

CHAPITRE 1 : CALCULS ALGEBRIQUES

I Règles de calcul

1. Exposants.

Par définition, si a est un réel quelconque, et n un entier positif,

$$a^n = a \times a \times \dots \times a \quad n \text{ fois}$$

et si a est différent de 0,

$$a^{-n} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \dots \times \frac{1}{a} \quad n \text{ fois}$$

On définit des exposants non entier par :

$$a^{1/n} = b \text{ tel que } b^n = a \quad (\text{si } a > 0)$$

On note aussi :

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Les règles de calculs suivantes sont valables quels que soient les exposants, à condition que les écritures aient un sens :

$$\begin{aligned} a^x a^y &= a^{x+y} & \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\ (ab)^x &= a^x b^x & \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x} \\ (a^x)^y &= (a^y)^x = a^{xy} \end{aligned}$$

2. Identités remarquables.

Il faut connaître par coeur les égalités suivantes, valables pour tous les réels a et b :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) & (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 & a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

3. Egalités et inégalités.

a. Egalités

- On peut ajouter ou retrancher membre à membre des égalités.
- On peut ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une égalité.
- On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une égalité par un même nombre non nul.

b. Inégalités

- On peut ajouter membre à membre des inégalités de même sens.
- On peut ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité.
- On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement positif sans changer le sens de l'inégalité.
- On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement négatif en changeant le sens de l'inégalité.

II Notion de polynôme.

1. Notion de polynôme.

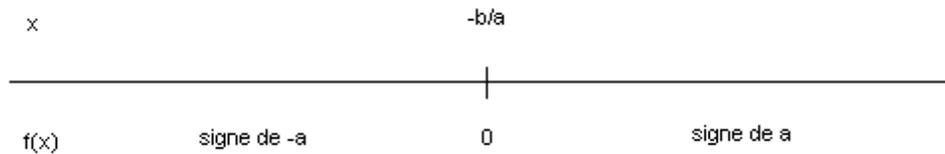
Une fonction polynôme est une fonction qui à un nombre réel x associe un nombre qui se calcule à l'aide de puissances entières positives de x (par exemple $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ est une fonction polynôme, alors que $g(x) = \frac{7}{x^2}$ ou $h(x) = \sqrt{2x+1}$ n'en sont pas).

Si f est une fonction polynôme de x , le plus grand exposant de x qui apparaît dans l'écriture de $f(x)$ s'appelle le degré de f et se note $\deg f$ (dans l'exemple, $\deg f = 3$).

2. Signe du polynôme du premier degré.

On a une fonction polynôme f de x du premier degré, c'est à dire que l'on peut écrire $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$. On a le résultat :

Proposition $f(x)$ s'annule si et seulement si $x = -\frac{b}{a}$ et $f(x)$ est du signe de a si $x > -\frac{b}{a}$ et du signe opposé à celui de a si $x < -\frac{b}{a}$



CHAPITRE 2 : DROITES DU PLAN

I Equations de droites

On rappelle qu'une droite est définie par deux points distincts.

Proposition *Un repère du plan (le plus souvent orthonormé) étant choisi, les droites du plan sont exactement les ensembles qui ont une équation de la forme :*

$$D : ax + by = c \text{ où } a \text{ et } b \text{ ne sont pas simultanément nuls.}$$

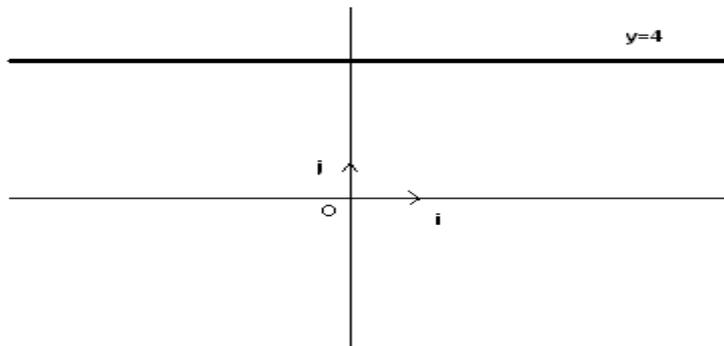
Exemple : $D : 2x - 3y = 6$ (le point de coordonnées $(0, -2)$ appartient à cette droite, mais pas celui de coordonnées $(2, 2)$)

On a trois cas, qui permettent de simplifier cette équation.

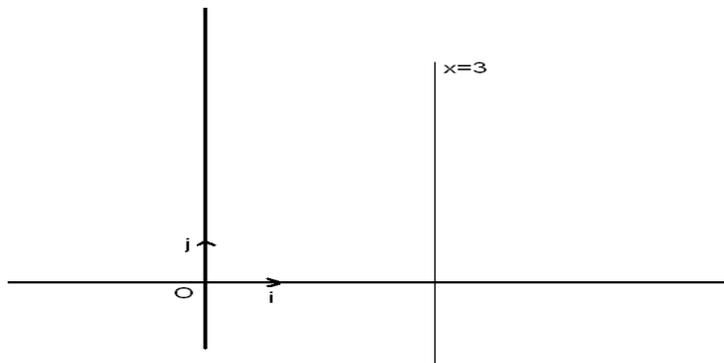
- Si $a = 0, b \neq 0$, l'équation peut s'écrire $y = \frac{c}{b}$ qui est de la forme $y = k$. Ce sont exactement les droites parallèles à l'axe des abscisses.
- Si $a \neq 0, b = 0$, l'équation peut s'écrire $x = \frac{c}{a}$ qui est de la forme $x = k$. Ce sont exactement les droites parallèles à l'axe des ordonnées.
- Si $a \neq 0, b \neq 0$, l'équation peut s'écrire $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ qui est de la forme $y = mx + p$. m s'appelle le coefficient directeur (ou la pente) de la droite, et p son ordonnée à l'origine.

II Représentation graphique

- Si $a = 0$, la droite D a une équation de la forme $y = k$ et D est parallèle à (Ox)

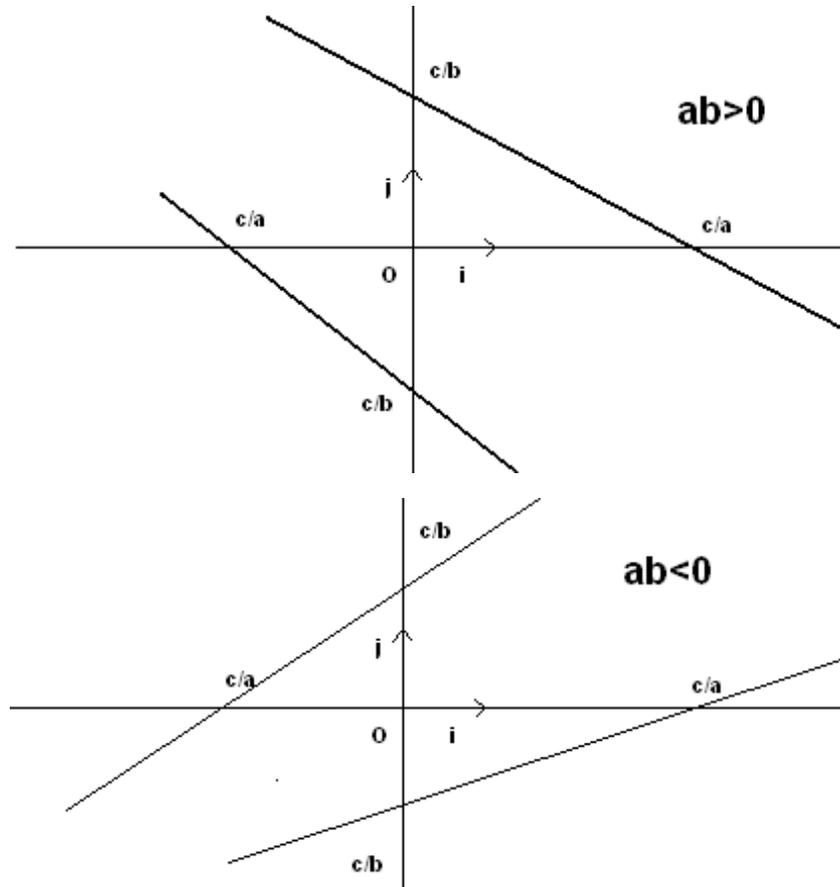


- Si $b = 0$, la droite D a une équation de la forme $x = k$ et D est parallèle à (Oy)



- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on a deux façons :
 - On garde l'équation générale $ax + by = c$ et on cherche les coordonnées des points

d'intersection de D avec les axes. On a $A\begin{pmatrix} c/a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 0 \\ c/b \end{pmatrix}$. Ceci donne deux types de dessin selon que a et b sont de même signe ou de signe contraire.



- Ou bien on met l'équation de D sous forme réduite $D : y = mx + p$, on donne deux valeurs à x , ce qui permet de calculer deux valeurs de y et donc d'avoir les coordonnées de deux points de D .

III Trouver une équation de D .

On a deux points distincts dont on connaît les coordonnées $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.

- Si $x_A = x_B$, la droite D est parallèle à l'axe des ordonnées, et elle a une équation qui est $x = x_A$.
- Si $y_A = y_B$, la droite D est parallèle à l'axe des abscisses, et elle a une équation qui est $y = y_A$.
- Si $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$, on a deux possibilités :
 - On peut chercher une équation de D sous la forme $ax + by = c$. Comme les coordonnées de A et de B vérifient cette équation, a, b, c sont solutions du système :

$$\begin{cases} ax_A + by_A = c \\ ax_B + by_B = c \end{cases}$$

Attention, ce système admet une infinité de solutions, c'est dû au fait qu'une droite a une infinité d'équations générales. (Voir en exercice).

- On peut chercher une équation réduite de D de la forme $y = mx + p$. On peut facilement voir que m est donné par

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

et on calcule p en écrivant par exemple que $y_A = mx_A + p$ (voir les exercices).

IV Droites parallèles et droites perpendiculaires.

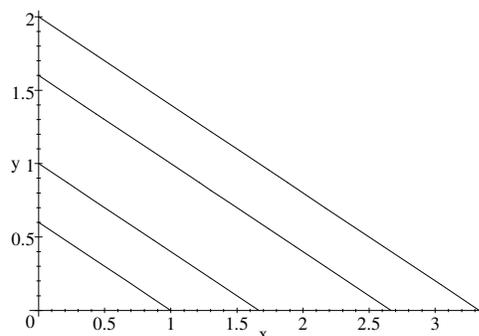
1. Droites parallèles.

