

Épisode II : Résolution d'équations et d'inéquations

 Avant de commencer les exercices veuillez lire les fiches [Fiche_calcul_algebrique](#) et [Fiche_resolution_equations](#).

EXERCICE 1

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $5x - 2 = 4 - 2x$
2. $4(x - 6) = 3(2x + 3)$
3. $\frac{x}{6} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}x - 1$
4. $\frac{3x+1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{3}x - 1$

INDICATION

 1. $x = \frac{6}{7}$ 2. $x = -\frac{33}{2}$ 3. $x = 3$ 4. $x = \frac{27}{2}$

EXERCICE 2

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $(1 + 4x)^2 - (5x + 2)(1 + 4x) = 0$
2. $(3x + 1)^2 = (x + 5)^2$
3. $9 - 4x^2 - (5 - x)(3 - 2x) = 0$

INDICATION

-  1. $(1 + 4x)^2 - (5x + 2)(1 + 4x) = 0 \iff (1 + 4x)(-1 - x) = 0 \iff x = -\frac{1}{4}$ ou $x = -1$
2. $(3x + 1)^2 = (x + 5)^2 \iff (2x - 4)(4x + 6) = 0 \iff x = 2$ ou $x = -\frac{3}{2}$
3. $9 - 4x^2 - (5 - x)(3 - 2x) = 0 \iff (3 - 2x)(3 + 2x - 5 + x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{2}{3}$

EXERCICE 3

Soit l'expression $A(x) = (3 + 5x)^2 - (4x - 7)(3 + 5x)$.

1. Développer, réduire et ordonner $A(x)$.
2. Factoriser $A(x)$.
3. Choisir la forme la mieux adaptée pour résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :
 - (a) $A(x) = 0$
 - (b) $A(x) = 3x + 30$
4. Calculer $A(0)$ et $A(\sqrt{3})$.

INDICATION

1. $A(x) = 5x^2 + 53x + 30$.
2. $A(x) = (5x + 3)(x + 10)$.
3. (a) $A(x) = 0 \iff (5x + 3)(x + 10) = 0 \iff x = -\frac{3}{5}$ ou $x = -10$.
 (b) $A(x) = 3x + 30 \iff 5x^2 + 53x + 30 = 3x + 30 \iff 5x^2 + 50x = 0 \iff 5x(x + 10) = 0$
 $A(x) = 3x + 30 \iff x = 0$ ou $x = -10$.
4. $A(0) = 30$ et $A(\sqrt{3}) = 45 + 53\sqrt{3}$.

EXERCICE 4

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $3x + 1 > 0$.
2. $3x - (5x + 7) \geq 2x - 3$.
3. $\frac{2x - 5}{3} < \frac{2x - 3}{7}$.

INDICATION

On résout successivement les inéquations d'une manière « classique » en faisant attention au changement de signes lorsque l'on multiplie ou divise par un nombre négatif!

1. $3x + 1 > 0$
 $\iff x > -\frac{1}{3}$
 donc : $\boxed{\mathcal{S} = \left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[}$
2. $3x - (5x + 7) \geq 2x - 3$
 $\iff 3x - 5x - 2x \geq -3 + 7$
 $\iff -4x \geq \frac{4}{4}$
 $\iff x \leq -\frac{1}{4}$
 Donc : $\boxed{\mathcal{S} = \left] -\infty; -1 \right]}$
3. $\frac{2x - 5}{3} < \frac{2x - 3}{7}$
 $\iff \frac{7(2x - 5)}{7 \times 3} < \frac{3(2x - 3)}{3 \times 7}$
 $\iff \frac{14x - 35}{21} < \frac{6x - 9}{21}$
 $\iff 14x - 35 < 6x - 9$
 $\iff 14x - 6x < -9 + 35$
 $\iff 8x < \frac{26}{13}$
 $\iff x < \frac{13}{4}$
 Donc : $\boxed{\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{13}{4} \right[}$

EXERCICE 5

Déterminer les signes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x + 6)^2 - 25$
2. $g(x) = (5x - 3)^2 - (x - 4)^2$
3. $h(x) = x^2 - 7x$
4. $k(x) = (-3x + 8)(7x - 4) - (-3x + 8)(5 - 2x)$

INDICATION

Déterminer les signes des fonctions suivantes.

