# Épisode II : Résolution d'équations et d'inéquations

*Avant de commencer les exercices veuillez lire les fiches Fiche_calcul_algebrique et Fiche_resolution_equations.*

## Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $5x - 2 = 4 - 2x$
2. $4(x-6) = 3(2x+3)$
3. $\frac{x}{6} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}x - 1$
4. $\frac{3x+1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{3}x - 1$

## Indication

1. $x = \frac{6}{7}$ 2. $x = -\frac{33}{2}$ 3. $x = 3$ 4. $x = \frac{27}{2}$

## Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation suivantes :

1. $(1+4x)^2 - (5x+2)(1+4x) = 0$
2. $(3x+1)^2 = (x+5)^2$
3. $9 - 4x^2 - (5-x)(3-2x) = 0$

## Indication

1. $(1+4x)^2 - (5x+2)(1+4x) = 0 \iff (1+4x)(-1-x) = 0 \iff x = -\frac{1}{4}$ *ou* $x = -1$
2. $(3x+1)^2 = (x+5)^2 \iff (2x-4)(4x+6) = 0 \iff x = 2$ *ou* $x = -\frac{3}{2}$
3. $9 - 4x^2 - (5-x)(3-2x) = 0 \iff (3-2x)(3+2x-5+x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$ *ou* $x = \frac{2}{3}$

## Exercice 3

Soit l'expression $A(x) = (3+5x)^2 - (4x-7)(3+5x)$.

1. Développer, réduire et ordonner $A(x)$.
2. Factoriser $A(x)$.
3. Choisir la forme la mieux adaptée pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   (a) $A(x) = 0$
   (b) $A(x) = 3x + 30$
4. Calculer $A(0)$ et $A(\sqrt{3})$.

## Indication

1. $A(x) = 5x^2 + 53x + 30$.
2. $A(x) = (5x+3)(x+10)$.
3. (a) $A(x) = 0 \iff (5x+3)(x+10) = 0 \iff x = -\dfrac{3}{5}$ ou $x = -10$.

   (b) $A(x) = 3x + 30 \iff 5x^2 + 53x + 30 = 3x + 30 \iff 5x^2 + 50x = 0 \iff 5x(x+10) = 0$
   $A(x) = 3x + 30 \iff x = 0$ ou $x = -10$.
4. $A(0) = 30$ et $A(\sqrt{3}) = 45 + 53\sqrt{3}$.

## Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $3x + 1 > 0$.
2. $3x - (5x+7) \geq 2x - 3$.
3. $\dfrac{2x-5}{3} < \dfrac{2x-3}{7}$.

## Indication

*On résout successivement les inéquations d'une manière « classique » en faisant attention au changement de signes lorsque l'on multiplie ou divise par un nombre négatif !*

1. $3x + 1 > 0$
   $\iff x > -\dfrac{1}{3}$
   donc : $\boxed{\mathcal{S} = \left] -\dfrac{1}{3} \,;\, +\infty \right[}$

2. $3x - (5x+7) \geq 2x - 3$
   $\iff 3x - 5x - 2x \geq -3 + 7$
   $\iff -4x \geq 4$
   $\iff x \leq \dfrac{4}{-4}$
   $\iff x \leq -1$
   Donc : $\boxed{\mathcal{S} = ]-\infty \,;\, -1]}$

3. $\dfrac{2x-5}{3} < \dfrac{2x-3}{7}$
   $\iff \dfrac{7(2x-5)}{7 \times 3} < \dfrac{3(2x-3)}{3 \times 7}$
   $\iff \dfrac{14x-35}{21} < \dfrac{6x-9}{21}$
   $\iff 14x - 35 < 6x - 9$
   $\iff 14x - 6x < -9 + 35$
   $\iff 8x < 26$
   $\iff x < \dfrac{13}{4}$
   Donc : $\boxed{\mathcal{S} = \left] -\infty \,;\, \dfrac{13}{4} \right[}$

## Exercice 5

Déterminer les signes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x+6)^2 - 25$
2. $g(x) = (5x-3)^2 - (x-4)^2$
3. $h(x) = x^2 - 7x$
4. $k(x) = (-3x+8)(7x-4) - (-3x+8)(5-2x)$

