

Épisode III : Dérivation et étude de fonctions

 Avant de commencer les exercices veuillez lire les fiches [Fiche_derivation_integration](#), [Fiche_resolution_equations](#) et [Fiche_application_derivation](#).

EXERCICE 1

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer leurs fonctions dérivées.

1. $f(x) = 3x + 1$ sur \mathbb{R}

2. $f(x) = 5x^2 - 10x + 4$ sur \mathbb{R}

3. $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x + 2$ sur $]0; +\infty[$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ sur \mathbb{R}

5. $f(x) = 5x^3 + \frac{1}{x} - 4$ sur \mathbb{R}^*

6. $f(x) = \frac{2x+1}{3} - \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}^*

7. $f(x) = 3x^{2/3}$ sur \mathbb{R}^*

8. $f(x) = x^2 + x^{-3/2} + 4x^{1/2}$ sur $]0; +\infty[$

9. $f(x) = \frac{5x^3 - 2x - 1}{3}$ sur \mathbb{R}

10. $f(x) = (3x + 1)(5x - 7)$ sur \mathbb{R}

11. $f(x) = (3x + 7)\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$

12. $f(x) = (2x + 3)^{1/3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$

13. $f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 5}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$

14. $f(x) = \frac{4}{-5x^2 + 2x + 3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{5}; 1 \right\}$

INDICATION

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3.$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 10x - 10.$

3. $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 4.$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

5. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 15x^2 - \frac{1}{x^2}.$

6. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{x^2}.$

7. $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x^{-1/3}.$

8. $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 2x - \frac{3}{2}x^{-5/2} + 2x^{-1/2}.$

9. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{15x^2 - 2}{3}.$

10. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 30x - 16.$

11. $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{3x + 7}{2\sqrt{x}}.$

12. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}, f'(x) = \frac{2}{3}(2x + 3)^{-2/3}.$

13. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2} \right\}, f'(x) = \frac{17}{(2x + 5)^2}.$

14. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{5}; 1 \right\}, f'(x) = \frac{4(10x - 2)}{(-5x^2 + 2x + 3)^2}.$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^3 + 5x + 1$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer la dérivée de f .
3. Donner, dans un tableau, le signe de $f'(x)$ en fonction de x .
4. Donner, dans le même tableau, les variations de f .

EXERCICE 3

Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction g définie par : $g(x) = \frac{2x + 1}{3x - 1}$.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 1$$

1. Calculer la dérivée de f .
2. Donner, dans un tableau, le signe de $f'(x)$ en fonction de x .
3. Donner, dans le même tableau, les variations de f .

EXERCICE 5

Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction g définie par : $g(x) = -x^2 + 5x + 2$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
2. Calculer et simplifier la dérivée de f .
3. Donner, dans un tableau, le signe de $f'(x)$ en fonction de x .
4. Donner, dans le même tableau, les variations de f .

EXERCICE 7

Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{3}{x^2 + 4x} - 1$$

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 5$$

1. Calculer la dérivée de f .
2. Donner, dans un tableau, le signe de $f'(x)$ en fonction de x .
3. Donner, dans le même tableau, les variations de f .
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.
5. Tracer T . Donner l'allure de \mathcal{C}_f .

EXERCICE 9

Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction g définie par :

$$g(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$$

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 5$$

1. Calculer la dérivée de f puis factoriser f' .
2. Donner, dans un tableau, le signe de $f'(x)$ en fonction de x .
3. Donner, dans le même tableau, les variations de f .

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 12x + 3$$

On appelle \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 3x^2 + 7x - 6$. Étudier le signe de g .
2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 2g(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer une équation de la tangente T à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
5. On pose $h(x) = f(x) - (8x - 8)$.
 - (a) Étudier les variations de h .
 - (b) En déduire le signe de $h(x)$ en fonction de x .
 - (c) Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et T .

EXERCICE 12

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 1$$

1. Calculer la dérivée de g puis factoriser g' .
2. Donner, dans un tableau, le signe de $g'(x)$ en fonction de x .
3. Donner, dans le même tableau, les variations de g .

EXERCICE 13

Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{x^2 + 7}{x - 3}$$

On appelle \mathcal{C}_h sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer l'ensemble de définition de h .
2. Calculer la dérivée de h .
3. Donner, dans un tableau, le signe de $h'(x)$ en fonction de x .
4. Donner, dans le même tableau, les variations de h .
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à \mathcal{C}_h au point d'abscisse 0.
6. Tracer T . Donner l'allure de \mathcal{C}_h .

EXERCICE 14

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

On appelle \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Étudier les variations de f .
2. Déterminer une équation de la tangente T à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
3. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et T .

EXERCICE 15

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2x - 2}$$

On appelle \mathcal{C}_f sa représentation graphique dans un repère.

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Étudier les variations de f sur \mathcal{D}_f .
4. Déterminer l'équation de la tangente T à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
5. Tracer l'allure de \mathcal{C}_f en cohérence avec les questions précédentes.

EXERCICE 16

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = (x^2 - 5x)\sqrt{x}$$

1. Justifier que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis démontrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{5}{2}\sqrt{x}(x - 3)$$

2. En utilisant le taux d'accroissement, démontrer que g est dérivable en 0.
3. Dresser le tableau de variations de g sur $]0; +\infty[$.

EXERCICE 17

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels **fixés**.

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ en fonction de x .
2. On sait que $f'(0) = 3$, $f'(1) = -1$ et $f(1) = 6$. Déterminer a, b et c et en déduire $f(x)$ en fonction de x .



Pour continuer à s'entraîner... [site Euler de l'académie de Versailles](#).
Vous pouvez également utiliser Wims sur votre ENT.