1. $f(x) = (x + 6)^2 - 25$

On factorise : $f(x) = (x + 6)^2 - 5^2 = [(x + 6) + 5][(x + 6) - 5]$ donc $\boxed{f(x) = (x + 11)(x + 1)}$.

$f(x) = 0$ pour $x = -11$ ou $x = -1$ car un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

Tableau de signes :

x	$-\infty$	-11	-1	$+\infty$
Signe de $x + 11$	-	0	+	+
Signe de $x + 1$	-	-	0	+
Signe de $f(x)$	+	0	-	0

2. $g(x) = (5x - 3)^2 - (x - 4)^2$

On factorise en reconnaissant une identité remarquable, du type $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

$$g(x) = (5x - 3)^2 - (x - 4)^2 = [(5x - 3) + (x - 4)][(5x - 3) - (x - 4)] = (5x - 3 + x - 4)(5x - 3 - x + 4) = (6x - 7)(4x + 1)$$

$$g(x) \text{ s'annule pour } x = \frac{7}{6} \text{ ou pour } x = -\frac{1}{4}$$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{6}$	$+\infty$
Signe de $6x - 7$	-	-	0	+
Signe de $4x + 1$	-	0	+	+
Signe de $g(x)$	+	0	-	0

3. $h(x) = x^2 - 7x = x(x - 7)$.

$h(x)$ s'annule pour $x = 0$ ou $x = 7$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$	0	7	$+\infty$
Signe de x	-	0	0	+
Signe de $x - 7$	-	-	-	+
Signe de $h(x)$	+	0	-	0

4. $k(x) = (-3x + 8)(7x - 4) - (-3x + 8)(5 - 2x)$.

On factorise avec comme facteur commun $-3x + 8$.

$$k(x) = (-3x + 8)[(7x - 4) - (5 - 2x)] = (-3x + 8)(7x - 4 - 5 + 2x) = (-3x + 8)(9x - 9) = 9(-3x + 8)(x - 1).$$

$$k(x) \text{ s'annule en } 1 \text{ ou en } \frac{8}{3} \text{ et } k(x) \text{ est du signe de } (-3x + 8)(x - 1).$$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	1	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
Signe de $-3x + 8$	+	+	0	-
Signe de $x - 1$	-	0	+	+
Signe de $k(x)$	-	0	+	0

EXERCICE 6

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2 > 16$

2. $16x^2 + 8x + 1 > 0$

3. $64x^2 - 121 > 0$

4. $49 - (3 + x)^2 \leqslant 0$

INDICATION

1. $x^2 > 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4^2 > 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-4) > 0$

$(x+4)(x-4)$ s'annule pour $x = -4$ ou $x = 4$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
<i>Signe de $x+4$</i>	-	0	+	+
<i>Signe de $x-4$</i>	-	-	0	+
<i>Signe de $(x+4)(x-4)$</i>	+	0	-	0

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} =]-\infty ; -4[\cup]4 ; +\infty[$

2. $16x^2 + 8x + 1 > 0 \Leftrightarrow (4x)^2 + 2 \times 4x \times 1 + 1^2 > 0 \Leftrightarrow (4x+1)^2 > 0$ (on a reconnu une identité remarquable).

$(4x+1)^2 = 0$ pour $x = -\frac{1}{4}$ et $(4x+1)^2 > 0$ pour toutes les autres valeurs de x car le carré d'un nombre réel est positif ou nul.

L'ensemble de solutions est donc $\mathcal{S} =]-\infty ; -\frac{1}{4}[\cup]-\frac{1}{4} ; +\infty[$

3. $64x^2 - 121 > 0 \Leftrightarrow (8x)^2 - 11^2 > 0 \Leftrightarrow (8x+11)(8x-11) > 0$.

$(8x+11)(8x-11)$ s'annule pour $x = -\frac{11}{8}$ ou $x = \frac{11}{8}$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{11}{8}$	$\frac{11}{8}$	$+\infty$
<i>Signe de $8x+11$</i>	-	0	+	+
<i>Signe de $8x-11$</i>	-	-	0	+
<i>Signe de $(8x+11)(8x-11)$</i>	+	0	-	0

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} =]-\infty ; -\frac{11}{8}[\cup]\frac{11}{8} ; +\infty[$

4. $49 - (3+x)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow 7^2 - (3+x)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow [7 + (3+x)][7 - (3+x)] \leqslant 0 \Leftrightarrow (10+x)(4-x) \leqslant 0$.

