

Résolution d'équations

Définition

On appelle fonction polynôme de degré n toute fonction P définie sur \mathbb{R} de la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_p x^p + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- ✧ a_0, a_1, \dots, a_n sont appelés coefficients de P .
- ✧ Le terme $a_p x^p$ est le monôme de degré p .
- ✧ $n = \text{deg}(P)$.

Exemples

- ✧ La fonction P définie par $P(x) = 7x^6 - 5x^4 + 3x - 11$ est une fonction polynôme de degré 6.
- ✧ La fonction affine $ax + b$ avec $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 1.
- ✧ La fonction constante k avec $k \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 0.
- ✧ La fonction Q définie par : $Q(x) = x^3 + x + \frac{1}{x}$ n'est pas une fonction polynôme.

Racine d'un polynôme

On appelle racine d'une fonction polynôme P toute solution x_0 de l'équation $P(x) = 0$.

Exemple

Les fonctions polynômes du 1^{er} degré $ax + b$ admettent toutes une seule racine $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Fonction polynôme du second degré

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction P de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$. L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée trinôme du second degré.

Exemples

- ✧ $P(x) = x^2 - 7x + 12$, on a : $a = 1, b = -7$ et $c = 12$.
- ✧ $P(x) = 4x^2$, on a : $a = 4, b = 0$ et $c = 0$.
- ✧ $2x + 1, 6x^3 + 4x + 2$ et $(x - 1)^2 - x^2$ ne sont pas du second degré.

Forme canonique

Une expression de la forme $a(x - \alpha)^2 + b$ s'appelle la forme canonique du trinôme.

Exemple

$x^2 - 8x + 7 = (x - 4)^2 - 16 + 7 = (x - 4)^2 - 9$.
Dans ce cas, les racines sont alors facilement identifiables...

Résolution d'une équation du seconde degré

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$

- ✧ $\Delta < 0$: l'équation n'a pas de solution réelle et on ne peut pas factoriser.
- ✧ $\Delta = 0$: l'équation a une solution double $x_0 = -\frac{b}{2a}$
le trinôme se factorise sous la forme $a(x - x_0)^2$.
- ✧ $\Delta > 0$: l'équation possède 2 solutions réelles :
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
le trinôme se factorise sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemples

Résoudre $-6x^2 + x + 1 = 0$
 $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$
 Le discriminant est positif, il y a deux solutions réelles :
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{-12} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{-12} = -\frac{1}{3}$
 $S = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\}$ et la forme factorisée de P est :
 $P(x) = -6 \left(x + \frac{1}{3} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right)$

Remarque

Si Δ est positif, on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
 $= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2]$
 $= ax^2 - aSx + aP$
 où S est la somme et P le produit des deux racines.
 On a alors : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Exemples

- ✧ $f(x) = -6x^2 + x + 1$
Le discriminant du trinôme est positif, f est du signe de $a = -6$, donc négative sauf entre ses racines $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.
- ✧ $g(x) = 5x^2 + 6x + 2$
Le discriminant du trinôme est négatif, g est du signe de $a = 5$, donc positive sur \mathbb{R} .
- ✧ $h(x) = 2x^2 + 5x + \frac{25}{8}$
Le discriminant du trinôme est nul, h est du signe de $a = 2$, donc positive sur \mathbb{R} et nulle en $x_0 = -\frac{5}{4}$.

Résolution d'une inéquation du seconde degré

Le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre ses racines lorsqu'elles existent.