

Les nombres complexes

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

28 août 2019

université
de **BORDEAUX**

LABORATOIRE
BORDELAIS
DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE

LaBRI

Introduction

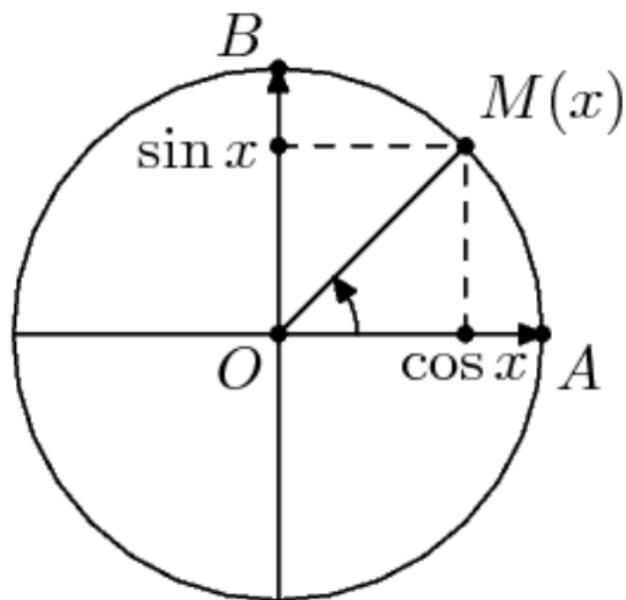
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct et soit \mathcal{C} le cercle trigonométrique de centre O .

A et B sont les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$.

Pour tout réel x , il existe un unique point M de \mathcal{C} tel que x soit une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

$\cos x$ est l'abscisse de M dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$\sin x$ est l'ordonnée de M dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



Propriétés immédiates

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

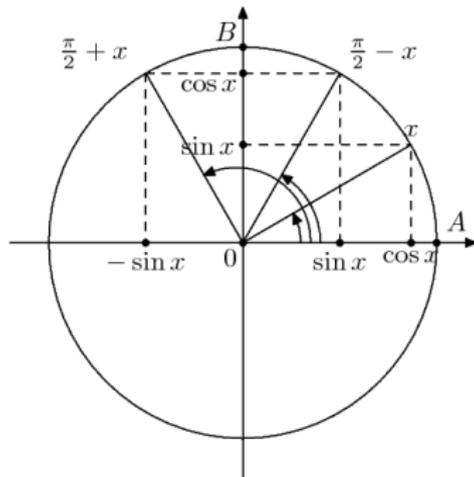
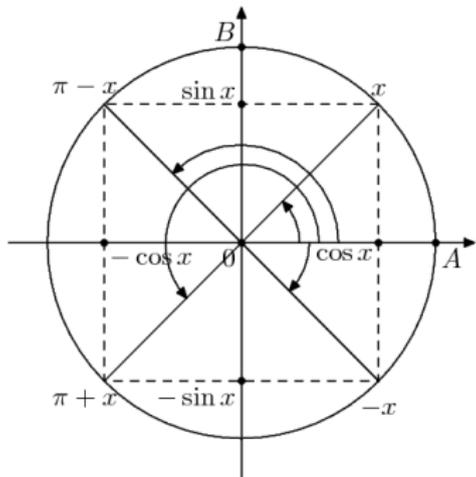
Pour tout réel x ,

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x + \pi) = -\cos x \\ \sin(x + \pi) = -\sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$$