Soit D et D' deux droites du plan. Alors :

- Si $D : x = k$ et $D' : x = k'$ les deux droites sont parallèles.
- Si $D : y = k$ et $D' : y = k'$ les deux droites sont parallèles.
- Si $D : ax + by = c$, les droites D' parallèles à D ont nécessairement une équation complète de la forme $D' : ax + by = c'$
- Si $D : y = mx + p$ et $D' : y = m'x + p'$, alors D et D' sont parallèles ssi $m = m'$

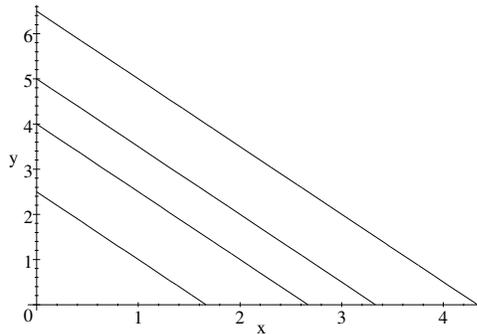
Exemples :

- Droites d'utilité : la consommation d'une quantité x d'un bien A et d'une quantité y d'un bien B procure une utilité (voir cours de micro-économie du second semestre) $u(x,y) = 3x + 5y$. On appelle courbe d'indifférence de niveau k l'ensemble des consommations (x,y) qui donnent la même utilité k . Ces courbes d'indifférence sont donc des droites d'équation $3x + 5y = k$. Elles sont donc parallèles entre elles. Voilà un petit dessin :



(on n'a gardé que les segments correspondants à $x > 0$ et $y > 0$)

- Droites de budget : Le prix unitaire d'un bien A est de 3 euros, et celui d'un bien B est de 2 euros. On appelle droite de budget R l'ensemble des points de coordonnées (x,y) tels qu'une consommation de x unités de A et de y unités de B coûte exactement R euros. Ces droites ont pour équation : $D : 3x + 2y = R$. Il s'agit encore de droites parallèles entre elles. On peut les dessiner :



(droites de budget 5, 8, 10, 13)

2. Droites perpendiculaires (repère orthonormal).

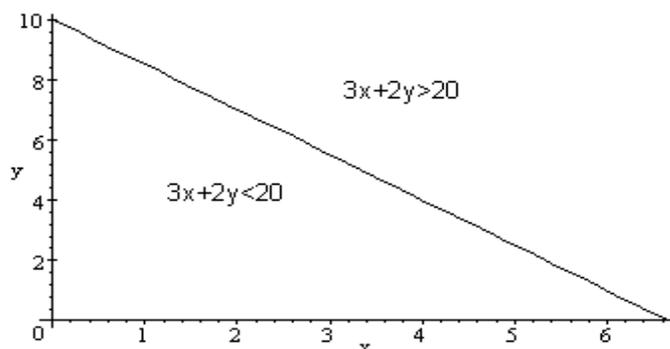
- Si $D : x = k$ alors les droites perpendiculaires à D sont les droites D' d'équation $y = k'$
- Si $D : y = mx + p$ et $D' : y = m'x + p'$, alors D est perpendiculaire à D' si et seulement si $mm' = -1$
- Si $D : ax + by = c$ et $D' : a'x + b'y = c'$, alors D est perpendiculaire à D' si et seulement si $aa' + bb' = 0$

V Séparation.

Tout repose sur la propriété suivante :

Proposition Soit $D : ax + by = c$. Cette droite partage le plan en deux demi-plans : pour tout couple (x, y) coordonnées d'un point situé dans un de ces demi-plans, l'inégalité $ax + by > c$ est vérifiée, alors que c'est l'inégalité contraire qui est vérifiée dans l'autre demi-plan.

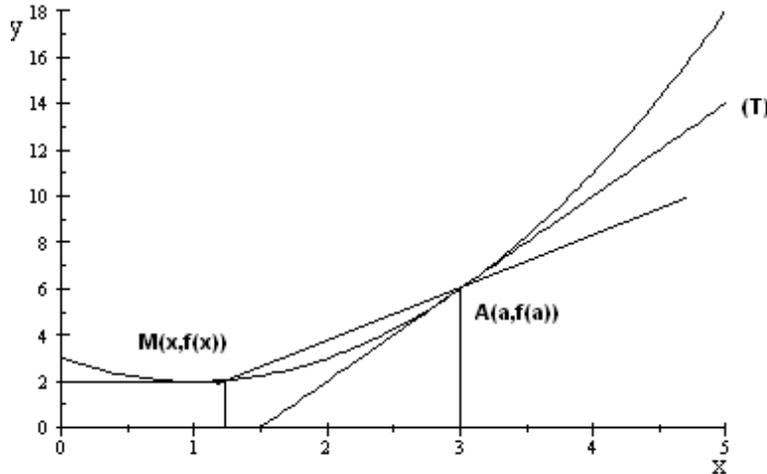
Comme on sait que c'est toujours la même inégalité qui est vérifiée quand on reste dans le même demi-plan, il suffit de choisir (graphiquement) un point dans un demi-plan et de regarder, pour les coordonnées (x, y) de ce point, quelle est l'inégalité vérifiée. On est sûr que cette inégalité sera vérifiée dans tout le demi-plan du point choisi, et que ce sera l'inégalité contraire dans l'autre demi-plan. Prenons la droite de budget $D : 3x + 2y = 20$. On calcule l'expression $3x + 2y$ en $(0, 0)$ où elle vaut évidemment 0, qui est non moins évidemment < 20 . On en déduit le dessin suivant :



CHAPITRE 3 : FONCTIONS D'UNE VARIABLE

I Notion de dérivée

f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (on dit : fonction numérique d'une variable réelle). On appelle C sa courbe représentative dans un repère. A est un point de cette courbe. A a donc pour coordonnées $(a, f(a))$. Si cette courbe est suffisamment régulière (lisse), il y a une droite qui est "la plus proche possible" de C autour de A . On l'appelle la tangente à C au point A .



Cette droite (T) a un coefficient directeur, que l'on appelle le nombre dérivé de f en a et que l'on note $f'(a)$. Cette tangente a donc pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$f'(a)(x - a) + f(a)$ est une valeur approchée de $f(x)$ à condition que x soit proche de a .

Comme cette droite est "proche" de (C) autour de A , on peut s'en servir pour obtenir des valeurs approchées de $f(x)$ si x n'est pas trop loin de a .

Exemple : la quantité produite d'un bien est une fonction Q du capital K donnée par : $Q(K) = 2K^{3/2}$. On veut avoir une valeur approximative de la quantité produite si $K = 1,01$ kiloeuros, si $K = 1,1$ kiloeuros et si $K = 1,5$ kiloeuros.

Les valeurs "exactes" (données par $Q(K) = 2K^{3/2}$) sont respectivement 2,03007 ; 2,3074 et 3,674.

L'équation de la tangente à la courbe (C) au point $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est $y = 3(K - 1) + 2$ ce qui donne

comme valeurs approchées, en remplaçant K successivement par 1,01 ; 1,1 ; 1,5 les valeurs suivantes pour y : 2,03 ; 2,3 ; 3,5. Qu'en pensez-vous ?

On peut voir également graphiquement que $f'(a)$ est une valeur approchée du quotient $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, toujours à condition que x soit proche de a : on dit simplement que le coefficient directeur de la tangente est peu différent du coefficient directeur de la sécante qui passe par $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$

Si on peut faire ça pour tous les points d'un intervalle I par exemple, on définit une nouvelle fonction de I dans \mathbb{R} , que l'on appelle la fonction dérivée de f et que l'on note f' . On a les résultats bien connus qui permettent de calculer les fonctions dérivées.

Proposition Si f et g sont des fonctions dérivables sur un intervalle I , alors :

- $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- af est dérivable sur I et $(af)'(x) = af'(x)$
- fg est dérivable sur I et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$

Si on rajoute à cette proposition les dérivées des fonctions usuelles, on est prêt à dériver à peu

près n'importe quoi. On a :

f	f'	D
k constante	0	\mathbb{R}
x	1	\mathbb{R}
$x^n, n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\mathbb{R}_+^*
x^n, n quelconque	nx^{n-1}	\mathbb{R}_+^*
u^n, n quelconque	$nu' u^{n-1}$	selon u

Application : la notion de coût marginal.

On suppose que le coût de production d'un bien est une fonction de la quantité q produite : $C(q)$. Le coût marginal $C_m(q)$ pour une quantité q est le coût supplémentaire pour produire une unité de plus. Autrement dit $C_m(q) = C(q + 1) - C(q)$ que l'on peut écrire

$$C_m(q) = \frac{C(q + 1) - C(q)}{(q + 1) - q} = \frac{\Delta C}{\Delta q}$$

$C_m(q)$ est donc peu différent de $C'(q)$ et d'autant plus que q est grand. On prendra comme définition :

$$C_m(q) = C'(q)$$

II Quelques compléments

- Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I , on peut construire sa fonction dérivée f' . Si f' est à son tour dérivable sur I , on peut construire sa fonction dérivée, que l'on appelle la dérivée seconde de f et que l'on note f'' . Par exemple, si $f(x) = x^3$, on a, pour tout $x > 0$ $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$. On peut continuer ainsi et définir les dérivées troisième, quatrième, etc...
- Une valeur de x pour laquelle f' s'annule s'appelle un point critique ou un point stationnaire de f .
- Une valeur de x pour laquelle f'' s'annule et change de signe s'appelle un point d'inflexion pour f .

CHAPITRE 4 : Fonctions de deux variables

En économie on a souvent deux variables à partir desquelles on calcule, quand cela est possible, une fonction de ces deux variables: par exemple la fonction de production d'un bien est souvent une fonction du capital et du travail (la quantité produite par une usine est fonction de la somme investie et du nombre d'heures travaillées) ..

On va donc s'intéresser à des fonctions du type $(x,y) \rightarrow f(x,y)$ et en économie on se placera dans le cas où x et y sont des réels positifs.

