

---

## Fonctions - Episode II

---

### Problème

#### Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2e^x + 2x - 7$ .

1. Etudier les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Etudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau de variation.
3. Justifier que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .  
On admet que  $0,94 < \alpha < 0,941$ .
4. Etudier le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie B : Etude d'une fonction $f$

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm).

1. Etudier le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Etudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
3. Calculer  $f'(x)$ , où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$ , et vérifier que  $f'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe.  
Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. Etudier le sens de variation de la fonction  $h : x \mapsto \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$  sur l'intervalle  $\left] -\infty; \frac{5}{2} \right[$ .
5. Démontrer que la droite  $\mathcal{D}$ , d'équation  $y = 2x - 5$ , est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .  
Préciser la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathcal{D}$ .
6. Tracer la droite  $\mathcal{D}$  et la courbe  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Partie C : Etude d'une suite de rapports de distances

Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on considère les points  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$ , d'abscisse  $n$ , appartenant respectivement à l'axe des abscisses, à la droite  $\mathcal{D}$  et à la courbe  $\mathcal{C}$ ; soit  $u_n$  le réel défini par  $u_n = \frac{C_n B_n}{A_n B_n}$ .

On admet que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on a :

$$u_n = 1 - \frac{f(n)}{2n-5} = 1 - (1 - e^{-n}) = e^{-n}$$

1. Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  ?
2. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ . Pouvait-on prévoir ce résultat ?

## Correction de l'évaluation 2

### Partie A

$g$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 2e^x + 2x - 7$ .

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 7 = +\infty$  d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 7 = -\infty$  d'où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ .
- $g$  est la somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , donc  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
 $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2e^x + 2$   
 or pour tout  $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ , alors  $g'(x) > 0$   
 $g$  est alors strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Tableau de variation de  $g$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

- $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ ).  
 $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , de plus,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  (on peut aussi dire... $g$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui contient 0).  
 Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 On admet que  $0,94 < \alpha < 0,941$ .
- On a alors pour tout  $x \in ]-\infty; \alpha[$ ,  $g(x) < 0$   
 pour tout  $x \in ]\alpha; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$   
 $g(x) = 0$  pour  $x = \alpha$ .

### Partie B

$f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$ .

- On construit un tableau de signes pour déterminer le signe de  $f(x)$ .

$$2x - 5 > 0 \iff x > \frac{5}{2}$$

$$1 - e^{-x} > 0 \iff e^{-x} < 1 \iff -x < 0 \iff x > 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
signe de $(2x - 5)$	-	0	-	+
signe de $(1 - e^{-x})$	-	0	+	+
signe de $f(x)$	+	0	-	+

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 5 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 5 = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - e^{-x} = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

3.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = u(x)v(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2(1 - e^{-x}) + (2x - 5)(e^{-x})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 - \frac{2}{e^x} + \frac{2x - 5}{e^x} = \frac{2e^x + 2x - 7}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}$$

or pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$ ,  $f'(x)$  est alors du signe de  $g(x)$ .

Tableau de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

4.  $h : ]-\infty; \frac{5}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$

$h$  est le quotient de fonctions dérivables sur  $]-\infty; \frac{5}{2}[$  dont le dénominateur ne s'annule pas, donc  $h$  est dérivable sur  $]-\infty; \frac{5}{2}[$ .

$$h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{4(2x-5)(2x-7) - 2(2x-5)^2}{(2x-7)^2}$$

$$h'(x) = \frac{(2x-5)(8x-28-4x+10)}{(2x-7)^2} = \frac{(2x-5)(4x-18)}{(2x-7)^2}$$

et  $(2x-5)(4x-18)$  est un trinôme du second degré dont les racines sont  $\frac{5}{2}$  et  $\frac{9}{2}$ ,

alors  $h' > 0$  sur  $]-\infty; \frac{5}{2}[$ , donc  $h$  est strictement croissante sur  $]-\infty; \frac{5}{2}[$ .

5.  $f(x) - (2x-5) = (2x-5) - (2x-5)e^{-x} - (2x-5) = (-2x+5)e^{-x} = -2xe^{-x} + 5e^{-x}$

or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x-5) = 0$

donc la droite  $\mathcal{D}$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .

De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-x} > 0$  et  $-2x+5 < 0$  pour tout  $x \in ]\frac{5}{2}; +\infty[$

et  $-2x+5 > 0$  pour tout  $x \in ]-\infty; \frac{5}{2}[$ .

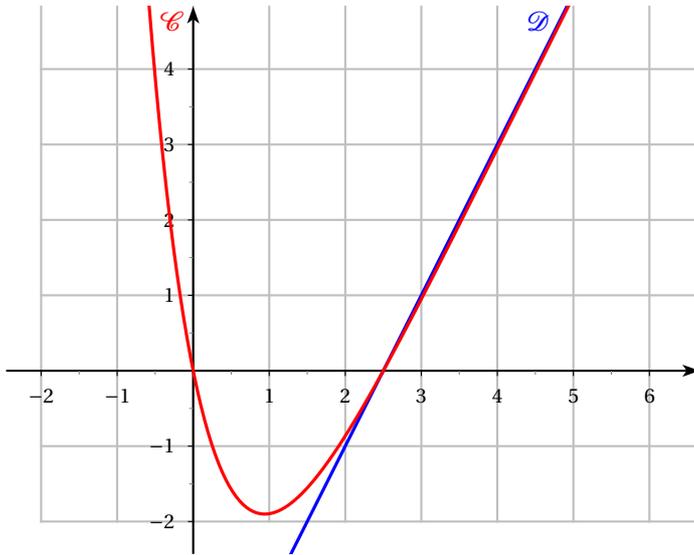
Donc  $f(x) - (2x-5) > 0$  pour tout  $x \in ]-\infty; \frac{5}{2}[$  et  $f(x) - (2x-5) < 0$  pour tout  $x \in ]\frac{5}{2}; +\infty[$ .

$\mathcal{C}$  est alors située au-dessus de  $\mathcal{D}$  sur  $]-\infty; \frac{5}{2}[$  et en-dessous de  $\mathcal{D}$  sur  $]\frac{5}{2}; +\infty[$ .

$\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  se coupent en  $(\frac{5}{2}; 0)$ .

6. Représentations graphiques de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$ .

On peut remarquer que  $f(\alpha) \approx -2$ .



### Partie C

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  soit  $u_n = \frac{C_n B_n}{A_n B_n}$ .

$$1. \quad u_n = 1 - \frac{f(n)}{2n-5} = 1 - (1 - e^{-n}) = e^{-n}$$

$$u_{n+1} = e^{-n-1} = e^{-n} \times e^{-1} = u_n \times \frac{1}{e}$$

donc  $(u_n)$  est la suite géométrique de raison  $\frac{1}{e}$  et de premier terme  $u_3 = e^{-3}$ .

2. Comme  $-1 < \frac{1}{e} < 1$ , la suite  $(u_n)$  est convergente et converge vers 0.

On pouvait prévoir ce résultat car la droite  $\mathcal{D}$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ .