

Épisode II : Résolution d'équations et d'inéquations

 Avant de commencer les exercices veuillez lire les fiches [Fiche_calcul_algebrique](#) et [Fiche_resolution_equations](#).



EXERCICE 1

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $5x - 2 = 4 - 2x$
2. $4(x - 6) = 3(2x + 3)$
3. $\frac{x}{6} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}x - 1$
4. $\frac{3x+1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{3}x - 1$



INDICATION

1. $x = \frac{6}{7}$
2. $x = -\frac{33}{2}$
3. $x = 3$
4. $x = \frac{27}{2}$



EXERCICE 2

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $(1 + 4x)^2 - (5x + 2)(1 + 4x) = 0$
2. $(3x + 1)^2 = (x + 5)^2$
3. $9 - 4x^2 - (5 - x)(3 - 2x) = 0$



INDICATION

1. $(1 + 4x)^2 - (5x + 2)(1 + 4x) = 0 \iff (1 + 4x)(-1 - x) = 0 \iff x = -\frac{1}{4} \text{ ou } x = -1$
2. $(3x + 1)^2 = (x + 5)^2 \iff (2x - 4)(4x + 6) = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$
3. $9 - 4x^2 - (5 - x)(3 - 2x) = 0 \iff (3 - 2x)(3 + 2x - 5 + x) = 0 \iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{2}{3}$



EXERCICE 3

Soit l'expression $A(x) = (3 + 5x)^2 - (4x - 7)(3 + 5x)$.

1. Développer, réduire et ordonner $A(x)$.
2. Factoriser $A(x)$.
3. Choisir la forme la mieux adaptée pour résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :
 - (a) $A(x) = 0$
 - (b) $A(x) = 3x + 30$
4. Calculer $A(0)$ et $A(\sqrt{3})$.



INDICATION

- $A(x) = 5x^2 + 53x + 30.$
- $A(x) = (5x + 3)(x + 10).$
- (a) $A(x) = 0 \iff (5x + 3)(x + 10) = 0 \iff x = -\frac{3}{5} \text{ ou } x = -10.$
 (b) $A(x) = 3x + 30 \iff 5x^2 + 53x + 30 = 3x + 30 \iff 5x^2 + 50x = 0 \iff 5x(x + 10) = 0$
 $A(x) = 3x + 30 \iff x = 0 \text{ ou } x = -10.$
- $A(0) = 30 \text{ et } A(\sqrt{3}) = 45 + 53\sqrt{3}.$



EXERCICE 4

Résoudre les inéquations suivantes :

- $3x + 1 > 0.$
- $3x - (5x + 7) \geq 2x - 3.$
- $\frac{2x - 5}{3} < \frac{2x - 3}{7}.$



INDICATION

On résout successivement les inéquations d'une manière « classique » en faisant attention au changement de signes lorsque l'on multiplie ou divise par un nombre négatif!

- $3x + 1 > 0$
 $\iff x > -\frac{1}{3}$
 donc : $\mathcal{S} =] -\frac{1}{3} ; +\infty [$
- $3x - (5x + 7) \geq 2x - 3$
 $\iff 3x - 5x - 7 \geq 2x - 3$
 $\iff -2x - 7 \geq 2x - 3$
 $\iff -4x \geq 4$
 $\iff x \leq -1$
 Donc : $\mathcal{S} =] -\infty ; -1]$

- $\frac{2x - 5}{3} < \frac{2x - 3}{7}$
 $\iff \frac{7(2x - 5)}{7 \times 3} < \frac{3(2x - 3)}{3 \times 7}$
 $\iff \frac{14x - 35}{21} < \frac{6x - 9}{21}$
 $\iff 14x - 35 < 6x - 9$
 $\iff 14x - 6x < -9 + 35$
 $\iff 8x < 26$
 $\iff x < \frac{13}{4}$
 Donc : $\mathcal{S} =] -\infty ; \frac{13}{4} [$



EXERCICE 5

Déterminer les signes des fonctions suivantes :

- $f(x) = (x + 6)^2 - 25$
- $g(x) = (5x - 3)^2 - (x - 4)^2$
- $h(x) = x^2 - 7x$
- $k(x) = (-3x + 8)(7x - 4) - (-3x + 8)(5 - 2x)$



INDICATION

Déterminer les signes des fonctions suivantes.