$(10+x)(4-x)$ s'annule pour $x = -10$ ou $x = 4$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	-10	4	$+\infty$
<i>Signe de $10+x$</i>	-	0	+	+
<i>Signe de $4-x$</i>	+	+	0	-
<i>Signe de $(10+x)(4-x)$</i>	-	0	+	0

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} =]-\infty ; -10] \cup [4 ; +\infty[$

EXERCICE 7

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{3x-1}{7x-9} - \frac{3-x}{7x-9} \leqslant 0$

2. $\frac{5+x}{(x-6)(7x+8)} \leqslant 0$

💡 INDICATION

1. Soit l'inéquation $\frac{3x-1}{7x-9} - \frac{3-x}{7x-9} \leqslant 0$

(a) L'ensemble de définition est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{9}{7} \right\}$ car le dénominateur s'annule pour $x = \frac{9}{7}$.

(b) On suppose que $x \in \mathcal{D}$.

L'inéquation s'écrit alors : $\frac{(3x-1)-(3-x)}{7x-9} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1-3+x}{7x-9} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{4x-4}{7x-9} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{7x-9} \leqslant 0$

(c) $4(x-1)$ s'annule pour $x = 1$ et est du signe de $x-1$

(d) Tableau de signes :

x	$-\infty$	1	$\frac{9}{7}$	$+\infty$
$4(x-1)$	-	0+	+	
$7x-9$	-	-	+	
$\frac{4(x-1)}{7x-9}$	+	0-	+	

(e) On en déduit que l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left[1 ; \frac{9}{7} \right]$.

2. Soit l'inéquation $\frac{5+x}{(x-6)(7x+8)} \leqslant 0$

(a) L'ensemble de définition est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{8}{7}, 6 \right\}$ car $-\frac{8}{7}$ et 6 sont les deux valeurs qui annulent le dénominateur, donc les valeurs interdites.

(b) $5+x=0 \Leftrightarrow x=-5$

(c) On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	-5	$-\frac{8}{7}$	6	$+\infty$
$5+x$	-	0+	+	+	+
$x-6$	-	-	-	-	+
$7x+8$	-	-	-	+	+
$\frac{5+x}{(x-6)(7x+8)}$	-	0+	-	-	+

(d) L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty ; -5] \cup \left[-\frac{8}{7} ; 6 \right[$

EXERCICE 8

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $x^2 - 4x - 5 = 0$

8. $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 0$

2. $x^2 + 16x + 23 = 0$

9. $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{7}{6} = 0$

3. $x^2 - 11x + 28 = 0$

10. $x^2 - 5x = 0$

4. $x^2 + x - 1 = 0$

11. $x^2 - 9 = 0$

5. $-5x^2 + 2\sqrt{5}x - 1 = 0$

12. $x^2 + 1 = 0$

6. $-4x^2 - x - 6 = 0$

7. $-6x^2 + 23x + 4 = 0$

INDICATION

1. $\mathcal{S} = \{-5; 1\}$ 7. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{6}; 4\right\}$
2. $\mathcal{S} = \left\{-8 - \sqrt{41}; -8 + \sqrt{41}\right\}$ 8. $\mathcal{S} = \emptyset$
3. $\mathcal{S} = \{4; 7\}$ 9. $\mathcal{S} = \left\{-7; -\frac{1}{3}\right\}$
4. $\mathcal{S} = \left\{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$ 10. $\mathcal{S} = \{0; 5\}$
5. $\mathcal{S} = \left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$ 11. $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$
6. $\mathcal{S} = \emptyset$ 12. $\mathcal{S} = \emptyset$

EXERCICE 9

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $-x^2 - 4x + 5 \geq 0$ 4. $(2x - 3)(-2x^2 + 5x + 3) > 0$
2. $x^2 + x - 3 \geq 0$ 5. $\frac{1 - 4x}{x^2 + x + 1} \leq 0$
3. $-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

INDICATION

1. $\mathcal{S} = [-1; 5]$ 4. $\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{3}{2}; 3 \right[$
2. $\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}; +\infty \right[$ 5. $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{4}; +\infty \right[$
3. $\mathcal{S} = \emptyset$



Pour continuer à s'entraîner... [site Euler de l'académie de Versailles](#).

Vous pouvez également utiliser Wims sur votre ENT.