Épisode III : Dérivation et étude de fonctions

Avant de commencer les exercices veuillez lire les fiches Fiche_derivation_integration, Fiche_resolution_equations et Fiche_application_derivation.

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer leurs fonctions dérivées.

1. $f(x) = 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = 5x^2 - 10x + 4$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x + 2$ sur $]0\,;\,+\infty[$
4. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$
5. $f(x) = 5x^3 + \dfrac{1}{x} - 4$ sur $\mathbb{R}^*$
6. $f(x) = \dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$
7. $f(x) = 3x^{2/3}$ sur $\mathbb{R}^*$
8. $f(x) = x^2 + x^{-3/2} + 4x^{1/2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$
9. $f(x) = \dfrac{5x^3 - 2x - 1}{3}$ sur $\mathbb{R}$
10. $f(x) = (3x+1)(5x-7)$ sur $\mathbb{R}$
11. $f(x) = (3x+7)\sqrt{x}$ sur $]0\,;\,+\infty]$
12. $f(x) = (2x+3)^{1/3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$
13. $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+5}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$
14. $f(x) = \dfrac{4}{-5x^2+2x+3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{5}\,;\,1\right\}$

Indication

1. $\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 3.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 10x - 10.$
3. $\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,,\quad f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - 4.$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$
5. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f'(x) = 15x^2 - \dfrac{1}{x^2}.$
6. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f'(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{x^2}.$
7. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad f'(x) = 2x^{-1/3}.$
8. $\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,,\quad f'(x) = 2x - \dfrac{3}{2}x^{-5/2} + 2x^{-1/2}.$
9. $\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \dfrac{15x^2 - 2}{3}.$
10. $\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 30x - 16.$
11. $\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,,\quad f'(x) = 3\sqrt{x} + \dfrac{3x+7}{2\sqrt{x}}.$
12. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\},\quad f'(x) = \dfrac{2}{3}(2x+3)^{-2/3}.$
13. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{5}{2}\right\},\quad f'(x) = \dfrac{17}{(2x+5)^2}.$
14. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{5}\,;\,1\right\},\quad f'(x) = \dfrac{4(10x-2)}{(-5x^2+2x+3)^2}.$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^3 + 5x + 1$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer la dérivée de f.
3. Donner, dans un tableau, le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
4. Donner, dans le même tableau, les variations de f.

Exercice 3

Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 1$$

1. Calculer la dérivée de f.
2. Donner, dans un tableau, le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
3. Donner, dans le même tableau, les variations de f.

Exercice 5

Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction g définie par : $g(x) = -x^2 + 5x + 2$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer et simplifier la dérivée de f.
3. Donner, dans un tableau, le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
4. Donner, dans le même tableau, les variations de f.

Exercice 7

Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{3}{x^2 + 4x} - 1$$

Exercice 8

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 5$$

1. Calculer la dérivée de f.
2. Donner, dans un tableau, le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
3. Donner, dans le même tableau, les variations de f.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
5. Tracer T. Donner l'allure de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 9

Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction g définie par :

$$g(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2$$

Exercice 10

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 5$$

1. Calculer la dérivée de f puis factoriser f'.
2. Donner, dans un tableau, le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
3. Donner, dans le même tableau, les variations de f.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 12x + 3$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2 + 7x - 6$.
   Étudier le signe de g.
2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 2g(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
5. On pose $h(x) = f(x) - (8x - 8)$.
   (a) Étudier les variations de h.
   (b) En déduire le signe de $h(x)$ en fonction de x.
   (c) Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et T.

Exercice 12

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 1$$

1. Calculer la dérivée de g puis factoriser g'.
2. Donner, dans un tableau, le signe de $g'(x)$ en fonction de x.
3. Donner, dans le même tableau, les variations de g.

Exercice 13

Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{x^2 + 7}{x - 3}$$

On appelle $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer l'ensemble de définition de h.
2. Calculer la dérivée de h.
3. Donner, dans un tableau, le signe de $h'(x)$ en fonction de x.
4. Donner, dans le même tableau, les variations de h.
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 0.
6. Tracer T. Donner l'allure de $\mathscr{C}_h$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
3. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et T.

Exercice 15

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2x - 2}$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Étudier les variations de f sur $\mathscr{D}_f$.
4. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
5. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ en cohérence avec les questions précédentes.

Exercice 16

Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = (x^2 - 5x)\sqrt{x}$$

1. Justifier que g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ puis démontrer que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{5}{2}\sqrt{x}(x-3)$$

2. En utilisant le taux d'accroissement, démontrer que g est dérivable en 0.
3. Dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 17

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels **fixés**.

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ en fonction de x.
2. On sait que $f'(0) = 3$, $f'(1) = -1$ et $f(1) = 6$. Déterminer a, b et c et en déduire $f(x)$ en fonction de x.