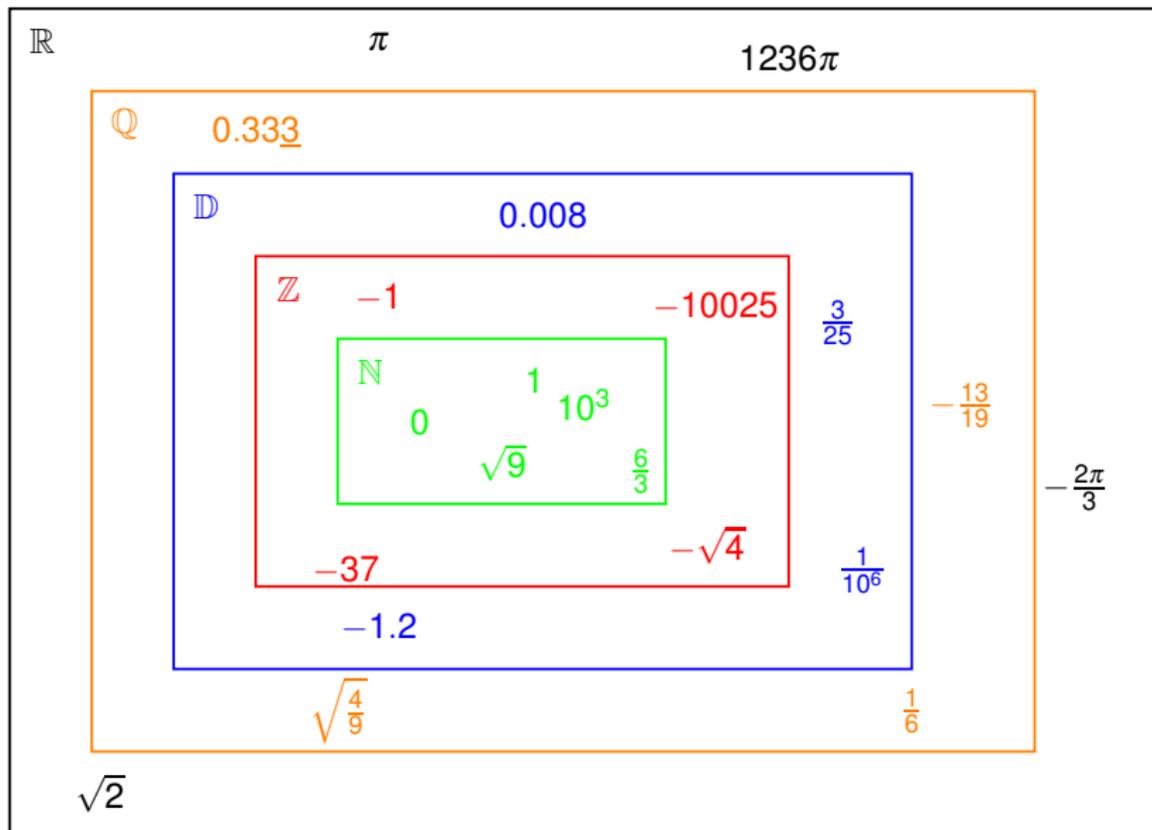
Rappels ou pas



Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Les ensembles de nombres : rappels...



Les ensembles de nombres : rappels...

- \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels. C'est l'ensemble des entiers positifs ou nuls.
- Dans \mathbb{N} l'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution. Cette équation a une solution notée -1 , cette solution est un élément de l'ensemble \mathbb{Z} .
 \mathbb{Z} est l'ensemble des entiers relatifs. C'est l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls.
 \mathbb{Z} contient \mathbb{N} , c'est-à-dire que \mathbb{N} est contenu dans \mathbb{Z} , ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Les ensembles de nombres : rappels...

- Dans \mathbb{Z} l'équation $2x = 1$ n'a pas de solution.

Cette équation a une solution notée $\frac{1}{2}$, cette solution est un élément de l'ensemble \mathbb{Q} .

\mathbb{Q} est l'ensemble des nombres rationnels.

C'est l'ensemble de tous les nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. \mathbb{Q} contient \mathbb{Z} . On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Les ensembles de nombres : rappels...

- Dans \mathbb{Q} l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solutions.
Cette équation a deux solutions notées $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble \mathbb{R} .
 \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels. C'est l'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite.
 \mathbb{R} contient \mathbb{Q} . On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- Dans \mathbb{R} l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solutions.

Les ensembles de nombres : rappels...

- Dans \mathbb{R} l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solutions. Cette équation a deux solutions notées i et $-i$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble \mathbb{C} .

\mathbb{C} est l'ensemble des nombres complexes.

C'est l'ensemble des nombres de la forme $x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

\mathbb{C} contient \mathbb{R} . On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition

- \mathbb{C} contient l'ensemble des nombres réels.
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
- Il existe un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$.

Définition

- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = x + iy$ avec x et y réels.
- L'écriture $z = x + iy$ avec x et y réels est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z .
- x est la partie réelle de z , notée $Re(z)$, y est la partie imaginaire de z notée $Im(z)$.

Définition

- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = x + iy$ avec x et y réels.
- L'écriture $z = x + iy$ avec x et y réels est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z .
- x est la partie réelle de z , notée $Re(z)$, y est la partie imaginaire de z notée $Im(z)$.

Remarque

$z = x + iy$ avec x et y réels :

Si $y = 0$, le nombre complexe est réel.

