

Étude de fonctions

Variations

On suppose que f est dérivable sur un intervalle I .

- ◇ f est croissante sur $I \iff f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- ◇ f est décroissante sur $I \iff f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.
- ◇ f est constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Il est donc possible de déterminer les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.

Exemple

Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$, f est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

Quel est son sens de variation ?

Correction

◇ Pour tout réel x on a $f'(x) = 4x - 8$.

◇ On peut déterminer le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction f :

| | | | | | |
|---------|-----------|---|---|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | | $-\infty$ | $+\infty$ |

◇ f est décroissante sur $] -\infty; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

Exercice corrigé

Soit $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$, g est définie et dérivable sur \mathbb{R} . Quel est son sens de variation ?

- ◇ Pour tout réel x on a $g'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$.
- ◇ On détermine le signe de $x^2 - x - 2$ en cherchant ses racines et on trouve -1 et 2 .
 $g'(x) = 6(x+1)(x-2)$ est positive sauf entre ses racines -1 et 2 .
- ◇ On peut déterminer le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction g :

| | | | | | | | |
|---------|-----------|---|----|---|---|---|-----------|
| x | $-\infty$ | | -1 | | 2 | | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | | 6 | ↘ | | $+\infty$ |

◇ g est croissante sur $] -\infty; -1]$ et sur $[2; +\infty[$ et décroissante sur $[-1; 2]$.

Signe d'une expression rationnelle factorisée

Une expression rationnelle factorisée est une expression littérale de la forme :

$$\frac{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3) \cdots (a_nx + b_n)}{(a'_1x + b'_1)(a'_2x + b'_2)(a'_3x + b'_3) \cdots (a'_nx + b'_n)}$$

avec a_1, a_2, \dots, a_n et a'_1, a'_2, \dots, a'_n non nuls.

⚠ **Attention** : dans ce genre d'expressions, il y a des **valeurs interdites**.

Il faut donc commencer par chercher ces valeurs interdites !

On dresse alors un tableau de signes comme pour un produit.

Exercice corrigé

Étudions le signe de $A(x) = \frac{2x(3x-6)}{(x-3)(1-x)}$.

Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des binômes de $A(x)$: $2x = 0 \iff x = 0$; $3x - 6 = 0 \iff x = 2$ et $3x - 6 > 0 \iff x > 2$; $x - 3 = 0 \iff x = 3$ et $x - 3 > 0 \iff x > 3$; $1 - x = 0 \iff x = 1$ et $1 - x > 0 \iff x < 1$.

1 et 3 sont donc des valeurs interdites.

Correction

Dressons maintenant le tableau des signes de $A(x)$:

| | | | | | | |
|--------|-----------|----|---|----|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $+\infty$ |
| $2x$ | - | 0+ | + | + | + | |
| $3x-6$ | - | - | - | 0+ | + | |
| $x-3$ | - | - | - | - | + | |
| $1-x$ | + | + | - | - | - | |
| $A(x)$ | - | 0+ | - | 0+ | - | |