Généralités

● Ensemble de définition de f

C'est l'ensemble noté D_f des couples (x,y) pour lesquels on peut calculer $f(x,y)$ et c'est donc une partie de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

exemples:

● $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^3$ l'ensemble de définition de f est $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

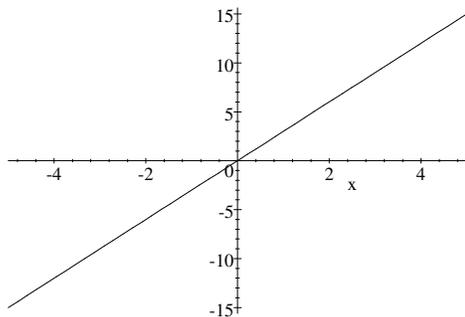
- $g(x,y) = 2\sqrt{x} + \sqrt{y}$ l'ensemble de définition de g est $\{(x,y) / x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\} = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$

- $h(x,y) = 10x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{4}}$ l'ensemble de définition de h est $\{(x,y) / x \text{ quelconque et } y > 0\} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{+*}$

- $k(x,y) = \sqrt{3x^2 - xy}$ l'ensemble de définition de k est $\{(x,y) / 3x^2 - xy \geq 0\} = \{(x,y) / x(3x - y) \geq 0\}$

$D_k = \{(x,y) / x \geq 0 \text{ et } 3x - y \geq 0\} \cup \{(x,y) / x \leq 0 \text{ et } 3x - y \leq 0\}$

Pour représenter cet ensemble de définition on se place dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) et on trace la droite d'équation $y=3x$

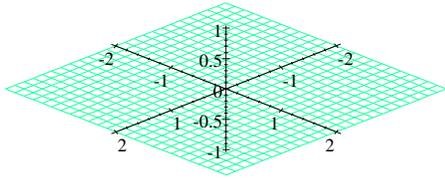


Indiquer les points dont les coordonnées (x,y) appartiennent à D_k

● Représentation graphique d'une fonction de deux variables

On cherche à représenter les points qui ont pour coordonnées x, y et $f(x,y)$: c'est donc un ensemble de points à représenter dans un espace de dimension 3; aussi on considère un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ qui permet de caractériser un point de l'espace par ses trois coordonnées:

x abscisse y ordonnée et z cote avec $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

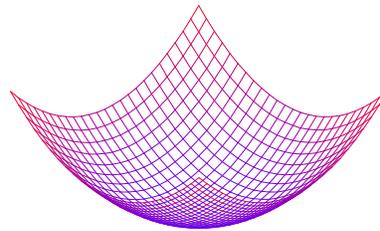
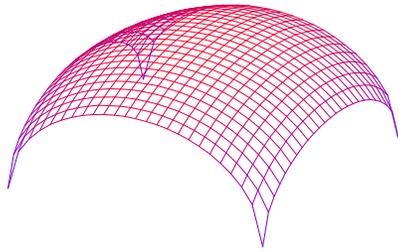


L'ensemble des points M de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ est la représentation graphique de f ou surface représentative de f notée S_f dans le repère

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

M de coordonnées (x, y, z) appartient à S_f si et seulement si (x, y) appartient à D_f et $z = f(x, y)$

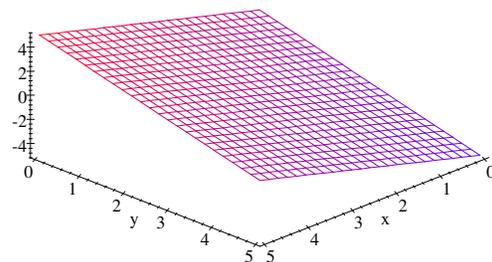
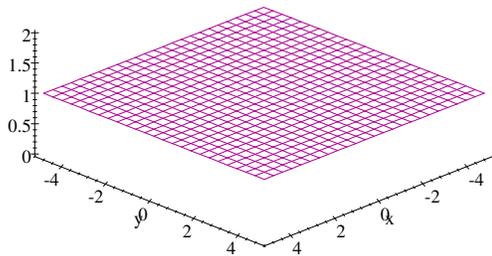
exemples: $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ et $g(x, y) = x^2 + y^2$



● Cas particuliers des fonctions affines

$z = ax + by + c$ où a, b et c sont des constantes ; la surface représentative est un plan

exemples: $z = 1$ et $z = x - y$



● Fonctions partielles associées à $(x, y) \rightarrow f(x, y)$

On peut fixer l'une des deux variables et considérer la fonction f comme fonction de l'autre variable :

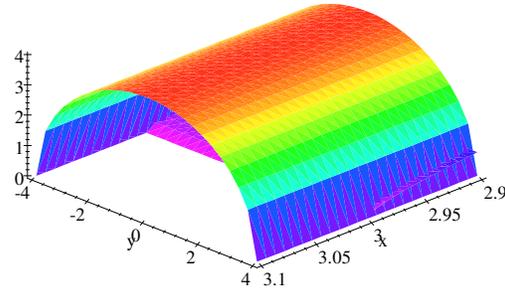
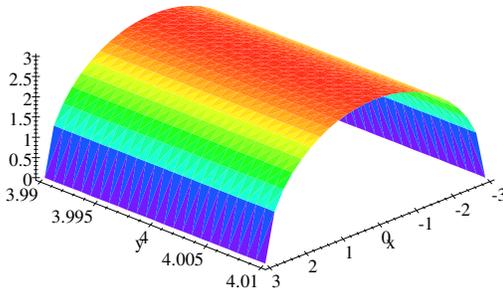
y fixé (y est alors une constante) on étudie $x \rightarrow f(x, y)$; pour $y = \tilde{y}$ les points de coordonnées $(x,$

$(\tilde{y}, f(x, \tilde{y}))$) sont les points d'intersection de la surface S_f et du plan d'équation $y = \tilde{y}$ parallèle au plan xOz

x fixé (x est alors une constante) on étudie $y \rightarrow f(x, y)$; pour $x = \tilde{x}$ les points de coordonnées $(\tilde{x}, y, f(\tilde{x}, y))$ sont les points d'intersection de la surface S_f et du plan d'équation $x = \tilde{x}$ parallèle au plan yOz

$$z = f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

1. avec $y = 4$ donne $z = \sqrt{9 - x^2}$ avec $x = 3$ donne $z = \sqrt{16 - y^2}$



● Courbes de niveau

On cherche les couples (x, y) de D_f permettant d'obtenir un niveau k pour la fonction f étudiée; c'est la courbe de niveau k et la représentation graphique (ensemble des points de coordonnées $(x, y, f(x, y) = k)$) est l'intersection de S_f avec le plan parallèle au plan xOy d'équation $z = k$.

1. exemple: le niveau 0 de $z = f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$ dans le plan xOy d'équation $z = 0$;

de même le niveau 4 de $z = f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ est le cercle d'équation $16 = 25 - x^2 - y^2$ ou $x^2 + y^2 = 9$ dans le plan d'équation $z = 4$

Pour un niveau de la fonction de production on parle d'isoquante; pour un niveau de la fonction coût on parle d'isocôut .

Dérivées partielles

● Définitions

Si la fonction partielle $x \rightarrow f(x, y)$ est dérivable on note $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ sa fonction dérivée en (x, y) qui est appelée dérivée partielle de f en x pour (x, y) ou $f'_x(x, y)$ ou en économie fonction marginale par rapport à la première variable x notée $f_{m_x}(x, y)$;

1. si la fonction partielle $y \rightarrow f(x, y)$ est dérivable on note $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sa fonction dérivée en (x, y) qui est appelée dérivée partielle de f en y pour (x, y)

ou $f'_y(x, y)$ ou en économie fonction marginale par rapport à la deuxième variable y notée $f_{m_y}(x, y)$.

Exemples $\diamond f(x, y) = 2x^2y + 3xy + x - y + 5$ admet des dérivées partielles en x et en y pour tout (x, y) données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4xy + 3y + 1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 + 3x - 1$$

1. $\diamond g(x, y) = \sqrt{xy} + 3x + 4y + 5$ avec x et y positifs $g(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + 3x + 4y + 5$

g admet des dérivées partielles en x et en y pour tout (x, y) de $\mathbf{R}^{++} \times \mathbf{R}^{++}$ données par $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3$; $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} + 4$

◇ La fonction de production d'une entreprise

est $Q = Q(K, L) = 5KL - K^2 - 3L^2$; avec K nombre d'unités de capital utilisées et L nombre d'unités de travail employées pour le nombre Q d'unités produites La productivité marginale du travail est $PmL = 5K - 6L$ et la productivité marginale du capital est $PmK = 5L - 2K$

- Utilisation pour le calcul de valeurs approchées : on se trouve pour x proche de x_0 ou pour y proche de y_0 ;

on calcule le niveau de f pour $(x_0; y_0)$ et si on connaît $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

on peut en déduire que pour x proche de x_0 par exemple $x = x_0 + h$ et y_0 inchangé alors

$$f(x_0 + h, y_0) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times h$$

1. on peut en déduire que pour y proche de y_0 par exemple $y = y_0 + k$ et x_0 inchangé alors

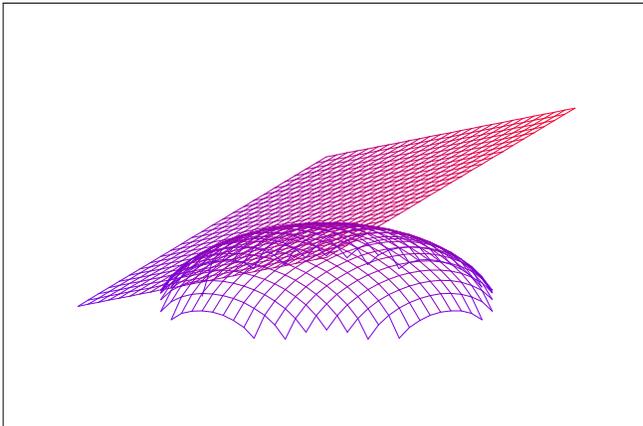
$$f(x_0, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times k$$

on peut en déduire que pour (x, y) proche de (x_0, y_0) par exemple $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$

$$\text{alors } f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times k$$

- Plan tangent en un point M_0 de la surface représentative de f :

Si la fonction f est définie et admet des dérivées partielles en $(x_0; y_0)$ alors il existe un plan tangent en M_0 point de coordonnées $(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ à la surface représentative S_f de f ; c'est le plan d'équation $z = f(x_0; y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0)$



Taux marginal de substitution technique

- Exemple introductif La fonction de production d'une entreprise est donnée par $Q = Q(L, K) = 5KL - K^2 - 3L^2$ Le niveau de production obtenu pour $L = 100$ et pour $K = 200$ est $Q(100, 200) = 100000 - 40000 - 30000 = 30000$
Si on diminue le niveau de travail de 100 à 99 ($\Delta L = -1$) de combien doit-on faire varier le capital pour maintenir un niveau de production égal à 30000? On peut faire le calcul exact et chercher la valeur de K solution de $Q(99, K) = 30000$ et proche de 200 ; on doit donc résoudre l'équation

$5 \times 99K - K^2 - 3 \times 99^2 = 30000$ ou encore $K^2 - 495K + 30000 + 29403 = 0$ soit $K^2 - 495K + 59403 = 0$ de discriminant 7413 ;les racines sont en valeur arrondie 290,55 et 204,45 et la solution proche de 200 est 204,45. Il faut donc compenser la perte d'une unité de travail par l'augmentation de 4,45 unités de capital ($\Delta K = 4,45$) pour conserver le même niveau de production qu'avec 100 unités de travail et 200 unités de capital.

On va construire une approximation de ce calcul exact grâce aux dérivées partielles ou fonctions marginales.

