : x_B = -\frac{4}{9}x_A.$$

Fonction bénéfice

Veut : (x_A, x_B) dans la zone bleue maximisant $B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B$.

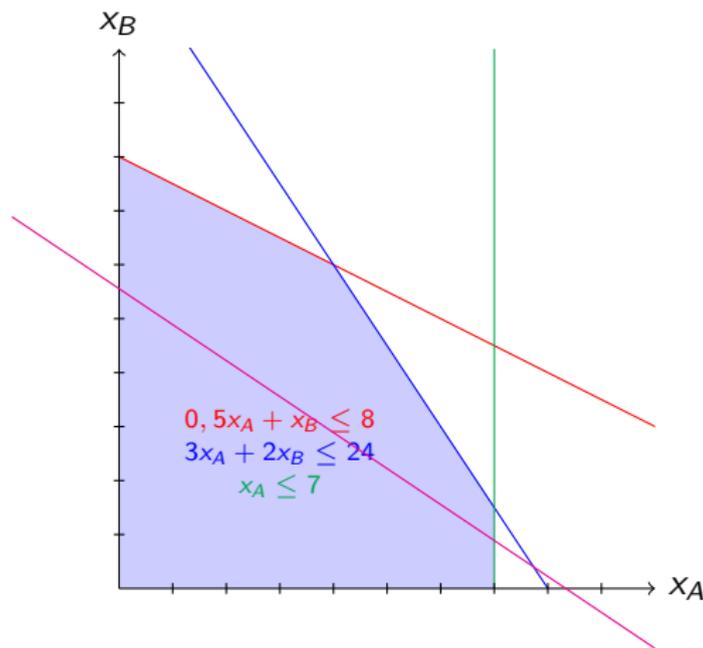


$$B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B \rightarrow x_B = \frac{B(x_A, x_B)}{18} - \frac{4}{9}x_A.$$

$$\text{Bénéfice } 50 : x_B = \frac{50}{18} - \frac{4}{9}x_A.$$

Fonction bénéfice

Veut : (x_A, x_B) dans la zone bleue maximisant $B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B$.

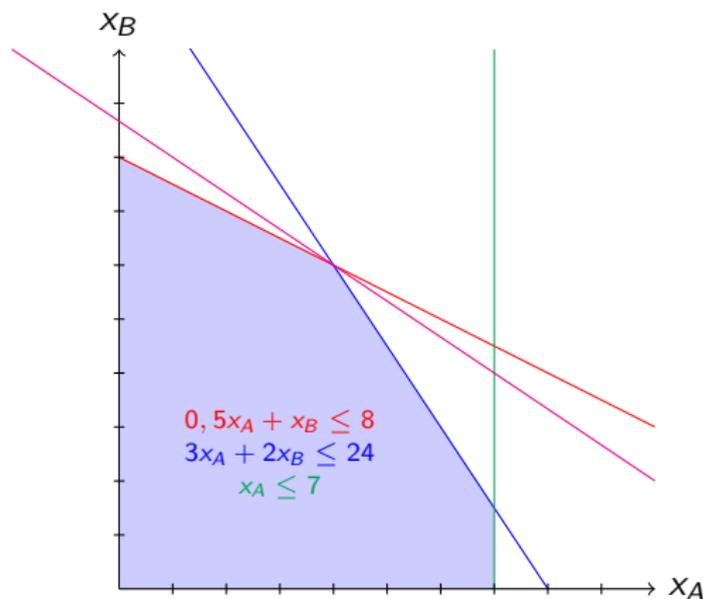


$$B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B \rightarrow x_B = \frac{B(x_A, x_B)}{18} - \frac{4}{9}x_A.$$

$$\text{Bénéfice } 100 : x_B = \frac{100}{18} - \frac{4}{9}x_A.$$

Fonction bénéfice

Veut : (x_A, x_B) dans la zone bleue maximisant $B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B$.



$$B(x_A, x_B) = 12x_A + 18x_B \rightarrow x_B = \frac{B(x_A, x_B)}{18} - \frac{4}{9}x_A.$$

$$\text{Bénéfice } 156 : x_B = \frac{156}{18} - \frac{4}{9}x_A.$$

Conclusion

- La valeur maximale de B est 156.