Si $x = 0$, le nombre complexe est dit imaginaire pur ($z \in i\mathbb{R}$).

Exemple

Dans chacun des exemples suivants, on donne la partie réelle et la partie imaginaire :

- $z = 2 + 3i$ $Re(z) = 2$ et $Im(z) = 3$
- $z = -1 + \frac{1}{2}i$ $Re(z) = -1$ et $Im(z) = \frac{1}{2}$
- $z = -i$ $Re(z) = 0$ et $Im(z) = -1$
- $z = \pi$ $Re(z) = \pi$ et $Im(z) = 0$
- $z = 4i - \frac{1}{3}$ $Re(z) = -\frac{1}{3}$ et $Im(z) = 4$.

Théorème

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire :

$$z = z' \Leftrightarrow x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'.$$

$$z = 0 \Leftrightarrow x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0.$$

Remarque

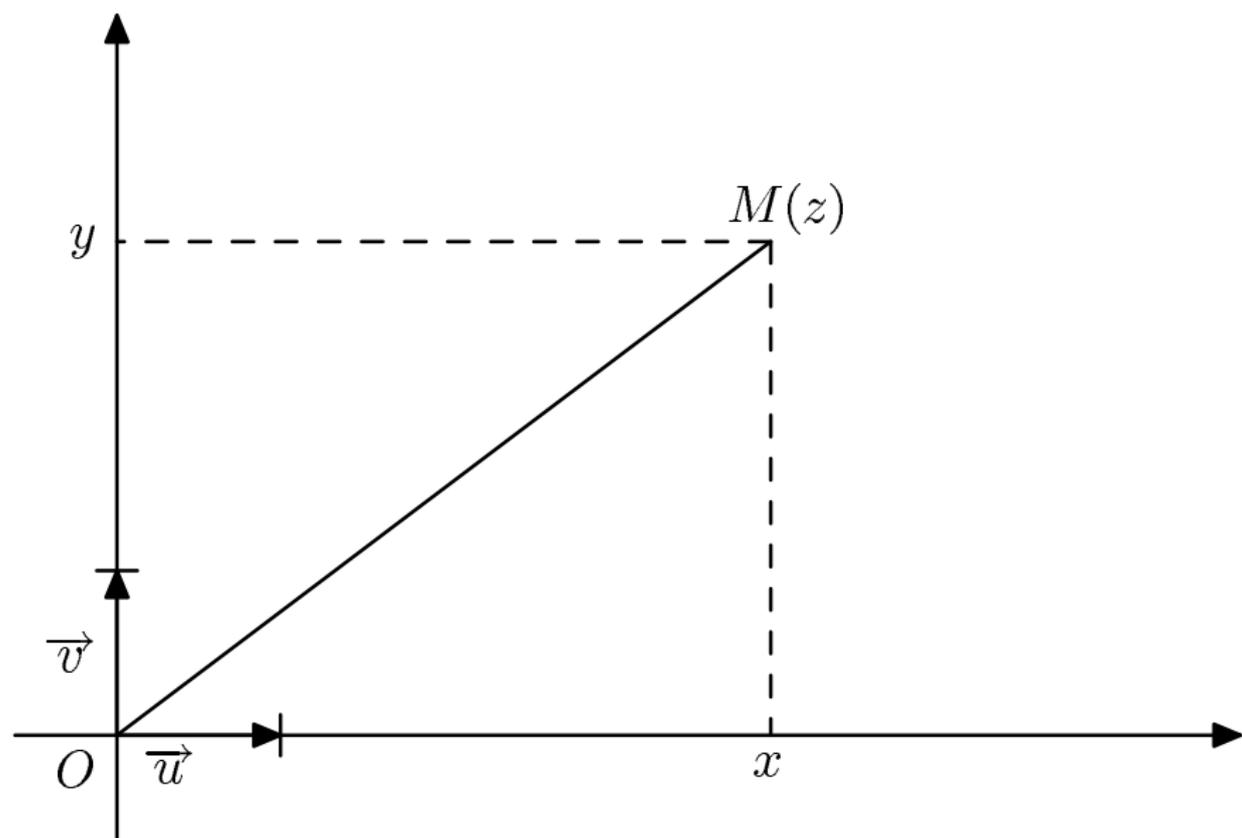
Cela signifie qu'un nombre complexe s'écrit de manière unique sous forme algébrique.

Définition

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan.

