Valeur absolue

Définition

On appelle **valeur absolue** d'un nombre réel x, le nombre réel noté $|x|$, tel que :

- si $x \geqslant 0$ alors $|x| = x$;
- si $x < 0$ alors $|x| = -x$.

Autrement dit, la valeur absolue d'un nombre est égale à lui-même si ce nombre est positif et est égale à son opposé si ce nombre est négatif.

Exemple

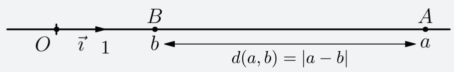
$|-2| = 2$; $|5| = 5$; $|2-\sqrt{2}| = 2-\sqrt{2}$; $|3-\pi| = \pi - 3$; $|-1,2| = 1,2$; $|3,14| = 3,14$; $|0| = 0$.

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Propriété : distance et valeur absolue

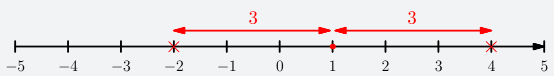
On appelle distance de deux réels a et b, le réel noté $d(a,b)$ égale à la distance entre les points d'abscisse a et b sur un axe $(O, \overrightarrow{i})$. On a donc $d(a,b) = |a-b|$.



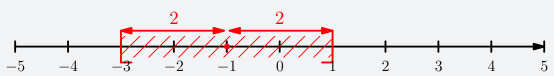
Exemples

- Déterminer les réels x tels que $|x-1| = 3$ revient à déterminer sur un axe les points d'abscisse x tels que $d(x,1) = 3$. On en déduit que

$$|x-1| = 3 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 4.$$

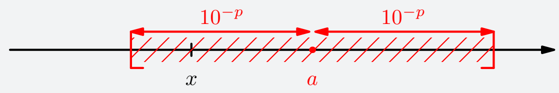


- Déterminer les réels x tels que $|x+1| \leqslant 2$ revient à déterminer sur un axe les points d'abscisse x tels que $d(x,-1) \leqslant 2$ car $|x+1| = |x-(-1)|$.
  On en déduit que $|x+1| \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in [-3\,;\,1]$.



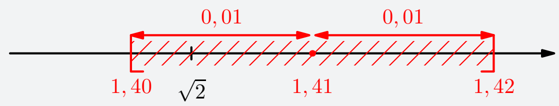
Définition : valeur approchée d'un réel

Pour tout entier positif p, dire que a est une **valeur approchée** du réel x à 10^{-p} près signifie que la distance entre x et sa valeur approchée est inférieure ou égale à 10^{-p}, ce qui équivaut à dire que $|x-a| \leqslant 10^{-p}$.



Exemple

Dire que $1,41$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $0,01$ près signifie que la distance entre $\sqrt{2}$ et $1,41$ est inférieure ou égale à $0,01$, ce qui équivaut à dire que $1,40 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,42$.



Exercice corrigé

- **Résoudre** $|x+3| = 8$.

$$\begin{aligned} |x+3| = 8 &\iff x+3 = -8 \text{ ou } x+3 = 8 \\ &\iff x = -11 \text{ ou } x = 5 \end{aligned}$$

$$S = \{-11;5\}$$

- **Résoudre** $|x-7| \leq 1$.

$$\begin{aligned} |x-7| \leq 1 &\iff -1 \leq x-7 \leq 1 \\ &\iff 6 \leq x \leq 8 \end{aligned}$$

$$S = [6;8]$$

- **Résoudre** $|x-12| > 7$.

$$\begin{aligned} |x-12| > 7 &\iff x-12 < -7 \text{ ou } x-12 > 7 \\ &\iff x < 5 \text{ ou } x > 19 \end{aligned}$$

$$S =]-\infty;5[\cup]19;+\infty[$$