Conclusion

- La valeur maximale de B est 156.
- Cette valeur est atteinte à l'intersection de Δ_1 et Δ_2 :

Conclusion

- La valeur maximale de B est 156.
- Cette valeur est atteinte à l'intersection de Δ_1 et Δ_2 :

$$8 - 0,5x_A = \frac{24 - 3x_A}{2} \iff x_A = 4.$$

Donc $B(4, 6) = 156$ ($f_1(4) = 6 = f_2(4)$).

Conclusion

- La valeur maximale de B est 156.
- Cette valeur est atteinte à l'intersection de Δ_1 et Δ_2 :

$$8 - 0,5x_A = \frac{24 - 3x_A}{2} \iff x_A = 4.$$

Donc $B(4, 6) = 156$ ($f_1(4) = 6 = f_2(4)$).

- L'artisan a donc un bénéfice maximal pour 4 jouets A et 6 jouets B .

2. Méthode du simplexe

Aperçu par l'exemple

Soit le programme linéaire suivant :

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5, \quad (2)$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11, \quad (3)$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8, \quad (4)$$

$$(x_1, x_2, x_3 \geq 0.) \quad (5)$$

Aperçu par l'exemple

Soit le programme linéaire suivant :

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5, \quad (2)$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11, \quad (3)$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8, \quad (4)$$

$$(x_1, x_2, x_3 \geq 0.) \quad (5)$$

Question

Quelle valeur de (x_1, x_2, x_3) maximise B sous ces contraintes ?

Étape 1 : On introduit des variables d'écart pour avoir des égalités.

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5, \quad (2)$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11, \quad (3)$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 ; \quad (4)$$

devient :

Étape 1 : On introduit des variables d'écart pour avoir des égalités.

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5, \quad (2)$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11, \quad (3)$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 ; \quad (4)$$

devient :

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } e_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \quad (3)$$

$$e_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3, \quad (4)$$

$$(x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3 \geq 0.) \quad (5)$$

“Augmentation” d’une variable

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{5x_1} + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } e_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \quad (3)$$

$$e_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3. \quad (4)$$

Le bénéfice augmente lorsque x_1 augmente.

“Augmentation” d’une variable

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } e_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \quad (3)$$

$$e_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3. \quad (4)$$

Le bénéfice augmente lorsque x_1 augmente.

Étape 2: Simuler une augmentation maximale de x_1 .

De combien ?

“Augmentation” d’une variable

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } e_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \quad (3)$$

$$e_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3. \quad (4)$$

Le bénéfice augmente lorsque x_1 augmente.

Étape 2: Simuler une augmentation maximale de x_1 .

De combien ?

- Par (2), max à $5/2$ ($= 2,5$) ;

“Augmentation” d’une variable

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } e_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \quad (3)$$

$$e_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3. \quad (4)$$

Le bénéfice augmente lorsque x_1 augmente.

Étape 2: Simuler une augmentation maximale de x_1 .

De combien ?

- Par (2), max à $5/2$ ($= 2,5$) ;
- Par (3), max à $11/4$ ($= 2,75$) ;

“Augmentation” d’une variable

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } e_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \quad (3)$$

$$e_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3. \quad (4)$$

Le bénéfice augmente lorsque x_1 augmente.

Étape 2: Simuler une augmentation maximale de x_1 .

De combien ?

- Par (2), max à $5/2$ ($= 2,5$) ;
- Par (3), max à $11/4$ ($= 2,75$) ;
- Par (4), max à $8/3$ ($\sim 2,7$).

“Augmentation” d’une variable

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } e_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \quad (3)$$

$$e_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3. \quad (4)$$

Le bénéfice augmente lorsque x_1 augmente.

Étape 2: Simuler une augmentation maximale de x_1 .

De combien ?

- Par (2), max à $5/2$ ($= 2,5$) ;
- Par (3), max à $11/4$ ($= 2,75$) ;
- Par (4), max à $8/3$ ($\sim 2,7$).

⇒ Augmentation max de $5/2$, à cause de (2).

