

 EXERCICE 1

1. Calculer $I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x \ln x + 2x} dx$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = \ln x$).

 SOLUTION

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ et $I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x \ln x + 2x} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{\ln x + 2} \times \frac{dx}{x}$
 soit $I_1 = \int_0^1 \frac{u}{u+2} du = \int_0^1 \frac{u+2-2}{u+2} du = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{u+2}\right) du$
 d'où $I_1 = [u - 2 \ln |u+2|]_0^1 = 1 - 2 \ln 3 + 2 \ln 2 = 1 + \ln \left(\frac{4}{9}\right)$.



2. (a) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{(x+1)(x+3)}$ en éléments simples.

 SOLUTION

Soit $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3}$.
 $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)f(x) = a = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -3} (x+3)f(x) = b = -\frac{1}{2}$.
 D'où : $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+3}$.



2. (b) Calculer l'intégrale $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+3)}{(x+1)^2} dx$ (on pourra effectuer une intégration par parties).

 SOLUTION

(i) La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x+3)}{(x+1)^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.
 (ii) On pose $A \in [1; +\infty[$, par intégration par parties on a :
 $\int_1^A \frac{\ln(x+3)}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{\ln(x+3)}{x+1}\right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{(x+1)(x+3)} dx = \left[-\frac{\ln(x+3)}{x+1}\right]_1^A + \int_1^A \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+3}\right) dx$
 $\int_1^A \frac{\ln(x+3)}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{\ln(x+3)}{x+1}\right]_1^A + \left[\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x+3|\right]_1^A$
 $\int_1^A \frac{\ln(x+3)}{(x+1)^2} dx = -\frac{\ln(A+3)}{A+1} + \frac{\ln 4}{2} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{A+1}{A+3}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{4}\right)$
 (iii) On a donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\ln(x+3)}{(x+1)^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(A+3)}{A+1} + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{A+1}{A+3}\right) + \frac{1}{2} \ln 2$
 or $\lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(A+3)}{A+1} = \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(A+3)}{A+3} \times \frac{A+3}{A+1} = 0$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{A+1}{A+3}\right) = 0$.
 (iv) Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+3)}{(x+1)^2} dx$ est convergente et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+3)}{(x+1)^2} dx = \frac{3}{2} \ln 2$.

EXERCICE 2

On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 = 2 + 2i$.

1. Déterminer la forme algébrique des solutions de l'équation (E).

SOLUTION

On cherche $z = \alpha + i\beta$ tel que $z^2 = 2 + 2i$.

$$\begin{aligned}z^2 = 2 + 2i &\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = 2 + 2i \\&\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 2 + 2i \\&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 2 \\ 2\alpha\beta = 2 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \dots |z^2| = |2 + 2i| \\ \alpha^2 - \beta^2 = 2 \\ 2\alpha\beta = 2 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 2 + 2\sqrt{2} \\ 2\beta^2 = 2\sqrt{2} - 2 \\ 2\alpha\beta = 2 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}} \\ \beta = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1} \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ de même signe} \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \text{ et } \beta = \sqrt{\sqrt{2} - 1} \\ \text{ou} \\ \alpha = -\sqrt{1 + \sqrt{2}} \text{ et } \beta = -\sqrt{\sqrt{2} - 1} \end{cases}\end{aligned}$$

Les racines de $2 + 2i$ sont donc $\sqrt{1 + \sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ et $-\sqrt{1 + \sqrt{2}} - i\sqrt{\sqrt{2} - 1}$.



2. Écrire $2 + 2i$ sous forme exponentielle puis déterminer les solutions de (E) sous forme exponentielle.

SOLUTION

$$|2 + 2i| = 2|1 + i| = 2\sqrt{2} \text{ et } \arg(2 + 2i) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$$

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^2 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \iff z = \sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} \text{ ou } z = \sqrt{2\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{2})} = \sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{9\pi}{8}} = -\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$$



3. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

SOLUTION

$$\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}} = \sqrt{1 + \sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

EXERCICE 3

Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
On suppose que $F \cup G$ est encore un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $F \subset G$ ou $G \subset F$.

SOLUTION

On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E .

On souhaite montrer qu'alors $F \subset G$ ou $G \subset F$. Raisonnons par l'absurde. C'est-à-dire que l'on suppose que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$.