- Soit un couple de valeurs (x, y) appartenant à la courbe de niveau k de f c'est à dire $f(x, y) = k$;on fait varier x de x à $x + \Delta x$ et on cherche la variation à imposer alors à y (y passe de y à $y + \Delta y$) pour que le couple $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ soit aussi sur la courbe de niveau k ; on a donc :

$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) = k$ et pour $(\Delta x, \Delta y)$ "faible" on peut utiliser la valeur approchée de $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ donnée par les dérivées partielles en (x, y) et écrire $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \times \Delta y$ ce qui impose la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \times \Delta y = 0 \text{ ou } -\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = \frac{fm_x(x, y)}{fm_y(x, y)}$$

cette expression s'appelle le taux marginal de substitution technique de x en y et est notée $TMST_{x,y}$;elle est positive si les fonctions marginales en (x, y) sont positives et dans ce cas Δx et Δy sont de signe contraire.

Retenir
$$TMST_{x,y} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{fm_x(x, y)}{fm_y(x, y)}$$

Retour à l'exemple: le taux marginal de substitution de L en K est $TMST_{L,K} = -\frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{PmL}{PmK} = \frac{5K - 6L}{5L - 2K}$ et donc pour $L=100$ et $K=200$ ce taux marginal de substitution de L en K est égal à $\frac{5 \times 200 - 6 \times 100}{5 \times 100 - 2 \times 200} = \frac{400}{100} = 4$ ce qui signifie que si on baisse L de 100 à 99 il faut augmenter K de 200 à $200+4=204$ qui est une valeur approchée de 204,45 et si on calcule

$Q(99, 204) = 5 \times 204 \times 99 - 204^2 - 3 \times 99^2 = 29961$ le niveau 30000 est approximativement maintenu (erreur de 39/30000) (pour 204,45 le calcul donne $Q(99, 204,45) = 5 \times 204,45 \times 99 - 204,45^2 - 3 \times 99^2 = 29999,95$). L'avantage est que ce calcul est valable aussi pour L passant de 100 à 101 et donc K doit passer de 200 à 196 de même pour d'autres variations faibles de L autour de 100 induisant des variations de K autour de 200 pour rester au même niveau de production.

CHAPITRE 5 : Elasticités. Fonctions homogènes.

I Quelques rappels

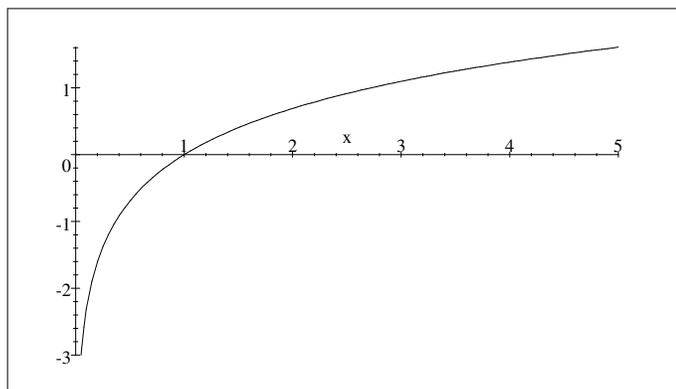
1. Fonction logarithme népérien.

On admet qu'il existe une fonction, définie seulement sur \mathbb{R}_+^* , que l'on appelle la fonction logarithme népérien, que l'on note \ln , et qui possède les propriétés suivantes :

- \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour tous réels strictement positifs a et b .

Les conséquences sont les suivantes :

- \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , sa limite en 0 est $-\infty$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ pour tous réels strictement positifs a et b
- $\ln(a^b) = b \ln(a)$
- Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors $\ln(u)$ est dérivable sur I et
$$(\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$
- Il est bon de mémoriser la courbe représentative de la fonction \ln :



Comme on le constate, il s'agit d'une fonction à croissance très lente. On précisera cela dans le paragraphe 5.

2. Fonction logarithme décimal

On définit la fonction logarithme décimal, que l'on note \log , par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \quad \text{pour tout } x > 0$$

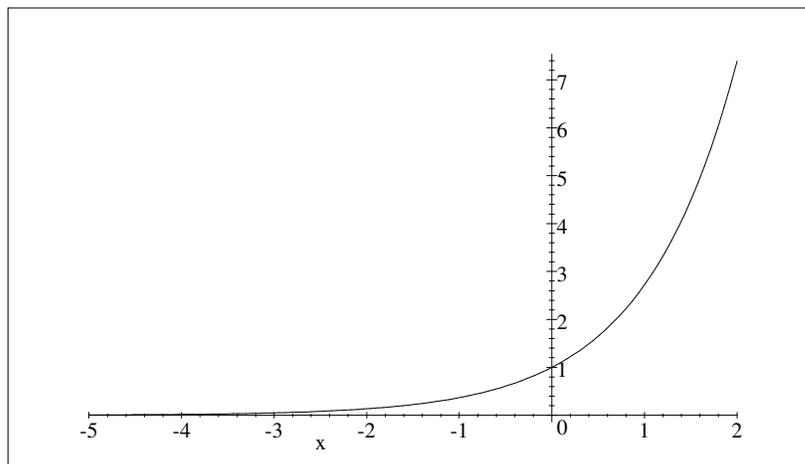
Comme $\ln 10 > 0$, les propriétés de la fonction \log sont les mêmes que celles de la fonction \ln (attention quand même à $(\log)'(x) = \frac{1}{\ln 10} \frac{1}{x}$). On utilise la fonction \log pour les calculs numériques à cause de sa propriété (démontrez-là, c'est un petit exercice) : $\log(10^n) = n$ pour tout exposant n

3. Fonction exponentielle.

Il s'agit de la fonction réciproque (les économistes disent inverse, mais nous continuerons avec réciproque) de la fonction logarithme népérien. On la note $x \rightarrow e^x$ ou $x \rightarrow \exp(x)$. Elle est définie sur \mathbb{R} tout entier. Les propriétés sont les suivantes :

- pour tout $x > 0$ et tout y réel, $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$

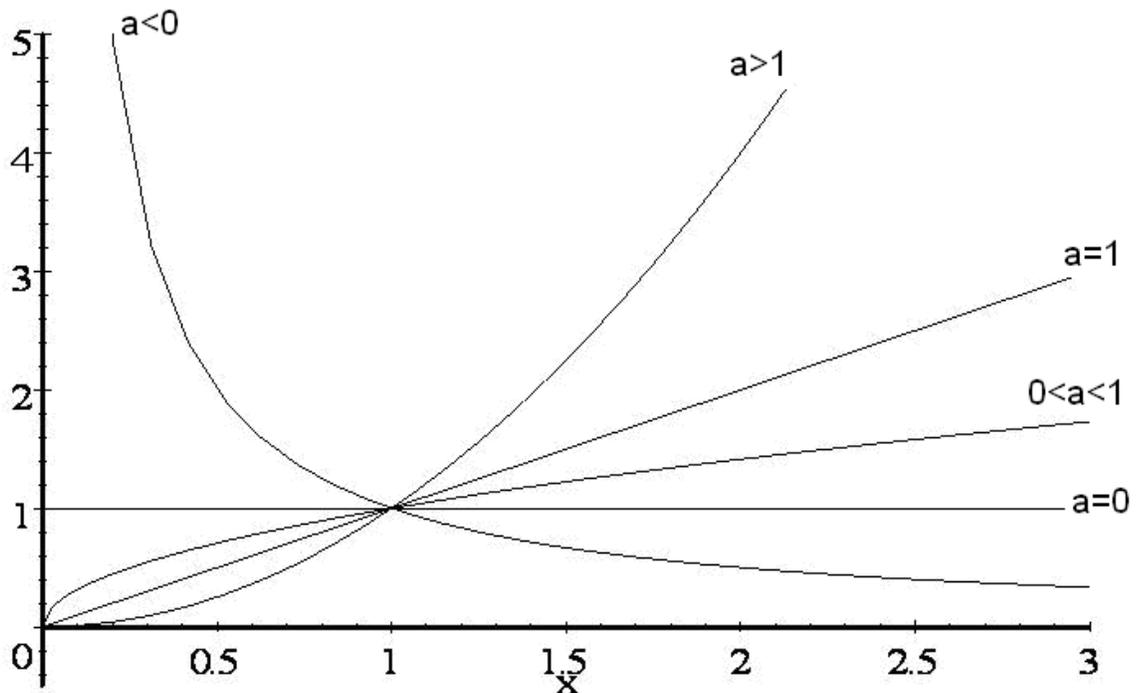
- pour tout $x > 0$, $\exp(\ln x) = x$ et pour tout x réel, $\ln(\exp x) = x$
- $e^0 = 1$ et $e^x > 0$ pour tout x réel
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$, $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ et $(e^x)^y = e^{xy}$ pour tout x et tout y réels.
- la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et $(\exp)'(x) = \exp(x)$
- si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , la fonction $x \rightarrow \exp(u(x))$ est dérivable sur I et a pour dérivée $x \rightarrow u'(x) \exp(u(x))$
- la courbe représentative de cette fonction est :



C'est une fonction à croissance très rapide, et elle tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

4. Les fonctions puissances.

On définit, pour tout réel a la fonction "puissance a ". C'est une fonction, notée f_a , définie sur \mathbb{R}_+^* par : $f_a(x) = x^a = e^{a \ln x}$. Les opérations habituelles sur les exposants demeurent valides. On a par exemple : $f_a'(x) = ax^{a-1}$. Les courbes représentatives sont celles-ci :



5. La croissance comparée

On a trois types de fonctions qui tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$: la fonction \ln , la fonction \exp et la fonction puissance a si $a > 0$. On montre que la fonction exponentielle l'emporte sur n'importe quelle fonction puissance, qui elle même l'emporte sur la fonction logarithme. Plus précisément :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{\ln x} = +\infty$$

II Elasticité d'une fonction d'une variable.

On appelle variation relative de la variable x entre la valeur initiale x_i et la valeur finale x_f le rapport noté $\frac{\Delta x}{x} = \frac{x_f - x_i}{x_i}$

Ainsi lorsque le prix d'une baguette passe de 0.6 à 0.75 il y a une augmentation de $\frac{0.15}{0.6} = 25\%$

Ici x désigne une variable strictement positive (prix, montant du revenu, quantité de travail ou de capital..).

Definition On appelle élasticité de y par rapport à x le rapport entre la variation relative de y et la variation relative de x c'est à

$$\text{dire } e_{y/x} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{x}{y} = x \frac{\Delta y}{y \Delta x} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\Delta y}{y} = e_{y/x} \times \frac{\Delta x}{x}$$

Cette notion est surtout utilisée pour des variations relatives faibles de x et donc si y

est fonction de x ($y = f(x)$) le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ peut être approché par la dérivée de f en x ou fonction marginale f_m en x .