Simuler l'augmentation maximale de x_1

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } e_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \quad (3)$$

$$e_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3. \quad (4)$$

⇒ “Sortir” x_1 de l'expression de B .

$$e_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \quad (2)$$

devient :

Simuler l'augmentation maximale de x_1

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } e_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \quad (3)$$

$$e_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3. \quad (4)$$

⇒ “Sortir” x_1 de l'expression de B .

$$e_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \quad (2)$$

devient :

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_1. \quad (2)$$

Simuler l'augmentation maximale de x_1

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } e_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \quad (3)$$

$$e_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3. \quad (4)$$

On remplace x_1 partout, par son expression qu'on vient de déduire :

Simuler l'augmentation maximale de x_1

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } e_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \quad (3)$$

$$e_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3. \quad (4)$$

On remplace x_1 partout, par son expression qu'on vient de déduire :

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}e_1, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_1, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$e_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}e_1. \quad (4)$$

Étape 3: On recommence...

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}e_1, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_1, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$e_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}e_1. \quad (4)$$

Le bénéfice augmente lorsque x_3 augmente. Augmentation max ?

Étape 3: On recommence...

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}e_1, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_1, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$e_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}e_1. \quad (4)$$

Le bénéfice augmente lorsque x_3 augmente. Augmentation max ?

- Par (2), max à 5 ;

Étape 3: On recommence...

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}e_1, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_1, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$e_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}e_1. \quad (4)$$

Le bénéfice augmente lorsque x_3 augmente. Augmentation max ?

- Par (2), max à 5 ;
- Par (3), pas de limite ;

Étape 3: On recommence...

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}e_1, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_1, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$e_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}e_1. \quad (4)$$

Le bénéfice augmente lorsque x_3 augmente. Augmentation max ?

- Par (2), max à 5 ;
- Par (3), pas de limite ;
- Par (4), max à 1.

Étape 3: On recommence...

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}e_1, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_1, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$e_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}e_1. \quad (4)$$

Le bénéfice augmente lorsque x_3 augmente. Augmentation max ?

- Par (2), max à 5 ;
- Par (3), pas de limite ;
- Par (4), max à 1.

⇒ Augmentation max de 1, à cause de (4).

Simuler l'augmentation maximale de x_3

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}e_1, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_1, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$e_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}e_1. \quad (4)$$

⇒ “Sortir” x_3 de l'expression de B .

$$e_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}e_1 \quad (2)$$

devient :

Simuler l'augmentation maximale de x_3

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}e_1, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_1, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$e_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}e_1. \quad (4)$$

⇒ “Sortir” x_3 de l'expression de B .

$$e_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}e_1 \quad (2)$$

devient :

$$x_3 = 1 + x_2 + 3e_1 - 2e_3. \quad (2)$$

Simuler l'augmentation maximale de x_3

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}e_1, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_1, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$e_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}e_1. \quad (4)$$

On remplace x_3 partout, par son expression qu'on vient de déduire :

Simuler l'augmentation maximale de x_3

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}e_1, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_1, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$e_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}e_1. \quad (4)$$

On remplace x_3 partout, par son expression qu'on vient de déduire :

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 13 - 3x_2 - e_1 - e_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = 2 - 2x_2 - 2e_1 + e_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$x_3 = 1 + x_2 + 3e_1 - 2e_3. \quad (4)$$

Étape 4 : On déduit le bénéfice maximal.

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 13 - 3x_2 - e_1 - e_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = 2 - 2x_2 - 2e_1 + e_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$x_3 = 1 + x_2 + 3e_1 - 2e_3. \quad (4)$$

On voit que B dépend de variables ne le faisant plus augmenter \rightarrow fini !

Étape 4 : On déduit le bénéfice maximal.

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 13 - 3x_2 - e_1 - e_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = 2 - 2x_2 - 2e_1 + e_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$x_3 = 1 + x_2 + 3e_1 - 2e_3. \quad (4)$$

On voit que B dépend de variables ne le faisant plus augmenter \rightarrow fini !

\Rightarrow Bénéfice max de **13**, et pour ça on a besoin de $x_2 = e_1 = e_3 = 0$.

Étape 4 : On déduit le bénéfice maximal.

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 13 - 3x_2 - e_1 - e_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = 2 - 2x_2 - 2e_1 + e_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$x_3 = 1 + x_2 + 3e_1 - 2e_3. \quad (4)$$

On voit que B dépend de variables ne le faisant plus augmenter \rightarrow fini !

\Rightarrow Bénéfice max de **13**, et pour ça on a besoin de $x_2 = e_1 = e_3 = 0$.

