

Équations de récurrence linéaire

Définition

On appelle équation de récurrence linéaire d'ordre 1 à coefficients constants toute équation du type :

$$u_{t+1} + au_t = f(t)$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ et f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} . Résoudre cette équation, c'est trouver toutes les suites réelles $(u_t)_{t \in \mathbb{N}}$ dont les termes vérifient l'égalité pour tout indice t .

Proposition

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ n réels. Il existe une unique solution u telle que $u_i = \alpha_i$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Proposition : Propriété fondamentale

On obtient toutes les solutions d'une équation de récurrence linéaire en ajoutant la solution générale de l'équation homogène associée à une solution particulière de l'équation complète.

Définition

On appelle équation de récurrence linéaire d'ordre 2 toute équation du type :

$$u_{t+2} + au_{t+1} + bu_t = f(t)$$

où $b \in \mathbb{R}^*$ et f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition

On appelle équation caractéristique associée à (EH) ou à (E) l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{R}$ définie par :

$$r^2 = ar + b \iff r^2 - ar - b = 0$$

Définition

Soit $(E) : u_{t+n} = a_{n-1}u_{t+n-1} + \dots + a_0u_t + f(t)$ une équation de récurrence linéaire à coefficients constants d'ordre n . On appelle équilibre toute suite stationnaire solution de (E) .

Proposition

Soit $x_{t+2} = ax_{t+1} + bx_t$ une équation de récurrence linéaire d'ordre 1 ou 2 (1 si $b = 0$). Alors l'équilibre est globalement stable ssi toutes les racines de l'équation caractéristique sont de module strictement inférieur à 1.

Définition

Si on a une équation de récurrence linéaire d'ordre quelconque, l'équation obtenue en supprimant le terme $f(t)$ s'appelle l'équation homogène associée.

Proposition : Propriété fondamentale

Soit $u_{t+1} = au_t + f(t)$ une équation d'ordre 1. La solution de l'équation homogène associée est donnée par :

$$u_t = \lambda a^t \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple

Résoudre (E) : $u_{t+1} - 7u_t = t$.

La solution de l'équation homogène $u_{t+1} - 7u_t = 0$ associée est donnée par : $u_t = \lambda \cdot 7^t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Recherchons les solutions particulières de (E) de la forme $v_t = at + b$.

$$\begin{aligned} v_t \text{ est solution de } (E) &\iff v_{t+1} - 7v_t = t \\ &\iff a(t+1) + b - 7(at+b) = t \\ &\iff -6at + (a-6b) = t \\ &\iff a = -\frac{1}{6} \text{ et } b = -\frac{1}{36} \end{aligned}$$

Les solutions particulières de (E) sont les suites de la forme $v_t = -\frac{1}{6}t - \frac{1}{36}$.

Les solutions de (E) sont les suites de la forme

$$u_t = \lambda \cdot 7^t - \frac{1}{6}t - \frac{1}{36} \text{ avec } \lambda \text{ réel.}$$

Proposition

Soit $r^2 - ar - b = 0$ l'équation caractéristique associée à (EH) . Alors :

- ✧ Si l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2 dans \mathbb{R} , les solutions de (EH) sont les suites données par : $u_t = \lambda_1 r_1^t + \lambda_2 r_2^t$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- ✧ Si l'équation caractéristique a une solution double r_1 dans \mathbb{R} , les solutions de (EH) sont les suites données par : $u_t = (\lambda_1 t + \lambda_2) r_1^t$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, quelconques.
- ✧ Si l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées, les solutions de (EH) sont les suites données par :

$$u_t = |z_1|^t (\lambda_1 \cos t\theta + \lambda_2 \sin t\theta)$$

où $\theta = \arg(z_1) \pmod{2\pi}$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.