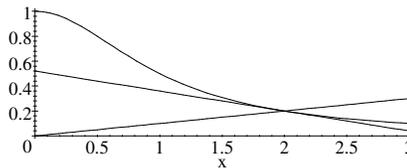
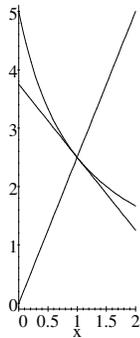
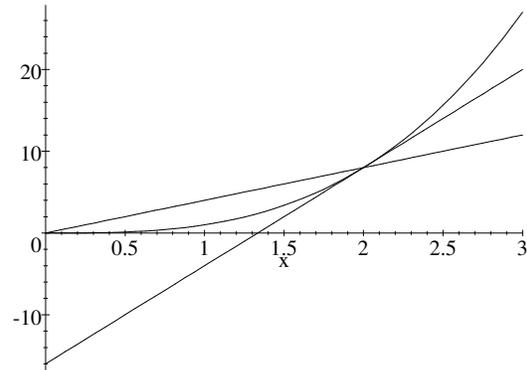
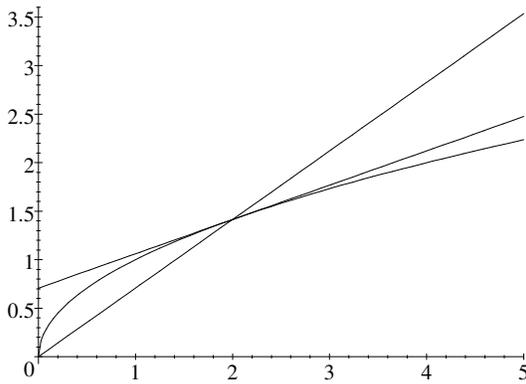
On peut interpréter l'élasticité de $y = f(x)$ par rapport à x comme le quotient de la fonction marginale par la fonction moyenne

$$e_{y/x} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\frac{y}{x}} = \frac{f_m(x)}{\frac{f(x)}{x}}$$

ou graphiquement comme le quotient de la pente de la tangente à la courbe représentative de f en M point de coordonnées $(x, y=f(x))$ par la pente de la droite OM (O origine du repère)

exercice :

dans les représentations graphiques ci dessous indiquer si l'élasticité de y par rapport à x est plus grande ou plus petite que 1 ou que -1 dans le cas où elle est négative



Cette notion est un calcul approché (pour une valeur de x), indépendant des unités choisies pour x comme pour y et donc si on multiplie x ou y par une constante non nulle l'élasticité de y par rapport à x est inchangée; en particulier f et $-f$ ont la même élasticité. Dans la suite on se place dans le cas où f est à valeurs positives.

Applications économiques:

–On étudie l'élasticité de la consommation d'un bien par rapport au revenu : elle est positive et plus petite que 1 dans le cas où la hausse relative d'achat de ce bien est

moins importante que la hausse relative du revenu (bien inférieur)
 ou plus grande que 1 dans le cas où la hausse relative d'achat de ce bien est plus importante que la hausse relative du revenu (bien de luxe ou loisir..)

– Dans le cas de la demande d'un bien en fonction du prix l'élasticité demande/prix est généralement négative (excepté biens Giffen) alors que l'élasticité de l'offre par rapport au prix est elle positive.

Proposition L'élasticité du produit de deux fonctions est la somme des élasticité de ces fonctions et l'élasticité du quotient de deux fonctions est la différence des élasticité de ces fonctions

$$e_{f \times g / x} = e_{f/x} + e_{g/x} \quad \text{et} \quad e_{(f/g)/x} = e_{f/x} - e_{g/x}$$

en effet on peut aussi écrire $e_{y/x} = x \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = x \frac{f'(x)}{f(x)} = x [\ln(f(x))]'$ d'où le résultat ci dessus puisque le logarithme du produit est la somme des logarihmes et que la dérivée de la somme est la somme des dérivées....

exercice:

$$e_{\left(\frac{2x+4}{x+3}\right)/x} = x \times \frac{2}{(2x+4)} - x \times \frac{1}{(x+3)} = x \left[\frac{2}{(2x+4)} - \frac{1}{(x+3)} \right] = x \frac{2}{(2x+4)(x+3)}$$

Proposition L'élasticité d'une fonction puissance est constante et cela caractérise les fonctions dont l'élasticité est constante pour toute valeur de la variable x

$$y=f(x)=kx^a \text{ avec } k \text{ non nul} \Leftrightarrow e_{y/x} = a \text{ pour tout } x (x > 0)$$

Proposition $z = g(y)$ et $y = f(x)$ alors $e_{z/x} = e_{z/y} \times e_{y/x}$;

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ alors } e_{y/x} = \frac{1}{e_{x/y}} \quad (f^{-1} \text{ fonction réciproque de } f)$$

exercices

1 – l'aire d'un disque augmente de 2 % si le rayon du disque augmente de 1%. puisqu'elle est proportionnelle au carré du disque.

2 – calcul de l'élasticité de y par rapport à x avec $y = 5(2x+4)^{\frac{3}{4}}$ y a même élasticité que $(2x+4)^{\frac{3}{4}}$ et on a le cheminement

$$x \rightarrow (2x+4) \rightarrow (2x+4)^{\frac{3}{4}} \text{ donc } e_{y/x} = \frac{3}{4} e_{(2x+4)/x} = \frac{3}{4} \frac{2x}{(2x+4)} = \frac{3x}{2(2x+4)}$$

III Cas des fonctions de deux variables.

Variation relative pour une fonction de deux variables Si on connaît les variations relatives de

chacune des variables x et y on peut se demander quelle variation relative il en résulte pour f(x,y)

Puisque $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \times \Delta y$ on en déduit

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{f(x, y)} \approx \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \times \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \times \Delta y}{f(x, y)}$$

$$\text{ou } \frac{\Delta f}{f} \approx \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{f(x, y)} \Delta x + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{f(x, y)} \Delta y \text{ ou } \frac{\Delta f}{f} \approx x \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{f(x, y)} \frac{\Delta x}{x} + y \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{f(x, y)} \frac{\Delta y}{y}$$

ou encore en définissant les élasticité partielles de f par rapport à x et par rapport à y comme

$$x \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{f(x, y)} \text{ notée } e_{fx} \text{ et } y \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{f(x, y)} \text{ notée } e_{fy}$$

$$\text{on peut en déduire } \boxed{\frac{\Delta f}{f} \approx e_{fx} \frac{\Delta x}{x} + e_{fy} \frac{\Delta y}{y}}$$

IV Fonctions homogènes

- **Définition:** une fonction définie sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ est homogène de degré r si pour tout (x,y) de $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ et si pour tout réel k strictement positif on a l'égalité $f(kx, ky) = k^r f(x, y)$

exemples : $f(x, y) = \frac{x}{y}$ homogène de degré 0 ; $g(x, y) = 2x + 3y$ homogène de degré 1;

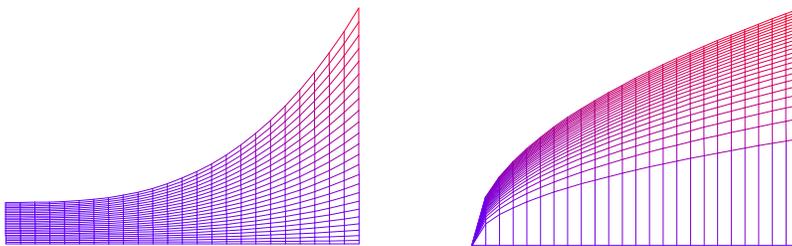
$h(x, y) = 4x^3y^{-2}$ homogène de degré 1

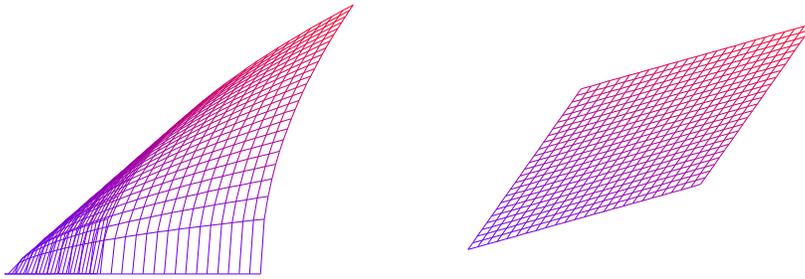
$k(x, y) = x^5y^{-3} + 2x^2 - y^2 + 4xy$ homogène de degré 2 $l(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ non homogène

- **Conséquence :** pour f homogène de degré r à valeurs positives et pour un réel k supérieur à 1 alors
 - si $r > 1$ $k^r > k$ et $f(kx, ky) > k f(x, y)$ on dit que f est à rendements d'échelle croissants
 - si $r < 1$ $k^r < k$ et $f(kx, ky) < k f(x, y)$ on dit que f est à rendements d'échelle décroissants
 - si $r = 1$ $k^r = k$ et $f(kx, ky) = k f(x, y)$ on dit que f est à rendements d'échelle constants

Par exemple, pour une fonction de production homogène, si on double les inputs (k=2) le niveau de production est plus que doublé si la fonction est à rendements d'échelle croissants ($r > 1$), moins que doublé si elle est à rendements d'échelle décroissants ($r < 1$) et exactement doublé si elle est à rendements d'échelle constants ($r = 1$).

Graphiques pour f(x, y) égal à $x^3y^{1.5}$ puis $x^{0.5}y^{0.25}$ puis $x^{0.5}y^{0.5}$ puis $2x + 3y$





- relation d'Euler: pour f définie sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ et homogène de degré r on a la relation :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = r f(x, y) \quad \text{ou} \quad \frac{x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{f(x, y)} + \frac{y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{f(x, y)} = r$$

cette égalité peut s'interpréter : si f homogène de degré r alors la somme des élasticité de f par rapport à x et de f par rapport à y est constante égale au degré d'homogénéité r de f . c'est -à dire

$e_{fx} + e_{fy} = r$ Pour une fonction f homogène de degré r on peut affirmer que si chacune des variables subit une même variation de 1 % alors la fonction f varie de r % puisque

$$\frac{\Delta f}{f} \approx e_{fx} \frac{\Delta x}{x} + e_{fy} \frac{\Delta y}{y} \quad \text{avec} \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y} \quad \text{alors} \quad \frac{\Delta f}{f} \approx (e_{fx} + e_{fy}) \times \frac{\Delta x}{x} \quad \text{et donc} \quad \frac{\Delta f}{f} \approx r \times \frac{\Delta x}{x}$$

Fonctions de Cobb-Douglas ce sont les fonctions du type $f(x, y) = Ax^a y^b$ f est homogène de degré $a + b$

(a est l'élasticité partielle de f par rapport à x et b l'élasticité de f par rapport à y).

CHAPITRE 6 : Optimisation des fonctions d'une variable réelle.