\Rightarrow D'après :

- (2), on a $x_1 = 2$ pour ces valeurs de x_2, e_1, e_3 ;

Étape 4 : On déduit le bénéfice maximal.

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 13 - 3x_2 - e_1 - e_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = 2 - 2x_2 - 2e_1 + e_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$x_3 = 1 + x_2 + 3e_1 - 2e_3. \quad (4)$$

On voit que B dépend de variables ne le faisant plus augmenter \rightarrow fini !

\Rightarrow Bénéfice max de **13**, et pour ça on a besoin de $x_2 = e_1 = e_3 = 0$.

\Rightarrow D'après :

- (2), on a $x_1 = 2$ pour ces valeurs de x_2, e_1, e_3 ;
- (3), on a $e_2 = 1$ pour ces valeurs de x_2, e_1, e_3 ;

Étape 4 : On déduit le bénéfice maximal.

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 13 - 3x_2 - e_1 - e_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = 2 - 2x_2 - 2e_1 + e_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$x_3 = 1 + x_2 + 3e_1 - 2e_3. \quad (4)$$

On voit que B dépend de variables ne le faisant plus augmenter \rightarrow fini !

\Rightarrow Bénéfice max de **13**, et pour ça on a besoin de $x_2 = e_1 = e_3 = 0$.

\Rightarrow D'après :

- (2), on a $x_1 = 2$ pour ces valeurs de x_2, e_1, e_3 ;
- (3), on a $e_2 = 1$ pour ces valeurs de x_2, e_1, e_3 ;
- (4), on a $x_3 = 1$ pour ces valeurs de x_2, e_1, e_3 .

Étape 4 : On déduit le bénéfice maximal.

$$\text{maximiser : } B(x_1, x_2, x_3) = 13 - 3x_2 - e_1 - e_3, \quad (1)$$

$$\text{sachant que : } x_1 = 2 - 2x_2 - 2e_1 + e_3, \quad (2)$$

$$e_2 = 1 + 5x_2 + 2e_1, \quad (3)$$

$$x_3 = 1 + x_2 + 3e_1 - 2e_3. \quad (4)$$

On voit que B dépend de variables ne le faisant plus augmenter \rightarrow fini !

\Rightarrow Bénéfice max de **13**, et pour ça on a besoin de $x_2 = e_1 = e_3 = 0$.

\Rightarrow D'après :

- (2), on a $x_1 = 2$ pour ces valeurs de x_2, e_1, e_3 ;
- (3), on a $e_2 = 1$ pour ces valeurs de x_2, e_1, e_3 ;
- (4), on a $x_3 = 1$ pour ces valeurs de x_2, e_1, e_3 .

Ainsi, bénéfice maximal de 13 pour $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$.

“Algorithme” :

- On introduit des variables d'écart pour exprimer le système via des égalités.
- Tant que l'une des variables x fait augmenter le bénéfice :
 - On détermine la contrainte (α) contraignant x le plus ;
 - On détermine, de (α), une nouvelle valeur de x ;
 - Qu'on remplace dans les autres équations.
- On lit directement le bénéfice, puis on détermine les valeurs des variables.

Problème

Un artisan fabrique deux types de jouets en bois A et B , suivant les informations suivantes :

- Il consacre quotidiennement 24 kg de bois + 8 heures de travail.
- Il limite la production quotidienne de jouets A à 7 unités.
- Jouet A : nécessite $1/2$ heure + 3 kg de bois \rightarrow vendu 12€.
- Jouet B : nécessite 1 heure + 2 kg de bois \rightarrow vendu 18€.

Problème

Un artisan fabrique deux types de jouets en bois A et B , suivant les informations suivantes :

- Il consacre quotidiennement 24 kg de bois + 8 heures de travail.
- Il limite la production quotidienne de jouets A à 7 unités.
- Jouet A : nécessite $1/2$ heure + 3 kg de bois \rightarrow vendu 12€.
- Jouet B : nécessite 1 heure + 2 kg de bois \rightarrow vendu 18€.

Question (à vous de jouer en utilisant la méthode du simplexe)

En supposant que l'artisan vende tous les jouets produits, combien de jouets A et B doit-il fabriquer et vendre quotidiennement **pour que son bénéfice soit maximal ?**