- 1 A tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réels, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$. On dit que M est le point image de z et que \overrightarrow{OM} est le vecteur image de z .
- 2 Tout point $M(x; y)$ est le point image d'un seul nombre complexe $z = x + iy$.
On dit que z est l'affixe du point M et du vecteur \overrightarrow{OM} .
- 3 Le plan est alors appelé plan complexe.
- 4 L'axe des abscisses $(O; \vec{u})$ est appelé **axe des réels**, l'axe des ordonnées $(O; \vec{v})$ est appelé axe des **imaginaires purs**.

Représentation graphique



Addition et multiplication

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x' et y' réels).

La somme de z et de z' est le complexe

$$z + z' = (x + x') + i(y + y').$$

Le produit de z et de z' est $z.z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.

En effet $z.z' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + ixy' + ix'y + i^2yy' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.

Remarque

Les identités remarquables sont valables dans \mathbb{C} .

On a alors pour tous z et z' complexes,

$$z^2 + z'^2 = z^2 - i^2 z'^2 = (z - iz')(z + iz').$$

Exercice

Soient $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$.

Calculer $z + z'$, $z - z'$, $2z - 3z'$, zz' et z^2 .

Exercice

Soient $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$.

Calculer $z + z'$, $z - z'$, $2z - 3z'$, zz' et z^2 .

- $z + z' = 2 + 3i + i - 5 = -3 + 4i,$
- $z - z' = 2 + 3i - (i - 5) = 2 + 3i - i + 5 = 7 + 2i,$
- $2z - 3z' = 2(2 + 3i) - 3(i - 5) = 4 + 6i - 3i + 15 = 19 + 3i,$
- $zz' = (2 + 3i)(i - 5) = 2i - 10 + 3i^2 - 15i =$
 $2i - 10 - 3 - 15i = -13 - 13i,$
- $z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 =$
 $4 + 12i - 9 = -5 + 12i.$

Inverse d'un nombre complexe non nul

Théorème

Tout nombre complexe non nul z , écrit sous forme algébrique $z = x + iy$, admet un inverse, noté $\frac{1}{z}$, et : $\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Preuve

En effet, on remarque que pour tout nombre complexe non nul $z = x + iy$, $(x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$.

On a alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Inverse d'un nombre complexe non nul

Exercice

Calculs d'inverses :

$$① \quad \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$② \quad \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

$$③ \quad \frac{2}{i} = \frac{2 \times (-i)}{i \times (-i)} = \frac{-2i}{1} = -2i.$$

$$④ \quad \frac{2+i}{-3+i} = \frac{(2+i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-6-2i-3i+1}{10} = \frac{-5-5i}{10} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Définition

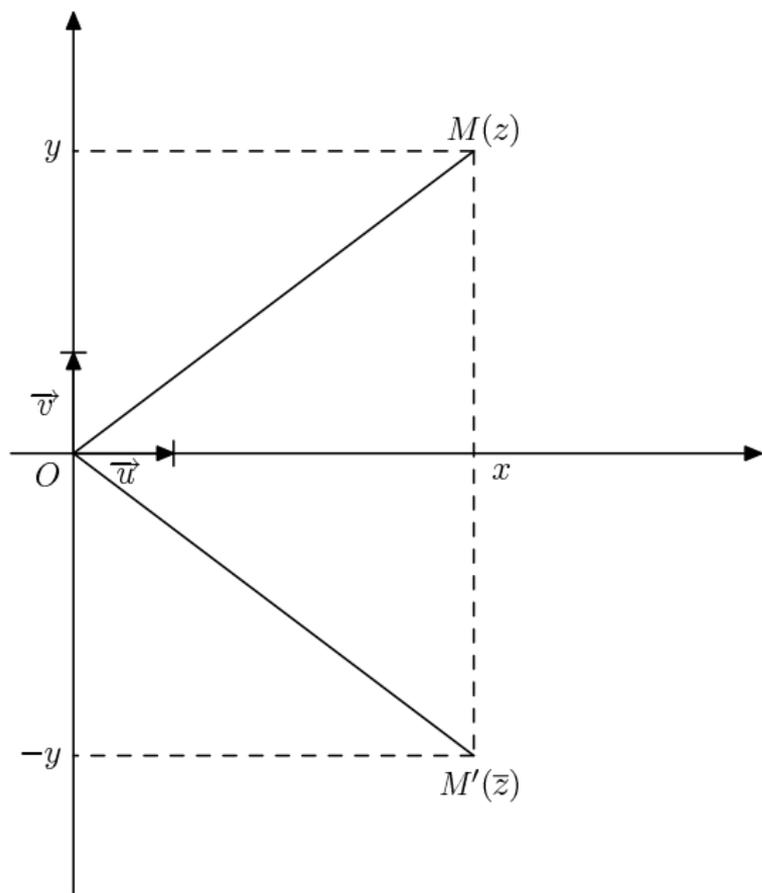
Soit z un nombre complexe, $z = x + iy$.