Le but de ce chapitre est de voir si une fonction d'une variable admet un maximum ou un minimum sur un intervalle. On dit qu'on cherche à l'optimiser sur cet intervalle. On a besoin de préciser le vocabulaire.

I Variations

On rappelle le résultat bien connu :

Proposition Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I , alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I , alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) = 0$ pour tout x de I , alors f est constante sur I .

On a même un résultat un peu plus précis :

Proposition Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) > 0$ pour tout x de I , sauf peut-être en un nombre fini de points de I où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f'(x) < 0$ pour tout x de I , sauf peut-être en un nombre fini de points de I où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

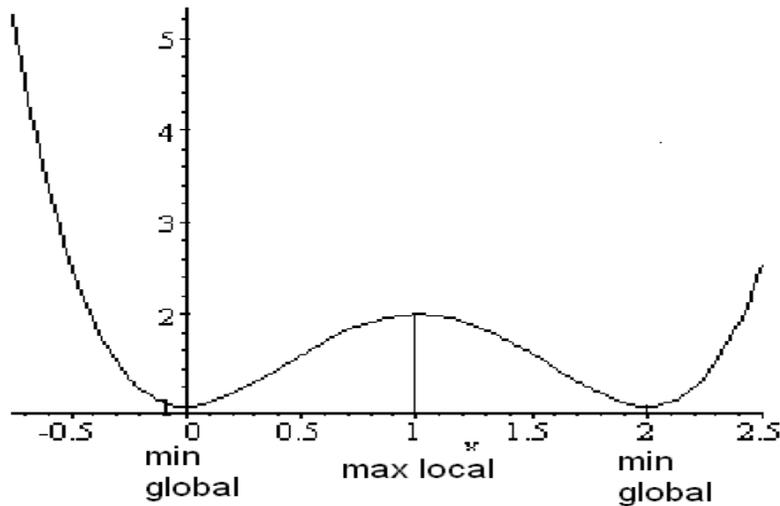
On résume les variations de f par un tableau de variations.

II Maximum et minimum.

1. Définitions

Définition Soit f définie sur un intervalle I et a un point de I .

- On dit que f admet en a un maximum global sur I si $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de I . $f(a)$ est la valeur de ce maximum.
- On dit que f admet en a un minimum global sur I si $f(x) \geq f(a)$ pour tout x de I . $f(a)$ est la valeur de ce minimum.
- On dit que f admet en a un maximum local sur I si $f(x) \leq f(a)$ pour x dans I et suffisamment proche de a .
- On dit que f admet en a un minimum local sur I si $f(x) \geq f(a)$ pour x dans I et suffisamment proche de a .



Un extremum est soit un maximum, soit un minimum. Un extremum global est a fortiori un extremum local. Le théorème qui suit assure l'existence (mais ne dit rien sur leur valeur) d'extremums.

Proposition Soit f une fonction dérivable sur un intervalle fermé (borné). Alors f admet un maximum et un minimum global sur cet intervalle.

2. Conditions du premier ordre.

Proposition Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et si f admet en un point a de I un extremum, alors nécessairement $f'(a) = 0$

Remarques :

- Si $f'(a) = 0$ pour un point a de I ouvert, f ne présente pas forcément d'extremum en a . On dit que a est un point critique (ou stationnaire) pour f . Ce que dit la proposition, c'est que sur un intervalle ouvert I , les extremums sont à rechercher parmi les points critiques.
- Si on doit optimiser f sur $[a, b]$ fermé, on optimise sur $]a, b[$ ouvert, et on regarde ensuite ce qui se passe en a et en b .

3. Conditions du second ordre.

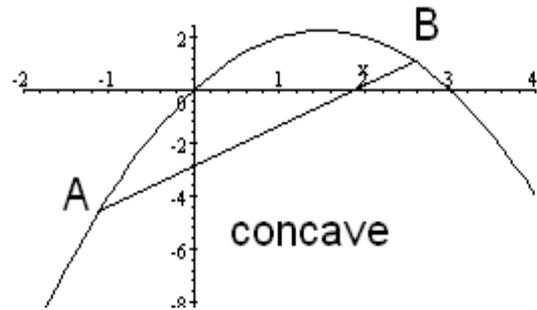
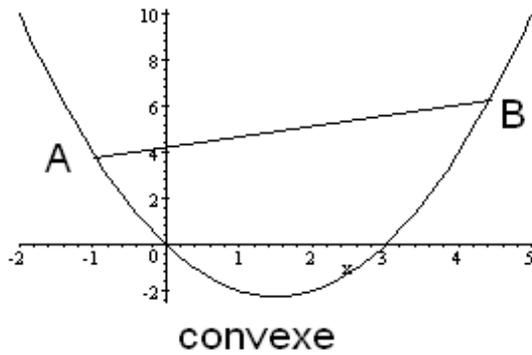
Proposition Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et a un point critique de f (i.e. $f'(a) = 0$). Alors :

- Si $f''(a) > 0$, f présente en a un minimum local.
- Si $f''(a) < 0$, f présente en a un maximum local.
- Si $f''(a) = 0$, on ne peut rien dire.

III Concavité. Convexité

Definition On dit qu'une fonction f est concave sur un intervalle I si pour tous points A et B de la courbe représentant f , l'arc de courbe est situé au dessus du segment $[AB]$

On dit qu'une fonction f est convexe sur un intervalle I si pour tous points A et B de la courbe représentant f , l'arc de courbe est situé au dessous du segment $[AB]$



On a des propriétés qui permettent de reconnaître si une fonction est concave ou convexe sur un intervalle (naturellement, elle peut n'être ni l'un, ni l'autre).

Proposition Soit une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I . Alors f est concave sur I si et seulement si :

$$\forall x \in I, \forall a \in I, f(x) - f(a) \leq f'(x)(x - a)$$

ce qui signifie que la courbe est toujours située sous sa tangente.

On a la même caractérisation pour les fonctions convexes en renversant l'inégalité (la courbe est alors située au dessus de sa tangente).

Proposition Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I . Alors :

- f est concave sur $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$
- f est convexe sur $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

Une fonction deux fois dérivable sur I est donc concave sur I ssi sa dérivée première est décroissante sur I .

Exemples : la fonction \ln est concave sur \mathbb{R}_*^+ et la fonction \exp est convexe sur \mathbb{R} . Pourquoi ? Vous pouvez, à titre d'exercice, étudier la concavité des fonctions x^a selon les valeurs de a .

L'intérêt des fonctions concaves ou convexes dans les problèmes d'optimisation s'explique par le résultat suivant :

Proposition Soit f une fonction concave sur un intervalle ouvert I . Si a est un point critique pour f , alors f présente en a un maximum global sur I . Si f est convexe sur I , f présente en a un minimum global sur I .

Un paragraphe facile, dont on a souvent besoin pour étudier le signe des dérivées.

IV Trinôme du second degré.

1. **Definition** On appelle trinôme du second degré une fonction f qui est un polynôme de degré 2, c'est à dire qu'on peut écrire :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a, b, c \text{ trois réels, } a \text{ non nul.}$$

Definition Tout réel x tel que $f(x) = 0$ s'appelle une racine du trinôme f .

Definition Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c trois réels, a non nul, un trinôme du second degré. On appelle discriminant de f , et on note en général Δ le réel $\Delta = b^2 - 4ac$

Ce discriminant permet de dire si un trinôme a des racines ou non, et permet de les calculer quand elles existent. On a un théorème un peu long qui dit tout ça, mais que l'on peut mémoriser facilement à l'aide des trois dessins qui le suivent.

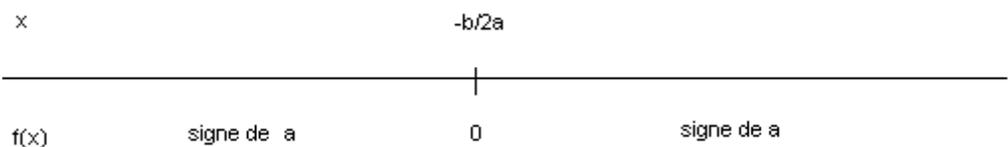
Proposition Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c trois réels, a non nul, un trinôme du second degré et Δ son discriminant. Alors :

1. **Theorem** ● Si $\Delta < 0$, le trinôme n'admet aucune racine réelle, et pour tout x réel, $f(x)$ est du même signe que a .
 - Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une racine $x_1 = -\frac{b}{2a}$, pour tout x réel, $f(x) = a(x - x_1)^2$ et pour tout x différent de x_1 , $f(x)$ est du signe de a .
 - Si $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, pour tout x réel $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, et si x est entre les racines, $f(x)$ est du signe opposé à celui de a , alors que si x est à l'extérieur des racines, $f(x)$ est du signe de a .

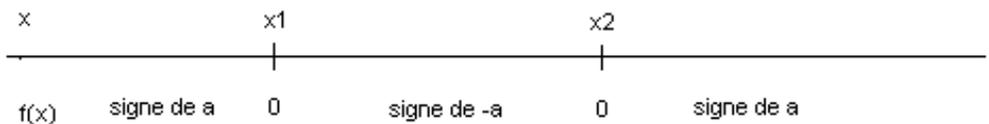
Discriminant négatif



Discriminant nul



Discriminant positif

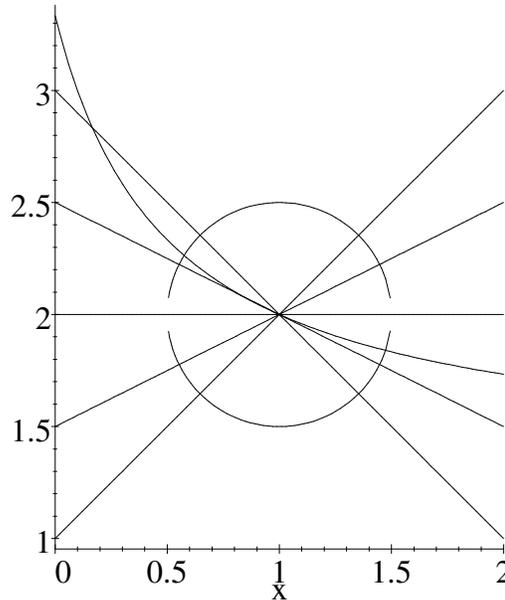


CHAPITRE 7 : Optimisation libre d'une fonction de deux variables

1-Recherche des points critiques de f (conditions du premier ordre)

Dans ce chapitre on étudie une fonction f de deux variables définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ admettant en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

Un point (x,y) est dans un voisinage de (x^*,y^*) soit en "cheminant" avec $x=x^*$ et y proche de y^* soit en "cheminant" avec $y=y^*$ et x proche de x^* soit par tout autre chemin tel que la distance entre les points (x,y) et (x^*,y^*) soit très proche de 0...