- $F \not\subset G$ signifie que l'on peut trouver un élément x qui appartient à F mais pas à G .
- $G \not\subset F$ signifie que l'on peut trouver un élément y qui appartient à G mais pas à F .
- Comme $x \in F$ alors $x \in F \cup G$ et de même $y \in F \cup G$. Donc comme $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E on a $x + y \in F \cup G$.

Cela signifie donc que soit $x + y \in F$ soit $x + y \in G$.

Imaginons que $x + y \in F$. Comme $-x \in F$ on a alors $(x + y) + (-x) \in F$ donc $y \in F$ ce qui est absurde.

On raisonne de même pour $x + y \in G$.

- Donc $F \subset G$ ou $G \subset F$.

EXERCICE 4

On considère dans \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 3, -2, 2) & v_2 &= (2, 7, -5, 6) & v_3 &= (1, 2, -1, 0) \\ w_1 &= (1, 3, 0, 2) & w_2 &= (2, 7, -3, 6) & w_3 &= (1, 1, 6, -2). \end{aligned}$$

Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par (v_1, v_2, v_3) et G celui engendré par (w_1, w_2, w_3) .

1. Déterminer une base de F et une base de G .

SOLUTION

On a $v_3 = 3v_1 - v_2$. Ainsi, F est engendré simplement par v_1 et v_2 . Comme v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, la famille (v_1, v_2) est libre. C'est une base de F .

On a $w_3 = 5w_1 - 2w_2$. Ainsi, G est engendré par w_1 et w_2 . De même, la famille (w_1, w_2) , qui est libre, forme une base de G .



2. Montrer que (v_1, v_2, w_1, w_2) est liée. En déduire une base de $F + G$.

SOLUTION

On a $v_1 - w_1 = v_2 - w_2$, soit $v_1 - v_2 - w_1 + w_2 = 0$. Ainsi, la famille (v_1, v_2, w_1, w_2) est liée. On sait que (v_1, v_2, w_1, w_2) est une famille génératrice de $F + G$. Elle n'est pas libre donc ce n'est pas une base. Montrons en revanche que (v_1, v_2, w_1) est libre. En effet, si $av_1 + bv_2 + cw_1 = 0$, on obtient le système

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 3a + 7b + 3c = 0 \\ -2a - 5b = 0 \\ 2a + 6b + 2c = 0 \end{cases}$$

dont on montre facilement que la seule solution est $a = b = c = 0$. Ainsi, (v_1, v_2, w_1) engendrent $F + G$ (rappelons que w_2 est C.L de (v_1, v_2, w_1)) et est une famille libre. C'est une base de $F + G$ qui est donc de dimension 3.



3. Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$.

- (a) Démontrer que l'application f de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R} définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 - 2x_2 + x_4$ est linéaire. En déduire alors que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

SOLUTION

f est linéaire...et $E = \text{Ker } f$ donc E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 (application directe du cours).



3. (b) Donner une base de E .



SOLUTION

On a

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3, -4x_1 + 2x_2); x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$E = \{x_1(1, 0, 0, -4) + x_2(0, 1, 0, 2) + x_3(0, 0, 1, 0); x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$E = \text{Vect}\{(1, 0, 0, -4), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\}$$

Une famille génératrice de E est donc donnée par $\{(1, 0, 0, -4), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\}$. On vérifie très facilement que cette famille est libre. C'est donc une base de E .



4. (Bonus) Montrer que $F + G = E$. La somme est-elle directe ? Quelle est la dimension de $F \cap G$?



SOLUTION

Remarquons que $\dim(F + G) = \dim(E) = 3$. Pour montrer que $F + G = E$, il suffit donc par exemple de démontrer que $F + G \subset E$. Et puisque $F + G$ est engendré par v_1, v_2 et w_1 , il suffit de démontrer que ces trois vecteurs sont éléments de E . C'est une vérification immédiate.

La somme n'est pas directe, sinon on aurait $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ i.e $3 = 2 + 2$, ce qui n'est pas le cas. Par le théorème des quatre dimensions, on a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

c'est-à-dire $3 = 2 + 2 - \dim(F \cap G)$ qui donne $\dim(F \cap G) = 1$.