Le **nombre conjugué** de z , noté \bar{z} , est le nombre complexe $x - iy$.

Interprétation géométrique

Dans le plan complexe, le point M' d'affixe \bar{z} est l'image du point M d'affixe z par la symétrie par rapport à l'axe des réels.

Nombre conjugué



Théorème

z est un nombre complexe.

- 1 z est réel équivaut à $\bar{z} = z$.
- 2 z est imaginaire pur équivaut à $\bar{z} = -z$.

Théorème

z est un nombre complexe.

- 1 z est réel équivaut à $\bar{z} = z$.
- 2 z est imaginaire pur équivaut à $\bar{z} = -z$.

Preuve

On pose $z = x + iy$, avec x et y réels :

- 1 Si z est réel, alors $y = 0$, donc $z = \bar{z}$.
Si $z = \bar{z}$, alors $x + iy = x - iy$, donc $2iy = 0$ et on en déduit que $y = 0$ ce qui signifie que z est réel.
- 2 Si z est imaginaire pur, alors $x = 0$, donc $z = -\bar{z}$.
Si $z = -\bar{z}$, alors $x + iy = -x + iy$, donc $2x = 0$ et $x = 0$.
 z est donc bien un imaginaire pur.

Théorème

Soit z l'affixe d'un point M dans le plan complexe.

- 1 \bar{z} est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
- 2 $-z$ est l'affixe du symétrique de M par rapport au point O .
- 3 $-\bar{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

Théorème

Pour tous nombres complexes z et z' :

$$(1) \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$(2) \overline{\bar{z}} = z$$

$$(3) \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$$

$$(4) \text{ pour } z \neq 0, \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$(5) \text{ pour } z' \neq 0, \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

$$(6) \text{ pour } n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \bar{z}^n.$$

Théorème

Pour tous nombres complexes z et z' :

$$(1) \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$(2) \overline{\bar{z}} = z$$

$$(3) \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$$

$$(4) \text{ pour } z \neq 0, \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$(5) \text{ pour } z' \neq 0, \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

$$(6) \text{ pour } n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \bar{z}^n.$$

Remarque

Pour tout nombre complexe z , on a les relations :

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Exemple

Soient $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$.

- $z + z' = (3 + 5i) + (-2 + 3i) = 1 + 8i$.
- $z \times z' = (3 + 5i) \times (-2 + 3i) = -6 + 9i - 10i + 15i^2 = -6 - i - 15 = -21 - i$.
- $\bar{z} = 3 - 5i, \bar{z}' = -2 - 3i$.
- $\bar{z} + \bar{z}' = (3 - 5i) + (-2 - 3i) = 1 - 8i, \overline{z + z'} = 1 - 8i$.
- $\bar{z} \times \bar{z}' = (3 - 5i) \times (-2 - 3i) = -6 - 9i + 10i + 15i^2 = -6 + i - 15 = -21 + i$.
- $\overline{z \times z'} = -21 + i$.

Définition

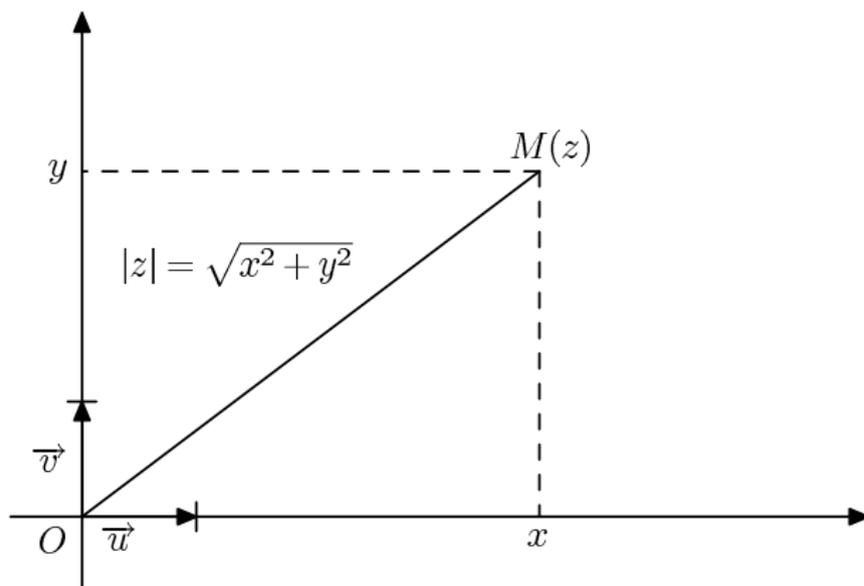
z est un nombre complexe, $z = x + iy$ (x et y réels). Le module de z est le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Interprétation géométrique :