## Indication

*Déterminer les signes des fonctions suivantes.*

1. $f(x) = (x+6)^2 - 25$
   On factorise : $f(x) = (x+6)^2 - 5^2 = [(x+6)+5][(x+6)-5]$ donc $\boxed{f(x) = (x+11)(x+1)}$.
   $f(x) = 0$ pour $x = -11$ ou $x = -1$ car un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

***Tableau de signes*** :

| $x$ | $-\infty$ | | $-11$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signe de* $x+11$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| *Signe de* $x+1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| *Signe de* $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

2. $g(x) = (5x-3)^2 - (x-4)^2$
   *On factorise en reconnaissant une identité remarquable, du type* $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
   $g(x) = (5x-3)^2 - (x-4)^2 = [(5x-3)+(x-4)][(5x-3)-(x-4)] = (5x-3+x-4)(5x-3-x+4) = (6x-7)(4x+1)$
   $g(x)$ *s'annule pour* $x = \frac{7}{6}$ *ou pour* $x = -\frac{1}{4}$
   ***Tableau de signes*** :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{4}$ | | $\frac{7}{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signe de* $6x-7$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| *Signe de* $4x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| *Signe de* $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

3. $h(x) = x^2 - 7x = x(x-7)$.
   $h(x)$ *s'annule pour* $x = 0$ *ou* $x = 7$.
   ***Tableau de signes*** :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signe de* $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| *Signe de* $x-7$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | |
| *Signe de* $h(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

4. $k(x) = (-3x+8)(7x-4) - (-3x+8)(5-2x)$.
   *On factorise avec comme facteur commun* $-3x+8$.
   $k(x) = (-3x+8)\,[(7x-4)-(5-2x)] = (-3x+8)(7x-4-5+2x) = (-3x+8)(9x-9) = 9(-3x+8)(x-1)$.
   $k(x)$ *s'annule en 1 ou en* $\frac{8}{3}$ *et* $k(x)$ *est du signe de* $(-3x+8)(x-1)$ .
   ***Tableau de signes*** :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\frac{8}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Signe de* $-3x+8$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| *Signe de* $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| *Signe de* $k(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

## Exercice 6

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2 > 16$
2. $16x^2 + 8x + 1 > 0$
3. $64x^2 - 121 > 0$
4. $49 - (3+x)^2 \leqslant 0$

## Indication

1. $x^2 > 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4^2 > 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-4) > 0$
   $(x+4)(x-4)$ s'annule pour $x = -4$ ou $x = 4$.
   ***Tableau de signes*** :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x+4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| Signe de $x-4$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $(x+4)(x-4)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = ]-\infty\,;\,-4[\cup]4\,;\,+\infty[}$

2. $16x^2+8x+1 > 0 \Leftrightarrow (4x)^2+2\times 4x\times 1+1^2 > 0 \Leftrightarrow (4x+1)^2 > 0$ (on a reconnu une identité remarquable).
   $(4x+1)^2 = 0$ pour $x = -\dfrac{1}{4}$ et $(4x+1)^2 > 0$ pour toutes les autres valeurs de $x$ car le carré d'un nombre réel est positif ou nul.
   L'ensemble de solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{4}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[}$

3. $64x^2 - 121 > 0 \Leftrightarrow (8x)^2 - 11^2 > 0 \Leftrightarrow (8x+11)(8x-11) > 0.$
   $(8x+11)(8x-11)$ s'annule pour $x = -\dfrac{11}{8}$ ou $x = \dfrac{11}{8}$
   ***Tableau de signes*** :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{11}{8}$ | | $\frac{11}{8}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $8x+11$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| Signe de $8x-11$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $(8x+11)(8x-11)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,-\dfrac{11}{8}\right[\cup\left]\dfrac{11}{8}\,;\,+\infty\right[}$