Définition : (x^*,y^*) un point de l'ensemble de définition D_f est un maximum local de f si pour tout (x,y) dans un voisinage de (x^*,y^*) et dans D_f on a l'inégalité $f(x,y) \leq f(x^*,y^*)$

On en déduit qu'en fixant l'une des variables **par exemple $y=y^*$** on a aussi avec (x,y^*) dans le voisinage de (x^*,y^*) $f(x,y^*) \leq f(x^*,y^*)$ donc x^* est un maximum local de la fonction $x \rightarrow f(x,y^*)$ par conséquent x^* est un point critique pour cette fonction et donc la condition du premier ordre doit être vérifiée c'est-à dire que la dérivée de cette fonction est nulle en x^* donc la dérivée partielle de f par rapport à la première variable x est nécessairement nulle en (x^*,y^*)

par exemple $x=x^*$ on a aussi avec (x^*,y) dans le voisinage de (x^*,y^*) $f(x^*,y) \leq f(x^*,y^*)$ donc y^* est un maximum local de la fonction $y \rightarrow f(x^*,y)$ par conséquent y^* est un point critique pour cette fonction et donc la condition du premier ordre doit être vérifiée c'est-à dire que la dérivée de cette fonction est nulle en y^* donc la dérivée partielle de f par rapport à la deuxième variable y est nécessairement nulle en (x^*,y^*) .

Définition bis (x^*,y^*) un point de l'ensemble de définition D_f est un minimum local de f si pour tout (x,y) dans un voisinage de (x^*,y^*) et dans D_f on a l'inégalité $f(x,y) \geq f(x^*,y^*)$

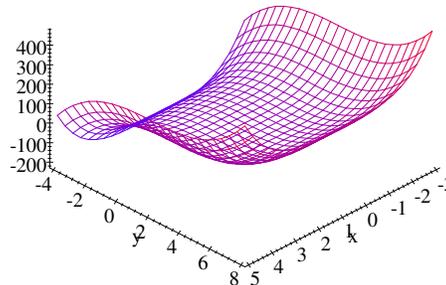
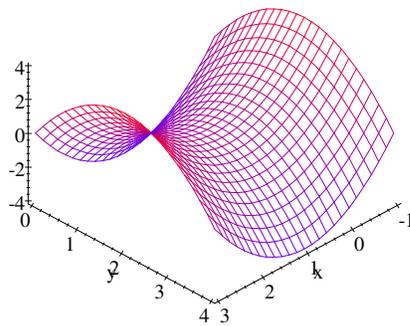
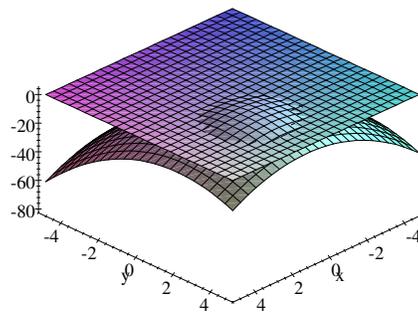
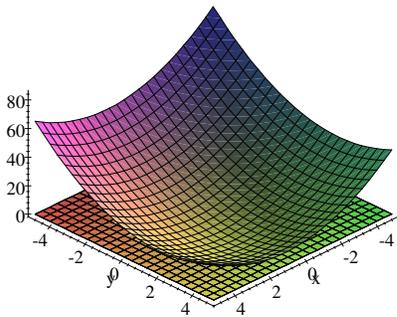
Avec le même raisonnement on obtient de même pour (x^*,y^*) minimum local de f la condition de

nullité des deux dérivées partielles de f par rapport à x et à y au point (x^*, y^*)

A retenir

Si (x^*, y^*) optimise localement f alors (x^*, y^*) point critique de f c'est-à-dire $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) = 0 \end{array} \right\}$

Voici des exemples de fonctions de deux variables dont les deux dérivées partielles s'annulent en $(1;2)$ $(x, y) \rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2$; $(x, y) \rightarrow 4 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2$
 $(x, y) \rightarrow (x - 1)^2 - (y - 2)^2$; $(x, y) \rightarrow (x - 1)^4 + (y - 2)^3$



Sur ces représentations graphiques des situations diverses peuvent se réaliser en $(1;2)$:

- soit $(1;2)$ est effectivement un minimum (cas 1) ou un maximum local de la fonction (cas 2)
- soit il ne s'agit pas d'un extrémum local de f (cas 2 et cas 3) car la fonction f prend en (x,y) des valeurs plus grandes ou plus petites que la valeur de f en $(1;2)$ selon le choix de (x,y) dans le voisinage de $(1;2)$: on dit alors que $(1;2)$ est un point col (de montagne) ou selle (de cheval) pour la fonction
- soit une étude locale s'impose pour déterminer le signe de $f(x,y) - f(1,2)$.

2-Conditions du second ordre

Dans la suite de ce chapitre on étudie une fonction f de deux variables définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ admettant en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on suppose de plus que ces dérivées partielles admettent elles aussi des dérivées partielles; il existe donc a priori quatre dérivées partielles d'ordre 2 pour une fonction de deux variables.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} \end{array} \right\}$$

On se place dans l'hypothèse où les dérivées partielles croisées d'ordre 2 de f sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et un théorème de Schwarz nous permet alors d'affirmer que ces dérivées croisées sont égales : on note cette fonction commune $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$

A l'aide de ces trois dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f on va établir une condition suffisante permettant d'affirmer qu'un point critique (x^*, y^*) de f est un extrémum local de f .

Le fait que (x^*, y^*) soit un point critique de f indique que la surface représentative de f admet localement en $M^*(x^*, y^*; f(x^*, y^*))$ un plan tangent d'équation $z=f(x^*, y^*)$ qui est parallèle au plan (xOy) et on pourra affirmer que f est optimale en (x^*, y^*) si la surface représentative de f pour M proche de M^* est située d'un même côté de ce plan tangent

(soit au dessus pour un minimum local : dans ce cas la fonction f est localement convexe en (x^*, y^*))

soit au dessous pour un maximum local : dans ce cas la fonction f est localement concave en (x^*, y^*)).

Cette condition géométrique se traduit par le

critère du second degré

$$(x^*, y^*) \text{ point critique et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*) \right]^2 > 0 : (x^*, y^*) \text{ extrémum local de } f$$

On peut préciser que si un point critique (x^*, y^*) de f satisfait cette condition du second ordre, les expressions $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*)$ sont alors toutes deux non nulles et de même signe puisque leur produit est strictement supérieur au carré de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*)$;

si de plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) > 0$ (x^*, y^*) vérifiant le critère du second degré est un minimum local de f

si de plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) < 0$ (x^*, y^*) vérifiant le critère du second degré est un maximum local de f

Il en est de même si l'expression $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*) \right]^2$ est nulle avec l'un au moins des termes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*)$ non nul : on peut conclure à un point optimal pour f .

Un point critique de f tel que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*) \right]^2 < 0$ est un point col de f

c'est à dire que l'expression $f(x, y) - f(x^*, y^*)$ ne garde pas un signe constant au voisinage de (x^*, y^*) .

Cas où on ne peut pas conclure : si le point critique (x^*, y^*) de f est tel que toutes les dérivées partielles d'ordre 2 sont nulles en (x^*, y^*) on ne peut rien dire de la nature de ce point et il faut faire une étude locale du signe de $f(x, y) - f(x^*, y^*)$ au voisinage de (x^*, y^*) .

3-Optimiser une fonction de deux variables sur un domaine fermé et borné

Il s'agit d'optimiser une fonction f sur un domaine fermé borné Δ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ délimité par des inégalités que doivent vérifier les variables; en microéconomie elles seront du type $x \geq 0$ et $y \geq 0$ et $ax + by \leq c$ a, b, c constantes positives La fonction f étant continue elle admet sur Δ un maximum (global) et un minimum (global) .

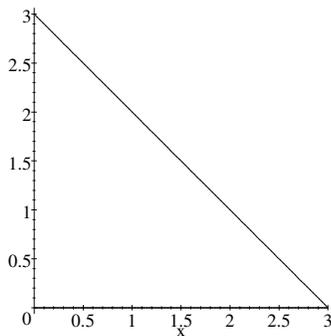
- On recherche les éventuels points critiques de f à l'intérieur de Δ et on examine en ces points la condition du second ordre: on a ainsi optimisé la fonction à l'intérieur de Δ
- On étudie localement la fonction sur le bord de Δ (en se ramenant à une fonction d'une variable à étudier sur un segment)
- On conclut en regroupant tous les points critiques à l'intérieur et sur le bord de Δ

Exemple

optimiser la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$ sur l'ensemble

$$\Delta = \{x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 3\}$$

Le domaine d'étude est un triangle délimité par les points O(0;0) A(3;0) et B(0;3)



étude à l'intérieur du triangle:

recherche des points critiques qui sont solutions du

$$\text{système: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^* - y^* - 1 = 0 \\ 2y^* - x^* - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^* - y^* - 1 = 0 \\ -x^* + 2y^* - 1 = 0 \end{cases}$$

on trouve un seul point critique de f à l'intérieur du triangle à savoir $(x^*; y^*) = (1; 1)$

en tout point on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -1$ donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*) \right]^2 = 2 \times 2 - 1^2 = 3$$

f présente un minimum local à l'intérieur de Δ en $(1; 1)$ et $f(1; 1) = 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 2 = 1$ à l'intérieur de Δ on a $f(x, y) \geq 1$

étude sur les bords du triangle:

- sur $x = 0$ et y dans $[0; 3]$ $f(0, y) = y^2 - y + 2 = g(y)$ cette fonction admet un point critique pour $2y - 1 = 0$ ($y = \frac{1}{2}$) qui minimise $f(0, y)$ et $f(0; \frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$ et cette fonction est maximale localement pour $y = 0$ avec $f(0, 0) = 2$ ou pour $y = 3$ avec $f(0, 3) = 8$

y	0	$\frac{1}{2}$	3
$f(0, y)$	2	$\frac{7}{4}$	8

- sur $y = 0$ et x dans $[0; 3]$ $f(x, 0) = x^2 - x + 2 = g(x)$ qui est minimale en $(\frac{1}{2}; 0)$ de valeur minimale $f(\frac{1}{2}; 0) = \frac{7}{4}$ et maximale localement pour $x = 0$ ou pour $x = 3$ avec $f(0, 0) = 2$ et $f(3, 0) = 8$

y	0	$\frac{1}{2}$	3
$f(0, y)$	2	$\frac{7}{4}$	8

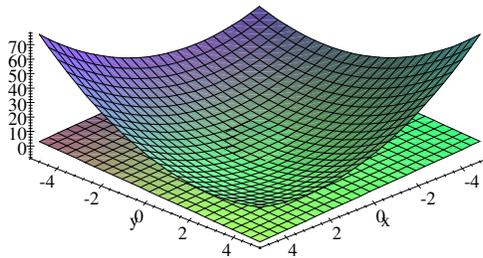
- sur $x + y = 3$ ou $y = 3 - x$ $f(x; 3 - x) = x^2 + (3 - x)^2 - x(3 - x) - x - (3 - x) + 2$
 $f(x; 3 - x) = 3x^2 - 9x + 8$ qui est minimale pour $x = \frac{3}{2}$ alors $y = 3 - x = \frac{3}{2}$ et $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ est bien sur la frontière et $f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{5}{4}$ et maximale pour $x = 3$ (alors $y = 0$) et pour $x = 0$ (alors $y = 3$) $f(3, 0) = 8 = f(0, 3)$

x	0	$\frac{3}{2}$	3
$f(x, 3 - x)$	8	$\frac{5}{4}$	8

- **Conclusion:**

Dans le domaine Δ la fonction f est maximale de valeur 8 obtenue en $(3, 0)$ et en $(0, 3)$ et minimale de valeur 1 obtenue en $(1, 1)$.