Dans le plan complexe, si M a pour affixe z , alors $OM = |z|$.

Module d'un nombre complexe



Exemple

Calcul du module de nombres complexes :

$$① \quad |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

$$② \quad |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}.$$

$$③ \quad |-5 - 2i| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}.$$

$$④ \quad |-5| = 5.$$

$$⑤ \quad |9i| = \sqrt{0^2 + 9^2} = \sqrt{81} = 9.$$

Exemple

Calcul du module de nombres complexes :

$$① \quad |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

$$② \quad |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}.$$

$$③ \quad |-5 - 2i| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}.$$

$$④ \quad |-5| = 5.$$

$$⑤ \quad |9i| = \sqrt{0^2 + 9^2} = \sqrt{81} = 9.$$

Remarques

① Si z est un nombre réel, le module de z correspond à la valeur absolue de z .

② $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$ car $OM = 0$ équivaut à $O = M$.

③ $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Propriétés du module

Pour tous nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$:

1 $|\bar{z}| = |z|$

2 $|-z| = |z|$

3 $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

4 $|zz'| = |z||z'|$

5 $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$

6 $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$ ($z \neq 0$ si $n \in -\mathbb{N}$)

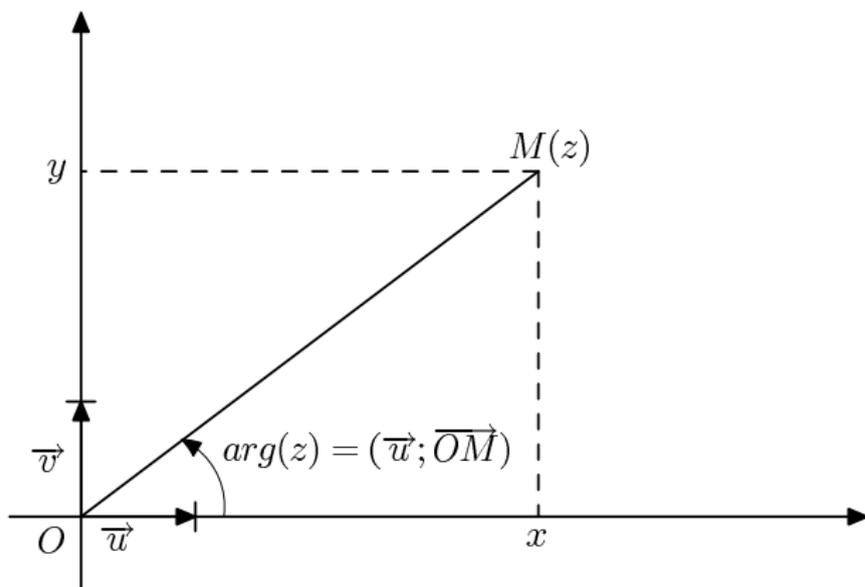
Définition

z est un nombre complexe non nul d'image M , $z = x + iy$ (x et y réels). Une mesure de l'argument de z est un nombre réel noté $\arg(z)$ et défini par $\arg(z) = (\vec{u} ; \overrightarrow{OM}) [2\pi]$.