4. $49 - (3+x)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow 7^2 - (3+x)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow [7+(3+x)][7-(3+x)] \leqslant 0 \Leftrightarrow (10+x)(4-x) \leqslant 0.$
   $(10+x)(4-x)$ s'annule pour $x = -10$ ou $x = 4$
   ***Tableau de signes*** :

| $x$ | $-\infty$ | | $-10$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $10+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| Signe de $4-x$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Signe de $(10+x)(4-x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

   L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = ]-\infty\,;\,-10]\cup[4\,;\,+\infty[}$

## Exercice 7

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{3x-1}{7x-9} - \dfrac{3-x}{7x-9} \leqslant 0$

2. $\dfrac{5+x}{(x-6)(7x+8)} \leqslant 0$

## Indication

1. Soit l'inéquation $\dfrac{3x-1}{7x-9} - \dfrac{3-x}{7x-9} \leqslant 0$

   (a) L'ensemble de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{9}{7}\right\}$ car le dénominateur s'annule pour $x = \dfrac{9}{7}$.

   (b) On suppose que $x \in \mathscr{D}$ .

   L'inéquation s'écrit alors : $\dfrac{(3x-1)-(3-x)}{7x-9} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-1-3+x}{7x-9} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x-4}{7x-9} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{4(x-1)}{7x-9} \leqslant 0$

   (c) $4(x-1)$ s'annule pour $x = 1$ et est du signe de $x-1$

   (d) Tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\frac{9}{7}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4(x-1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $7x-9$ | | $-$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $\dfrac{4(x-1)}{7x-9}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

   (e) On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left[1\,;\,\dfrac{9}{7}\right[}$.

2. Soit l'inéquation $\dfrac{5+x}{(x-6)(7x+8)} \leqslant 0$

   (a) L'ensemble de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{8}{7}\,;\,6\right\}$ car $-\dfrac{8}{7}$ et 6 sont les deux valeurs qui annulent le dénominateur, donc les valeurs interdites.

   (b) $5+x=0 \Leftrightarrow x=-5$

   (c) On en déduit le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $-\frac{8}{7}$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5+x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $x-6$ | | $-$ | | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $7x+8$ | | $-$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $\dfrac{5+x}{(x-6)(7x+8)}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

   (d) L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = ]-\infty\,;\,-5] \cup \left]-\dfrac{8}{7}\,;\,6\right[}$

## Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2-4x-5=0$
2. $x^2+16x+23=0$
3. $x^2-11x+28=0$
4. $x^2+x-1=0$
5. $-5x^2+2\sqrt{5}x-1=0$
6. $-4x^2-x-6=0$
7. $-6x^2+23x+4=0$
8. $3x^2-2\sqrt{6}x+3=0$
9. $-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{11}{3}x-\dfrac{7}{6}=0$
10. $x^2-5x=0$
11. $x^2-9=0$
12. $x^2+1=0$

### Indication

1. $\mathscr{S} = \{-5; 1\}$
2. $\mathscr{S} = \left\{-8 - \sqrt{41}; -8 + \sqrt{41}\right\}$
3. $\mathscr{S} = \{4; 7\}$
4. $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$
5. $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right\}$
6. $\mathscr{S} = \emptyset$
7. $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{1}{6}; 4\right\}$
8. $\mathscr{S} = \emptyset$
9. $\mathscr{S} = \left\{-7; -\dfrac{1}{3}\right\}$
10. $\mathscr{S} = \{0; 5\}$
11. $\mathscr{S} = \{-3; 3\}$
12. $\mathscr{S} = \emptyset$

### Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $-x^2 - 4x + 5 \geq 0$
2. $x^2 + x - 3 \geq 0$
3. $-3x^2 + 4x - 2 \geq 0$
4. $(2x - 3)(-2x^2 + 5x + 3) > 0$
5. $\dfrac{1 - 4x}{x^2 + x + 1} \leq 0$

### Indication

1. $\mathscr{S} = [-1; 5]$
2. $\mathscr{S} = \left]-\infty; \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right[$
3. $\mathscr{S} = \emptyset$
4. $\mathscr{S} = \left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[ \cup \left]\dfrac{3}{2}; 3\right[$
5. $\mathscr{S} = \left[\dfrac{1}{4}; +\infty\right[$