$$1 \leq f(x, y) \leq 8 \text{ pour tout } (x, y) \text{ dans } \Delta$$



$$x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$$

CHAPITRE 8 : Optimisation liée d'une fonction de deux

variables

Mise en place du problème et approche graphique

On cherche à maximiser ou à minimiser une fonction de deux variables positives sachant que ces variables sont liées par une contrainte; par exemple maximiser la quantité produite $Q(x, y)$ pour une contrainte de coût de fabrication à respecter du type $p_x x + p_y y = c$ ou minimiser le coût de fabrication du type $c(x, y) = p_x x + p_y y$ pour une quantité donnée de production c'est à dire que x et y sont liées par $Q(x, y) = A$ (le point (x, y) se trouve sur l'isoquante de niveau A imposé).

Il s'agit d'optimiser $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ sachant que $g(x, y) = k$, l'une des fonctions f ou g étant une fonction affine.

I-Cas où la fonction à optimiser est affine et où la contrainte est de la forme $g(x, y) = k$

- En plaçant x en abscisses et y en ordonnées on trace la courbe de niveau k de la fonction g (qui est donc la contrainte à respecter) ; la pente en tout point (x, y) de cette courbe de niveau est

$$\text{donnée par } \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)} (= -\text{TMST}_{x, y}).$$

La fonction à optimiser est $f(x, y) = p_x x + p_y y$

La courbe de niveau m de la fonction affine f est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) telles que $f(x, y) = m$ ou $p_x x + p_y y = m$. Il s'agit d'une droite de pente $-\frac{p_x}{p_y}$ (dont on ne considèrera que les points avec des coordonnées positives). On trace plusieurs courbes de niveau de f et on cherche le "meilleur" niveau m de f sachant que l'on se restreint aux points de coordonnées positives se situant sur la courbe de niveau k donné de g

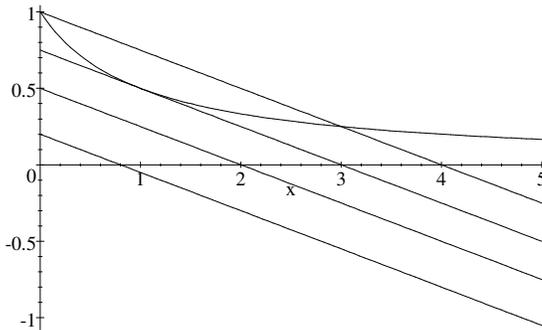
- ou bien le système $\begin{cases} f(x, y) = m \\ g(x, y) = k \end{cases}$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$: m ne convient pas pour l'optimisation de f sous la contrainte $g(x, y) = k$
- ou bien le système $\begin{cases} f(x, y) = m \\ g(x, y) = k \end{cases}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ la valeur m est le niveau optimal de f sous la contrainte $g(x, y) = k$
- ou bien le système $\begin{cases} f(x, y) = m \\ g(x, y) = k \end{cases}$ admet plusieurs solutions dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ m ne permet pas d'optimiser f sous la contrainte $g(x, y) = k$

La valeur de m (si elle existe) permettant de trouver une solution unique au système sera la valeur m^* telle que la droite d'équation $f(x, y) = m^*$ soit tangente à la courbe d'équation $g(x, y) = k$; le point de tangence est le point qui optimise f tout en respectant la contrainte et ce point de

coordonnées (x^*, y^*) vérifie l'égalité des pentes des tangentes c'est à dire $-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)} = -\frac{p_x}{p_y}$ on

peut retenir ce résultat en écrivant $\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$ en (x^*, y^*) .

Exemple graphique : optimiser $f(x, y) = x + 4y$ sous la contrainte $(x + 1)y = 1$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$; en exercice on démontrera que f admet une valeur minimale égale à $\frac{3}{4}$ en respectant la contrainte $g(x, y) = 1$ obtenue en $(x^*, y^*) = (1, \frac{1}{2})$



II-Cas où la fonction à optimiser est $f(x, y)$ et où la contrainte est affine

La contrainte est de la forme $g(x, y) = p_x x + p_y y$, avec p_x et p_y données strictement positives.

En plaçant x en abscisses et y en ordonnées on trace la courbe de niveau k de la fonction affine g (qui est donc la contrainte à respecter) ;

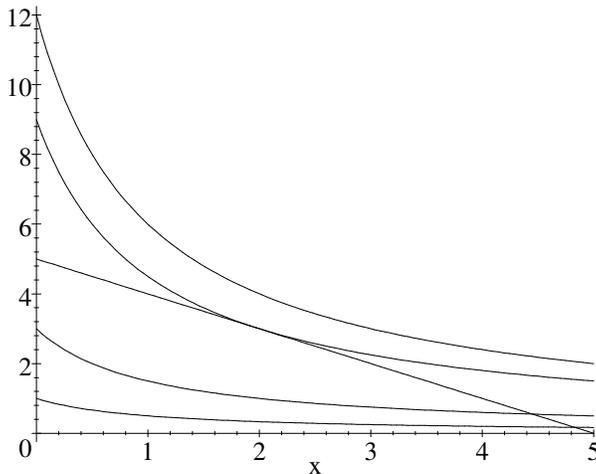
les points de coordonnées (x, y) vérifiant $g(x, y) = k$ sont sur une droite de pente $-\frac{p_x}{p_y}$.

- On trace différentes courbes de niveau de la fonction f : il s'agit de courbes qui n'ont aucun point en commun entre elles et l'une d'elles sera tangente à la contrainte en un unique point de coordonnées (x^*, y^*) pour lequel il y aura égalité entre la pente de la tangente en f donnée par

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} (= -TMST_{x,y}) \text{ et } -\frac{p_x}{p_y}.$$

$$\text{En } (x^*, y^*) \text{ on a : } \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}$$

Exemple graphique : optimiser dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ l'expression $f(x, y) = (x + 1)y$ sachant $x + y = 5$; on démontrera que f admet un niveau maximal égal à 9 en respectant la contrainte et obtenu en $(x^*, y^*) = (2, 3)$



III Résolution rigoureuse

On se ramène à une fonction d'une variable à optimiser en donnant (quand cela est possible) explicitement y en fonction de x pour traduire la contrainte $g(x,y)=k$ à respecter

$g(x,y) = k \Leftrightarrow y = u(x)$ et en précisant que les variables sont dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ puis on optimise la fonction $x \rightarrow f(x, u(x)) = F(x)$

Exemple

Optimiser $f(x,y) = xy - 2x^2 - y^2 + 100$ sous les contraintes $x \geq 0$ $y \geq 0$ et $x + y = 8$

montrer que la valeur maximale prise par $f(x,y)$ sous les contraintes $x \geq 0$ $y \geq 0$ et $x + y = 8$ est

72 obtenue pour $(x^*, y^*) = (3; 5)$

Cas usuels en microéconomie :

- f est une fonction affine à optimiser et la contrainte est sous la forme $g(x,y)=k$ avec $g(x,y)=Ax^a y^b$ $A>0$ a et b positifs

On peut traduire la contrainte en écrivant $Ax^a y^b = k \Leftrightarrow y = \left(\frac{k}{A}\right)^{\frac{1}{b}} x^{-\frac{a}{b}} = u(x)$ avec u fonction décroissante convexe sur $]0; +\infty[$

La fonction à optimiser est alors

$$F(x) = f\left(x, \left(\frac{k}{A}\right)^{\frac{1}{b}} x^{-\frac{a}{b}}\right) = p_x x + p_y \left(\frac{k}{A}\right)^{\frac{1}{b}} x^{-\frac{a}{b}} \text{ sur }]0; +\infty[$$

condition du premier ordre: $F'(x^*)=0$ soit $p_x + p_y \left(\frac{k}{A}\right)^{\frac{1}{b}} \left(-\frac{a}{b} x^{*^{-1-\frac{a}{b}}}\right) = 0 = p_x + p_y u'(x^*)$ et donc $u'(x^*) = -\frac{p_x}{p_y}$ (égalité des pentes des tangentes)

condition du second ordre $F''(x^*) = p_y (u''(x^*))$ donc $F''(x^*)$ est positif puisque u est convexe sur $]0; +\infty[$

dans ce cas s'il existe un extrêmu de f sous la contrainte $Ax^a y^b = k$ il s'agit d'un minimum de f sous la contrainte avec des valeurs positives de x et de y

- f à optimiser est de la forme $f(x,y)=Ax^a y^b$ $A>0$ a et b positifs et la contrainte est sous la forme $g(x,y)=k=p_x x + p_y y$

Dans ce cas où g est affine $[g(x,y)=p_x x + p_y y = k \Leftrightarrow y = -\frac{p_x}{p_y} x + \frac{k}{p_y}]$

On est conduit à optimiser $F(x) = f\left(x, -\frac{p_x}{p_y} x + \frac{k}{p_y}\right) = Ax^a \left[-\frac{p_x}{p_y} x + \frac{k}{p_y}\right]^b$ a et b positifs

S'il existe une solution x^* elle vérifie la condition du premier ordre

$F'(x^*)=0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + \left(-\frac{p_x}{p_y}\right) \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)$ ce qui donne

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\frac{a\left[-\frac{p_x}{p_y}x^* + \frac{k}{p_y}\right]}{bx^*} = -\frac{p_x}{p_y} \text{ (égalité des pentes des tangentes aux courbes) qui est une}$$

équation de degré 1 à une inconnue x^*

Pour conclure il faut étudier le signe de $F''(x^*)$: si $F''(x^*)$ est négatif il s'agira d'un maximum de f sous la contrainte $p_x x + p_y y = k$;

si $F''(x^*)$ est positif il s'agira d'un minimum de f sous

la contrainte $p_x x + p_y y = k$

si $F''(x^*)$ est nul on ne peut conclure.