- On note $\theta = \arg(z)$,

- θ vérifie :
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Argument d'un nombre complexe non nul



Argument d'un nombre complexe non nul

Exemple

Calcul d'un argument de nombres complexes :

$$\bullet z_1 = 2 + 2i : \begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

Argument d'un nombre complexe non nul

Exemple

Calcul d'un argument de nombres complexes :

$$\bullet z_1 = 2 + 2i : \begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}.$$

Argument d'un nombre complexe non nul

Exemple

Calcul d'un argument de nombres complexes :

$$\bullet z_1 = 2 + 2i : \begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\bullet z_2 = 1 + i\sqrt{3} : \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

Argument d'un nombre complexe non nul

Exemple

Calcul d'un argument de nombres complexes :

$$\bullet z_1 = 2 + 2i : \begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(2 + 2i) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\bullet z_2 = 1 + i\sqrt{3} : \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}.$$

Propriétés de l'argument

Pour tout nombre complexe $z \neq 0$:

- 1 $arg(\bar{z}) = -arg(z)$
- 2 $arg(-z) = arg(z) + \pi$
- 3 $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$
- 4 $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$
- 5 $\forall n \in \mathbb{Z}, arg(z^n) = n \times arg(z)$

Exercice

D'après l'exemple précédent, on obtient :

- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$.
- $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = -\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$.
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$.

Écriture trigonométrique

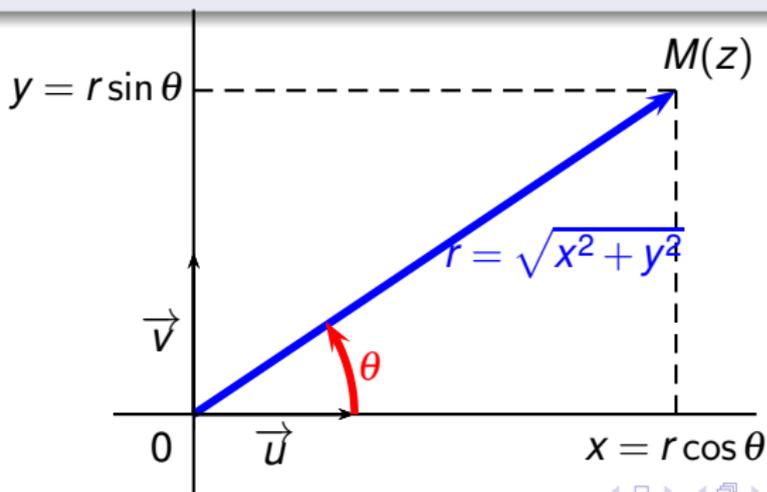
On se place dans un plan muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Définition

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec :

- $\arg(z) = \theta \in \mathbb{R}$ est l'argument de z
- $|z| = r \in \mathbb{R}_*^+$ est le module de z

cette écriture s'appelle la **forme trigonométrique** de z .



Exemple

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :

$$\bullet z_1 = 1 - i : \begin{cases} |1 - i| = \sqrt{2} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt{2} \text{ et}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow 1 - i = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right].$$

$$\bullet z_2 = \sqrt{3} + i : \begin{cases} |\sqrt{3} + i| = 2 \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow r = 2 \text{ et}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sqrt{3} + i = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right].$$

Remarque

Dans certains cas, il est inutile de faire tous les calculs : la forme trigonométrique se "voit" :

- $1 = \cos 0 + i \sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) = 0$.
- $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$.

Définition

Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, de module r et d'argument de mesure θ , on pourra écrire :

$$z = r e^{i\theta}$$

Théorème

- 1 $|e^{i\theta}| = 1$
- 2 $\arg(e^{i\theta}) = \theta$
- 3 $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- 4 $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- 5 $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- 6 $\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Exemple

Différentes écritures des nombres complexes z_1 et z_2 :

Forme algébrique	$1 - i$
Forme trigonométrique	$\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$
Forme exponentielle	$\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Exemple

Différentes écritures des nombres complexes z_1 et z_2 :

Forme algébrique	$\sqrt{3} + i$
Forme trigonométrique	$2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]$
Forme exponentielle	$2 e^{i \frac{\pi}{6}}$

Exemple

Passage de la forme exponentielle à la forme algébrique de $z = 4 e^{i\frac{3\pi}{4}}$:

- $z = 4 \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$
- $z = 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$
- $z = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.

Exemple

Soient $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$:

- $z_1 z_2 = 2 \times 2\sqrt{3} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6})} = 4\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}$.
- $z_2^4 = (2\sqrt{3})^4 e^{i4\frac{\pi}{6}} = 144 e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
- $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\sqrt{3}}{2} e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})} = 2 e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

Théorème

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Un peu d'histoire : Abraham de MOIVRE 1667-1754 est un mathématicien britannique d'origine française.

Théorème

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Un peu d'histoire : Abraham de MOIVRE 1667-1754 est un mathématicien britannique d'origine française.