- $f(x) = (x + 6)^2 - 25$

On factorise : $f(x) = (x + 6)^2 - 5^2 = [(x + 6) + 5][(x + 6) - 5]$ donc $f(x) = (x + 11)(x + 1).$

$f(x) = 0$ pour $x = -11$ ou $x = -1$ car un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

Tableau de signes :

x	$-\infty$	-11	-1	$+\infty$	
Signe de $x + 11$	$-$	0	$+$	$+$	
Signe de $x + 1$	$-$	$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

2. $g(x) = (5x - 3)^2 - (x - 4)^2$

On factorise en reconnaissant une identité remarquable, du type $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

$$g(x) = (5x - 3)^2 - (x - 4)^2 = [(5x - 3) + (x - 4)][(5x - 3) - (x - 4)] = (5x - 3 + x - 4)(5x - 3 - x + 4) = (6x - 7)(4x + 1)$$

$g(x)$ s'annule pour $x = \frac{7}{6}$ ou pour $x = -\frac{1}{4}$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{6}$	$+\infty$
Signe de $6x - 7$	$-$	$-$	0	$+$
Signe de $4x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
Signe de $g(x)$	$+$	0	$-$	0

3. $h(x) = x^2 - 7x = x(x - 7)$.

$h(x)$ s'annule pour $x = 0$ ou $x = 7$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$	0	7	$+\infty$
Signe de x	$-$	0	$+$	$+$
Signe de $x - 7$	$-$	$-$	$+$	
Signe de $h(x)$	$+$	0	$-$	$+$

4. $k(x) = (-3x + 8)(7x - 4) - (-3x + 8)(5 - 2x)$.

On factorise avec comme facteur commun $-3x + 8$.

$$k(x) = (-3x + 8)[(7x - 4) - (5 - 2x)] = (-3x + 8)(7x - 4 - 5 + 2x) = (-3x + 8)(9x - 9) = 9(-3x + 8)(x - 1).$$

$k(x)$ s'annule en 1 ou en $\frac{8}{3}$ et $k(x)$ est du signe de $(-3x + 8)(x - 1)$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$	1	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
<i>Signe de $-3x+8$</i>	$+$	$+$	0	$-$
<i>Signe de $x-1$</i>	$-$	0	$+$	$+$
<i>Signe de $k(x)$</i>	$-$	0	0	$-$

EXERCICE 6

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2 > 16$

2. $16x^2 + 8x + 1 > 0$

3. $64x^2 - 121 > 0$

4. $49 - (3 + x)^2 \leq 0$



INDICATION

1. $x^2 > 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4^2 > 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-4) > 0$
 $(x+4)(x-4)$ s'annule pour $x = -4$ ou $x = 4$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
<i>Signe de $x + 4$</i>	$-$	0	$+$	$+$
<i>Signe de $x - 4$</i>	$-$	$-$	0	$+$
<i>Signe de $(x + 4)(x - 4)$</i>	$+$	0	$-$	0

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} =]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$

2. $16x^2 + 8x + 1 > 0 \Leftrightarrow (4x)^2 + 2 \times 4x \times 1 + 1^2 > 0 \Leftrightarrow (4x+1)^2 > 0$ (on a reconnu une identité remarquable).
 $(4x+1)^2 = 0$ pour $x = -\frac{1}{4}$ et $(4x+1)^2 > 0$ pour toutes les autres valeurs de x car le carré d'un nombre réel est positif ou nul.

L'ensemble de solutions est donc $\mathcal{S} =]-\infty; -\frac{1}{4}[\cup]-\frac{1}{4}; +\infty[$

3. $64x^2 - 121 > 0 \Leftrightarrow (8x)^2 - 11^2 > 0 \Leftrightarrow (8x+11)(8x-11) > 0$.
 $(8x+11)(8x-11)$ s'annule pour $x = -\frac{11}{8}$ ou $x = \frac{11}{8}$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{11}{8}$	$\frac{11}{8}$	$+\infty$
<i>Signe de $8x + 11$</i>	$-$	0	$+$	$+$
<i>Signe de $8x - 11$</i>	$-$	$-$	0	$+$
<i>Signe de $(8x + 11)(8x - 11)$</i>	$+$	0	$-$	0

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} =]-\infty; -\frac{11}{8}[\cup]\frac{11}{8}; +\infty[$