Exemple

Factorisation de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$:

- On a d'une part : $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$
d'après la formule de MOIVRE, et d'autre part, par développement :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \quad \text{d'où :}$$

Théorème

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Un peu d'histoire : Abraham de MOIVRE 1667-1754 est un mathématicien britannique d'origine française.

Exemple

Factorisation de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$:

- On a d'une part : $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$
d'après la formule de MOIVRE, et d'autre part, par développement :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \quad \text{d'où :}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta.$$

Théorème

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Un peu d'histoire : Leonhard EULER (1717 – 1783) était un mathématicien et physicien suisse.

Théorème

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Un peu d'histoire : Leonhard EULER (1717 – 1783) était un mathématicien et physicien suisse.

Exemple

Linéarisation de $\sin^2 x$:

$$\begin{aligned} \bullet \sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2ix} - 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}}{-4} \\ &= \frac{-2 + e^{2ix} + e^{-2ix}}{-4} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\text{donc : } \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Résolution dans \mathbb{C} d'équations du second degré à coefficients réels

Théorème

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a , b et c réels, $a \neq 0$) admet des solutions dans \mathbb{C} .

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

① Si $\Delta = 0$: une solution réelle égale à $-\frac{b}{2a}$

② Si $\Delta \neq 0$: deux solutions distinctes :

• réelles si $\Delta > 0$: $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;

• complexes conjuguées si $\Delta < 0$:

$$\frac{-b}{2a} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Résolution dans \mathbb{C} d'équations du second degré à coefficients réels

Exemple

Résolution dans \mathbb{C} de $z^2 - 2z + 2 = 0$:

- $\Delta = b^2 - 4ac = -4 = (2i)^2$.
- Le discriminant étant négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

- $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i,$

- $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i.$

Théorème

- On appelle racine carrée dans \mathbb{C} de $Z = A + iB$ tout complexe $z = x + iy$ (x et y réels) tel que $z^2 = Z$.
- Tout complexe non nul $Z = A + iB$ (A et B réels) admet deux racines carrées complexes opposées. On les obtient en résolvant dans \mathbb{R} le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = A \\ x^2 + y^2 = \sqrt{A^2 + B^2} \\ 2xy = B \end{cases}$$

Théorème

- On appelle racine carrée dans \mathbb{C} de $Z = A + iB$ tout complexe $z = x + iy$ (x et y réels) tel que $z^2 = Z$.
- Tout complexe non nul $Z = A + iB$ (A et B réels) admet deux racines carrées complexes opposées. On les obtient en résolvant dans \mathbb{R} le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = A \\ x^2 + y^2 = \sqrt{A^2 + B^2} \\ 2xy = B \end{cases}$$

Exercice

Déterminer les racines carrées de $3 + 4i$.

Théorème

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine $n^{\text{ème}}$ dans \mathbb{C} d'un nombre complexe $Z = |Z| e^{i\theta}$ tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.
- Tout nombre complexe Z non nul admet n racines $n^{\text{èmes}}$ dans \mathbb{C} qui sont données par :

$$z_k = \sqrt[n]{|Z|} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{où } k = 0, 1, \dots, n-1$$

- Tout polynôme de degré n admet n racines complexes (comptées avec leur ordre de multiplicité).
On dit que \mathbb{C} est algébriquement clos.

Théorème

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine $n^{\text{ème}}$ dans \mathbb{C} d'un nombre complexe $Z = |Z| e^{i\theta}$ tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.
- Tout nombre complexe Z non nul admet n racines $n^{\text{èmes}}$ dans \mathbb{C} qui sont données par :

$$z_k = \sqrt[n]{|Z|} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{où } k = 0, 1, \dots, n-1$$

- Tout polynôme de degré n admet n racines complexes (comptées avec leur ordre de multiplicité).
On dit que \mathbb{C} est algébriquement clos.

Exercice

Déterminer les racines cubiques de $2 - 2i$.

Exercice

Déterminer les racines cubiques de $2 - 2i$.

$$|2 - 2i| = 2|1 - i| = 2\sqrt{2} = 2^{3/2}$$

$$2 - 2i = 2^{3/2} e^{-i\pi/4}$$

Les racines cubiques de $2 - 2i$ sont :

$$z_0 = \sqrt{2} e^{-i\pi/12} ; z_1 = \sqrt{2} e^{i7\pi/12} ; z_2 = \sqrt{2} e^{i15\pi/12} = \sqrt{2} e^{i5\pi/4}$$