4. $49 - (3+x)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 7^2 - (3+x)^2 \leq 0 \Leftrightarrow [7 + (3+x)][7 - (3+x)] \leq 0 \Leftrightarrow (10+x)(4-x) \leq 0$.
 $(10+x)(4-x)$ s'annule pour $x = -10$ ou $x = 4$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	-10	4	$+\infty$
<i>Signe de $10 + x$</i>	$-$	0	$+$	$+$
<i>Signe de $4 - x$</i>	$+$	$+$	0	$-$
<i>Signe de $(10 + x)(4 - x)$</i>	$-$	0	$+$	0

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} =]-\infty; -10] \cup [4; +\infty[$



EXERCICE 7

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\frac{3x-1}{7x-9} - \frac{3-x}{7x-9} \leq 0$

2. $\frac{5+x}{(x-6)(7x+8)} \leq 0$



INDICATION

1. Soit l'inéquation $\frac{3x-1}{7x-9} - \frac{3-x}{7x-9} \leq 0$

(a) L'ensemble de définition est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{9}{7} \right\}$ car le dénominateur s'annule pour $x = \frac{9}{7}$.

(b) On suppose que $x \in \mathcal{D}$.

L'inéquation s'écrit alors : $\frac{(3x-1)-(3-x)}{7x-9} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1-3+x}{7x-9} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-4}{7x-9} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{7x-9} \leq 0$

(c) $4(x-1)$ s'annule pour $x = 1$ et est du signe de $x-1$

(d) Tableau de signes :

x	$-\infty$	1	$\frac{9}{7}$	$+\infty$
$4(x-1)$		$- \mid +$		$+$
$7x-9$		$- \mid -$		$+$
$\frac{4(x-1)}{7x-9}$		$+ \mid -$		$+$

(e) On en déduit que l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left[1 ; \frac{9}{7} \right[$.

2. Soit l'inéquation $\frac{5+x}{(x-6)(7x+8)} \leq 0$

(a) L'ensemble de définition est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{8}{7} ; 6 \right\}$ car $-\frac{8}{7}$ et 6 sont les deux valeurs qui annulent le dénominateur, donc les valeurs interdites.

(b) $5+x=0 \Leftrightarrow x=-5$

(c) On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	-5	$-\frac{8}{7}$	6	$+\infty$
$5+x$		$- \mid +$		$+$	$+$
$x-6$		$-$	$-$	$- \mid +$	
$7x+8$		$-$	$- \mid +$		$+$
$\frac{5+x}{(x-6)(7x+8)}$		$- \mid +$		$- \mid +$	

(d) L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty ; -5] \cup \left] -\frac{8}{7} ; 6 \right[$



EXERCICE 8

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $x^2 - 4x - 5 = 0$

2. $x^2 + 16x + 23 = 0$

3. $x^2 - 11x + 28 = 0$

4. $x^2 + x - 1 = 0$

5. $-5x^2 + 2\sqrt{5}x - 1 = 0$

6. $-4x^2 - x - 6 = 0$

7. $-6x^2 + 23x + 4 = 0$

8. $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 0$

9. $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{3}x - \frac{7}{6} = 0$

10. $x^2 - 5x = 0$

11. $x^2 - 9 = 0$

12. $x^2 + 1 = 0$



INDICATION

1. $\mathcal{S} = \{-5; 1\}$

2. $\mathcal{S} = \{-8 - \sqrt{41}; -8 + \sqrt{41}\}$

3. $\mathcal{S} = \{4; 7\}$

4. $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$

5. $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} \right\}$

6. $\mathcal{S} = \emptyset$

7. $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{6}; 4 \right\}$

8. $\mathcal{S} = \emptyset$

9. $\mathcal{S} = \left\{ -7; -\frac{1}{3} \right\}$

10. $\mathcal{S} = \{0; 5\}$

11. $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$

12. $\mathcal{S} = \emptyset$



EXERCICE 9

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $-x^2 - 4x + 5 \geq 0$

2. $x^2 + x - 3 \geq 0$

3. $-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$

4. $(2x - 3)(-2x^2 + 5x + 3) > 0$

5. $\frac{1 - 4x}{x^2 + x + 1} \leq 0$



INDICATION

1. $\mathcal{S} = [-1; 5]$

2. $\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}; +\infty \right[$

3. $\mathcal{S} = \emptyset$

4. $\mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{3}{2}; 3 \right[$

5. $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{4}; +\infty \right[$



Pour continuer à s'entraîner... [site Euler de l'académie de Versailles](#).
Vous pouvez également utiliser Wims sur votre ENT.